目　录

第一章 引 言

应 崇 福

§1.1 超声学概述

超声学是声学的一个分支，它主要研究超声的产生方法和探测技术(包括显示)；超声在各介质中的传播规律；超声和物质的相互作用，包括在微观尺度的相互作用；以及超声的众多应用. 超声是指频率高于2×10^4Hz的声音.一般来说，人耳是听不见频率高于2×10^4Hz的声音的，当然这个频率界限是粗略的，只是个概数. 各人所能听见的频率上限不尽相同，即使同一个人，上限也会随着年龄的增长而降低. 由于历史原因和工作特点，少数频率低于2×10^4Hz声波的应用，也包括在超声学的研究范围.

由于人耳听不见，在自然界中似乎超声不常出现，其实超声是广泛存在的，这是因为人们所听到的声音，只是实际声音的一部分，即可听声部分，而实际声音还带有超声成分，只是人们听不到. 例如，固体材料中的点阵振动，日常活动中两个金属片的相撞，管道上小孔的漏气，其中都有超声成分.自然界中，许多动物的喊叫含有超声，例如老鼠、海豚、河豚等. 能发出超声的动物中，最出名的是蝙蝠.蝙蝠之所以知名，是因为它们能迅速识别弱超声回波，而具有在阴暗洞穴中飞行的奇特本领和捕捉食物的本领. 早在18世纪，科学工作者便对它们的“特技”进行了研究，并一直延续至今，目前的工作已深入到重点研究它们的听觉系统了.

历史上研究超声的动力，不仅在于大自然中超声的普遍存在性(存在于频率下限附近，也存在于客观上限附近)，还在于对自然现象的发现和阐明；而更重要的是人们发现，超声有广泛的可用

性，从而主动地大量产生和利用超声.

超声可应用的领域，广泛到可称为"杂"的地步. 在超声学的发展中，曾经试用超声到不胜枚举而方向迥异的项目中；迄今也仍然不断有色彩缤纷的应用尝试. 淘汰了那些未能经受考验的应用之后，长期使用、稳定有效、能承受竞争的应用还是甚多甚广的. 超声新应用的出现，常常迫使人们进一步开拓对超声的研究，因为只有对新发现的超声行为和本质加深理解，应用才能巩固和发展. 而这些新的理解，又启发了超声更新应用的提出. 如此交叉促进，在相当程度上导致了超声学的不停前进.

产生、检测和传播是声学各分支的共同内容，对超声学而言，这些共性中还有它的个性. 我们先来谈谈超声的产生和检测. 前面曾提到，比较起来，自然赋予的产生和检测超声的手段还是很有限的，特别是因为超声的范围很宽. 以频率论，从2×10^4Hz或更低的频率覆盖到10^{12}Hz. 以功率论，由于应用需要，有时要求声强达到每平方米几百、几千瓦. 以工作介质论，既要在气体内，也要在液体、固体内发射和接收超声. 以工作环境论，有时会遇上一些比较极端的条件，如1000多度的高温，不到1 K的低温，低、高压等. 因此，在超声学中，产生和检测超声的工作是很繁重、复杂的. 我们再来谈谈超声的传播问题. 和声学的其它分支相比，超声学至少有两个比较突出的情况，其一它更多地和固体打交道，其二它的频率高. 超声学愈来愈多地需要分析声波在多种固体中的传播，固体包括各向异性材料、压电材料、磁性材料、半导体、岩体、生物组织等等. 超声的高频率带来传播中的一些比较特殊的问题，如高衰减、多次散射等. 更突出的是，对甚高频率的超声，从传播角度考虑，介质已不再能够看作是连续的，而应看作是离散的；超声本身则呈现准粒子性.

但超声学另有一项独特的内容，就是大量研究声波和物质的相互作用. 形形色色的载声介质影响着声波的传播行为，反过来各种超声波的传播也作用于某些介质的物理性质或状态. 有些作用是在微小或微观的尺度上进行的. 例如超声波可以和固体里的

电子、原子、载流子、螺旋子、位错等有相互作用. 有些作用在较大的、宏观的尺度进行，例如超声可以在流体里导致空化、冲流等. 这些相互作用的研究为声学开阔了一个重要的视野，也为超声的某些应用奠定了理论基础.

现在我们来稍许回顾一下超声学的发展史. 在超声学的形成期，早在 1830 年，为了探讨人耳究竟能够听到多高的频率，F. Savart 曾用一个多齿的轮，第一次人工产生了频率为2.4×10^4Hz的超声. 但人们一般却认为，首次有效产生高频声的，应是 1876年 F. Galton 的气哨实验. Galton 哨在空气中所产生的频率达3×10^4Hz，随后改用氢气，频率达8×10^4Hz.

对超声学的诞生起了重大推进作用的，是 1912 年豪华客轮 Titanic 号在首航中碰撞冰山后的沉没，这个当时震惊世界的悲剧(1986 年这条轮船重新在海底被发现)促使了科学家们提出用声学方法来预测冰山. 这些活动启发了第一次世界大战期间侦察德国潜艇的紧张研究. P. Langevin 是开展这项研究的核心人物，从 1916 年开始，他致力于研究产生和运用水下超声以作为侦察的手段. 有人把这项重大研究的开展作为现代超声学的诞生. 这项工作为后来的超声材料探伤和医学诊断开辟了道路，并随之也为后来的超声各项能量应用指出了方向，因为实验中无意发现，在石英换能器的附近，鱼类立即被杀死，观察人员把手投进声束时也感到痛楚. 1927 年 R. W. Wood 和 A. E. Loomis 所发表对超声能量作用的实验报告，更激起广泛的关注，为今天称为功率超声学这门分支奠定了基础. 几乎与此同时，另一批工作者测量气体里的声速和声衰减，稍后又有人从理论上解释了这两个量的频率依赖关系，由此开辟了研究超声与物质微观结构间相互作用的崭新领域.

在我国，解放前超声学的研究是个空白，解放后不久，出现了很少量的超声学研究. 超声学研究的大规模开展则始于 1956 年12年科学规划稍后. 迄今，在超声学的各个大领域都开展了研究和应用，其中有少数项目已接近或达到了国际水平.

§1.2 超声的可用特点

按照习惯的提法，超声在国防和国民经济中的用途可分为两大类，一类是利用它的能量来改变材料的某些状态. 为此，需要产生相当大或比较大能量的超声，实际上是大功率超声或简称功率超声. 自然界有多种形式的能量，如光能、微波能等等，声能是其中的一种. 从应用角度，超声能量可在有些场合显示其可用性，并具有它的特色. 功率超声的用途常和它对物质的相互作用有密切的关系. 以超声清洗为例，表面看来，清洗似乎是极普通、极平凡的工作，但超声由于它的空化作用而能获得突出的清洗效果. 在高要求或大难度的场合，多年来保持了其独特的地位. 其它例子有对硬脆材料的加工、塑料焊接，一些医学治疗作用等，近年来又兴起对治癌作用的探讨.

超声用途的第二类是利用它来采集信息，特别是材料内部的信息. 这时，超声的一个特点是，它几乎能穿透任何材料. 对某些其它辐射能量不能穿透的材料，超声便显示出这方面的可用性，例如，第一次世界大战中科学家考虑用超声来侦察潜艇，便是因为熟知的光波、电磁波都不能渗透海洋. 后来又兴起超声探伤、超声诊断等，也都是因为金属、人体等都是不透光介质. 超声与X射线、γ射线对比，其穿透本领并不优越，甚至还较差，而超声仍在临床使用，这是因为超声对人体的伤害较小，这是超声应用的另一特点.

这里我们附带谈一下声学内部的问题：为什么在上述两大类型应用中要使用超声，而不使用更普通的可听声？从穿透材料的本领看，高频声劣于低频声，频率愈高，声波在传播中的衰减一般愈大，也就是穿透材料愈浅. 尽管如此，人们仍然经常选用需要花费气力才能获得的超声，而不用比较易得的可听声，这是有其多种原因的.

其中一个原因是人耳听不到超声. 功率超声较常使用稍高于 2×10^4Hz 的低频超声，在这样的场合，把声频降到稍低于

2×10^4Hz，本来从其它方面看差别不大，但一般仍然采用超声，目的便是为了避免吵闹人耳.

另一方面，如果提出使用较低频率的可听声，比如1 kHz的声，那就除了产生噪声外，还会出现另一个问题，即声学装置将变得很庞大，因为很多功率超声装置采用谐振设计，而低频可听声的波长大，相应地装置要加长，以1 kHz的声和20 kHz的声两种情况相对比，可能要长20倍.

这里引出一个波长问题，波长和频率是直接联系的，但有些场合，波长似乎有更直接的影响. 在第二类型的超声应用中，用波长的概念更有助于说明超声的可用特点，我们可以举出波长小的两点后果. 第一个后果是，波长小则同样大小声源所产生的超声，其方向性强. 强方向性对于采集信息是重要的；侦察手段本身的方位不明确，便难以判断所得信息的方位. 发射声波的方向性和波长的关系，可以用声学中熟知的活塞问题来考察. 图1.2.1给出了一个无限大刚性障板中所嵌一个圆形活塞，振动时向前面流体发射声波的指向性图案. 图中的曲线表示不同 r_0/λ 时的不同图

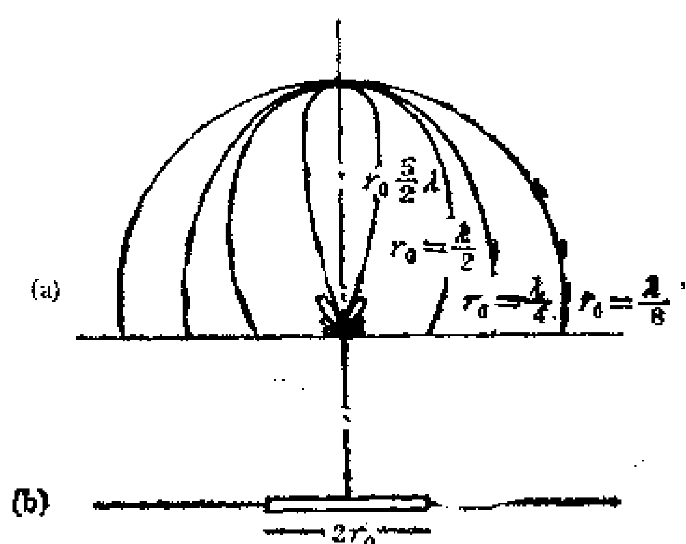


图1.2.1 无限大刚性障板中圆形活塞(b)所发射声波的指向性图案(a)，图案随 r_0/λ 而变化

案，这里 r_0 是活塞的半径，λ 是发射声波的波长. 从图看到，当 r_0/λ 变大，由$\frac{1}{8}$变到$\frac{5}{2}$，图案由宽变窄，也就是所发射声波的方向性变强. 看一下具体的数值例，在水中，如果希望得到象 $r_0=\frac{5}{2}\lambda$ 那样强的方向性，一个方案是采用千赫的声波和半径为 3.8 m的活塞，另一个方案是采用兆赫的声波和半径为 3.8 mm的活塞. 显然，制作和搬运一个直径为 7.6 m的声源是极不方便的，这时选用兆赫级的超声是可取的.

波长小还有第二个后果. 声波遇到挡声或部分挡声的异物时会发生散射，包括衍射. 散射效应随波长的增大而减弱. 对于日常遇到的可听声，它的波长比起一般室内障碍物的尺寸通常是如此之大，以至我们不大想到，声波有什么阴影，有什么阴影区. 这在日常生活中是件好事，否则室内讲话太费劲了. 但是，如果我们是在采集信息，是在采集有关障碍物的信息，好坏的标准便恰巧相反，因为这时我们不能象用光波那样，用可听声波来推论障碍物的存在. 不过，如果提高声波的频率，使声波的波长对障碍物的尺寸是可比的或更小，那便可能获得微小异物的声学像，这就是我们要采集的信息. 在光学里，分辨两点光源的可辨宽度，按照牛顿判据，是和两点之间的距离对波长之比成正比的. 在声学里，有同样的规律. 从这个角度观察，小波长有它的用途.

上面两点讨论，说明在“检测”用超声场合，小波长是有利因素. 实际上，在牵涉到声波和物质微观结构的许多相互作用时，波长的概念也常常是有益的. 例如，波长小的声波可以引起固体内原子间距离的改变，从而导致原子间互作用力的改变，导致一些物理的后果，声顺磁共振便是一例.

前面把超声在国防和国民经济的用途，按习惯分为两大类型. 近 20 年来声表面波这个分支的崛起，却向这习惯的分类方法进行了挑战. 新的声表面波主要是用来构成电子学的器件，它并不靠大能量工作，也不采集材料或材料内部的信息，而主要是对电子信

号进行多种控制，如进行延时、卷积等信号处理．这样，这类较新的广泛应用，超出了习惯上两大类型的范畴．

这类超声用途的特点，大部分也可以间接用小波长的概念来描述，不过现在小波长不是和可听声相比，而是和同频率的电磁波相比；和电磁波比是合理的，因为涉及的是电子学器件．实质是，超声本类用途的特点，在于声波的传播速度比电磁波小 10^5 倍数量级．

在介绍超声可用特点的同时，也应当说明超声可用的局限性．已经提到超声随频率增长的衰减，这里高频率和远距离形成一对矛盾．声波的非线性也在一定程度上限制了高能量的远距离传播．声波在稀薄空气中和真空中更难以存在．另一方面，声波对介质中不均匀性的敏感，是可用之利，但有时又有导致过份复杂情况之弊．我们还可以列举其它一些局限性，类此种种，都是不该忽视的．正确地理解这些正反因素，从而为最大限度地利用超声建立科学的依据，开辟新的应用，是超声学基本任务之一．

第二章 弹性介质中的声波

应 崇 福

§2.1 概 述

本章将讨论声波的一些基本性质，讨论限于振幅足够小和波长足够大的声波. 振幅足够小的含义是，声波强度不是很大，因此声波中的扰动量是小量，远小于某个标准；波长足够大的含义是，声波的频率不是极高，因此声波的波长远大于组成介质的微观粒子(如原子、分子)间的距离，这些微观粒子于是以大集团作整体的运动，从而介质宏观上可以看作是连续的. 小振幅的假设，对可听声和超声是共同的，这个假设的基础在于，在比较通常的情况下，这种近似理论能够解释实际现象. 超声学中，在检测、医学诊断，表面波技术等等应用方面，小振幅声波的理论常是足够的. 也遇到一些现象，忽略扰动量二次和二次以上项的"线性"处理变得不适用了，尤其是在功率超声的应用中，这些问题将在后面有关章节中单独进行讨论. 关于第二个假设，即传声介质的连续性，这对可听声是普适的，对超声却是有条件的，因为超声的频率可以高到需要考虑介质是众多分离的微观粒子的程度，这个问题将在第八章中讨论.

能传播声波的介质必须是可变形的. 同上面所提到只限于讨论小振幅声波的说法相一致，本章将限于讨论弹性介质. 在弹性介质中，当有力作用时，任何两个可识别的质点的间距会改变，而当作用力撤去后，这两个质点最终会回到原来的位置和保持原来的间距. 在这同时，形变不只停留在局部，却会传到介质的其它区域，简单说这就是声波. 这个基本现象不分介质是气体的、液体的还

是固体的.因此,对所有这些物态,基本的分析应当是共同的.本章§2.2将讨论弹性连续介质中作用力和形变的定量定义,以及二者的宏观关系,也就是对弹性的描述.由此,在§2.3导出质点的运动方程,从而导出声波的概念,并大致介绍声波的一些类型.在§2.4中,将讨论声波的一些基本的传播特性,包括在两个介质的大平面介面上声波的反射和折射,有限大障碍物对声波的散射,以及声波在实际介质中的衰减.

如上所述,本章所讨论的介质是一般的介质,包括各向异性的固体.各向同性固体、流体、气体是一般介质的一些特例.但是,在本章中,不讨论具有电、磁性能的介质,或者说不理会介质的电磁性能,以此不涉及介质内力学波和电磁波的耦合.因此,实际上本章所讨论的还不是最一般的介质.在超声学中常用压电和铁磁材料,主要用来发射和接收超声,而在表面波技术中并同时用来作为传播介质.下章将对压电和铁磁介质进行一些讨论.本书也不涉及等离子体,虽然在等离子流体和固体里都可以激发特殊形式的声波.

§2.2 弹性介质中的作用力和形变

为了描述弹性介质中的作用力和形变,以及进一步解释两者间的关系,首先需要确定受力体,或者用以标志形变的实体,这是通常称为质点的物质实体.我们假设,连续介质中任意小的区域都具有大块介质的一些宏观特性(如温度),这样,在介质的每一个几何点都有一个质点,而介质是由连续分布的这些质点所组成的.显然,这些质点不是微观的,不是相互间有空隙的原子或分子.每个质点大得足够包含许多个原子或分子,它的一些宏观性质实际上是对众多原子或分子平均而得的性质.如果包含的粒子太少,平均值会有较大的波动,如果太多,则所占空间会侵入宏观性质的邻区.

2.2.1 作用力：应力

明确了这样一个质点的概念，我们来分别讨论弹性介质内力和形变的确切定义．先来讨论作用力，受力的主体是介质的质点或一群质点．作用于质点的力可以分为两大类：一类是彻体力，一类是面力．彻体力是物体外界的力源作用于物体内部质点的力，例如重力，它的特点是，总作用力的大小和受力物体局部的体积大小成正比．因此，设在介质内部位于 $\mathbf{x}$ 处有点 P，并设在它周围有体元 ΔV，而作用于这个体元的总彻体力为 $\Delta\mathbf{F}$．我们定义，在 P 点的单位体积彻体力的分量为

$$f_i = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{(\Delta\mathbf{F})_i}{\Delta V} \qquad i=1,2,3, \tag{2.2.1}$$

$(\Delta\mathbf{F})_i$ 是 $\Delta\mathbf{F}$ 的分量．单位体积彻体力 $\mathbf{f}$ 是矢量．

弹性介质中的面力是声波现象中更重要的力，它是作用于物体内部任一个面上的力，起源于相邻质点间的反作用．设有一个任意面元 ΔS，这个面元有正、负两侧，如果由于某个起因，ΔS 正侧的所有质点作用于 ΔS 负侧的相邻质点，则后者也将作用于前者．设面元 ΔS 通过位于 $\mathbf{x}$ 的点 P，面元的取向以 $\mathbf{l}$ 表示，$\mathbf{l}$ 是 ΔS 由负侧指向正侧的法向单位矢量．又设正侧质点作用于负侧质点的总面力为 $\Delta\mathbf{T}$．我们定义，在 P 点的单位面积面力，其分量为

$$T_{li} = \lim_{\Delta S\to 0}\frac{(\Delta\mathbf{T})_i}{\Delta S} \qquad i=1,2,3, \tag{2.2.2}$$

$(\Delta\mathbf{T})_i$ 是 $\Delta\mathbf{T}$ 的分量．单位面积面力 $\mathbf{T}_l$ 称为应力矢量．作用于面元 ΔS 的实际上还有一个力偶，不过，当 $\Delta S\to 0$，这个力偶趋于零．

除依赖于 P 点的位置 $\mathbf{x}$ 外，$\mathbf{T}_l$ 还依赖于 ΔS 的取向 $\mathbf{l}$．为表示 $\mathbf{T}_l$ 对 $\mathbf{l}$ 的依赖，我们考虑平行于坐标面的三个平面上的应力分量．设点 P 位于坐标原点（这个假设并不影响 P 点的一般性），又设 ΔS 是图 2.2.1 中的任意平面 $A_1A_2A_3$，它的法线指向如图示，法线的

方向余弦是 l_i；面 $A_1A_2A_3$ 离 P 点的距离是 h. 当 $\Delta S\to 0, h\to 0$，作用于 ΔS 面上的力即趋于点 P 的 $\mathbf{T}_l$. 面 $A_1A_2A_3$ 和面 PA_2A_3、PA_1A_3 和 PA_1A_2 构成一个四面体元 V. 令作用于平面 $x_1=0$ 的三个应力分量为 $T_{1j}(j=1,2,3)$，这里取 x_1 增长的一侧为平面 $x_1=0$ 的正侧. 同样，令作用于平面 $x_2=0$ 的三个应力分量为 T_{2j}，作用于平面 $x_3=0$ 的三个应力分量为 T_{3j}. 从体元 V 所受总面力为零这个平衡条件，再取 $V\to 0$，可以证明，

$$T_{li}=T_{ji}l_j \qquad i,j=1,2,3, \tag{2.2.3}$$

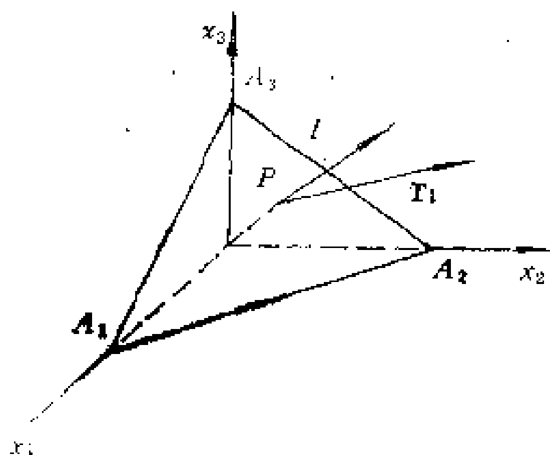


图2.2.1 取向为 l 的面元 $\Delta S=A_1A_2A_3$

这样，作用于 l_i 取向面上的应力分量 T_{li}，可以用作用于三个坐标面上的应力分量 T_{ji} 来表示，表示式中受作用面的取向 l_i 是显出现的.

除非受作用面是坐标面之一，T_{ij} $(i, j=1, 2, 3)$ 一般不同于 T_{li} $(i=1,2,3)$、T_{ij} 表示直角坐标系中应力的 9 个分量. 图 2.2.2 给出介质内作用于 P 点周围一个无限小直角平行六面体各面的这些分量. 要注意的是，应力是有关面正侧质点作用于负侧质点的单位面积力，而平面 $x_i=$ 常数的正侧定义为 x_i 增长的一侧. 此外，由

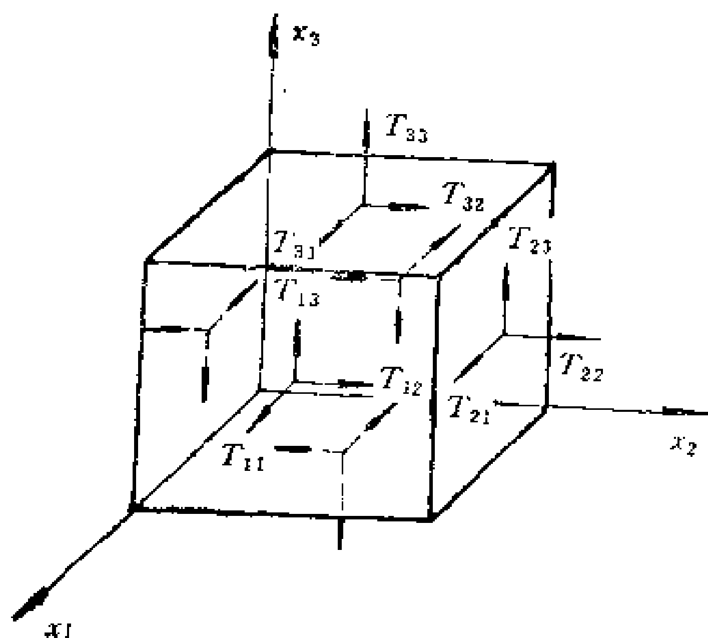


图2.2.2 作用于介质内一个无限小直角平行六面体各面的应力分量

图看到，T_{ii} 是法向应力分量，$T_{ij}(j \neq i)$ 是切向应力分量. 如果我们由直角坐标系 x_i 变换到另一个直角坐标系 x'_i，两个系有共同原点但相互倾斜，并设 P 点的应力分量在 x_i 坐标系为 T_{ij}，在 x'_i 坐标系为 T'_{ij}，则可以证明，

$$T'_{ij} = x'_{i,m} x'_{j,n} T_{mn}, \tag{2.2.4}$$

这里，$x'_{i,m} = \dfrac{\partial x'_i}{\partial x_m}$，即下标逗号表示微分. 这是二阶张量的变换律，所以，T_{ij} 是二阶张量的分量；$\boldsymbol{T}$ 是个二阶张量，不同于矢量 $\mathbf{T}_l$.

考虑一个有限小的直角平行六面体，如图 2.2.3 所示，其边长分别为 $\delta x_1, \delta x_2$ 和 δx_3. 如果对不同的坐标轴分别取力距，可以证明，

$$T_{ij} = T_{ji}. \tag{2.2.5}$$

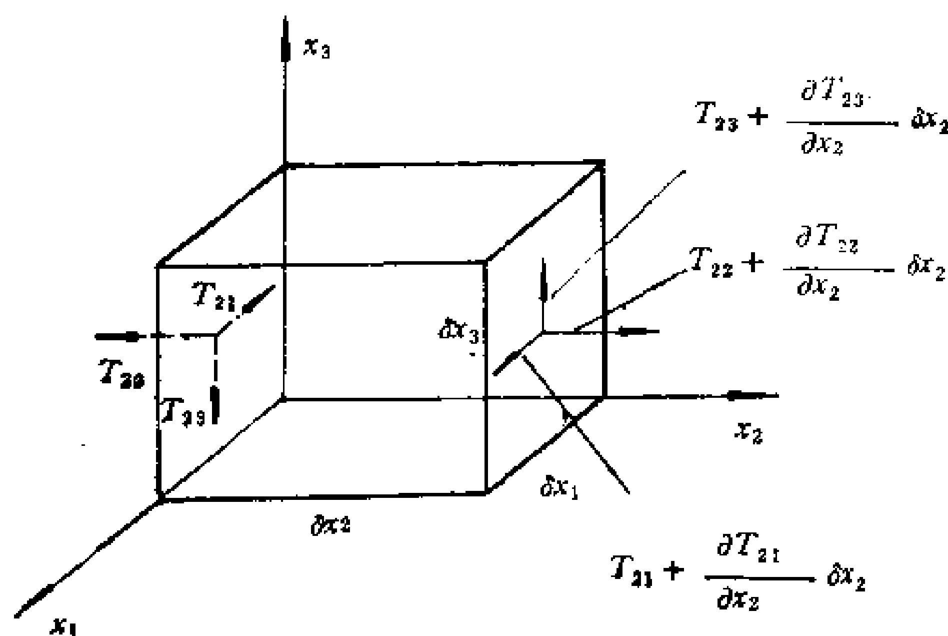


图2.2.3 介质内一个有限小直角平行六面体以及作用在它的两个相对面 $x_2 = 0$ 和 $x_2 = \delta x_2$ 的应力

由此，应力张量是对称的，它的 9 个分量减为 6 个独立量. 结合式 (2.2.3)，容易看到，对任意取向 l_i 的面，在面上 P 点沿法向作用的应力是

$$T_{ln} = T_{li} l_i = T_{ji} l_i l_j = T_{ij} l_i l_j, \tag{2.2.6}$$

显然，$\mathbf{T}_i$ 还有切向应力分量.

2.2.2 形变：应变

现在来考虑怎样计算介质的形变. 当介质的内部质点有相对运动时，我们才说介质有形变. 假设一个物体只作刚性平移或者刚性转动，这时物体并没有变形. 因此，要严格计算形变，不能只看一个质点的移动，而需要考察这个质点相对于其周围质点的移动. 图 2.2.4 中，P、Q 是物体未变形前两个邻近质点的位置. 物体变形后，P 点移到 P' 点，Q 点移到 Q' 点. 这里，对移动的质点，我们用空间固定的坐标系来标志（如图示），这种标志法常称为

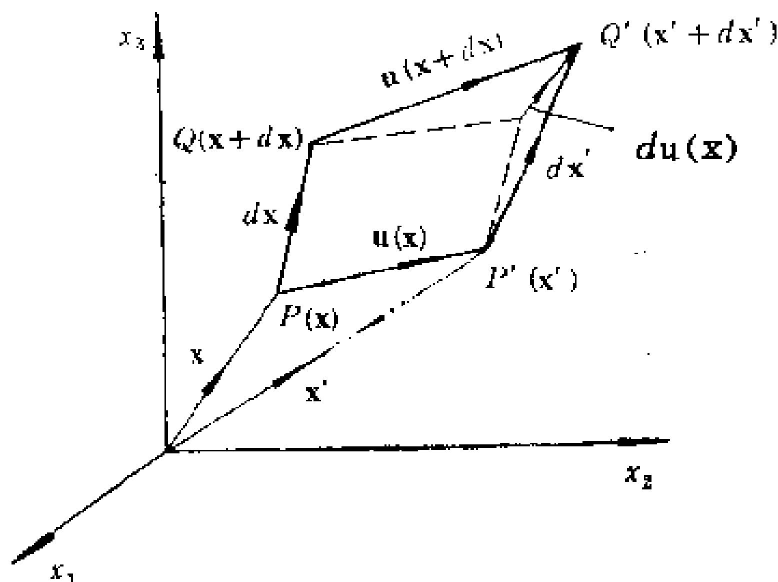


图2.2.4 介质变形前后的质点位置

Eulerian 或空间描叙. 另一种可用的标志方法是取随质点移动的坐标系，称 Lagrangian 或物质描叙，但我们不拟采用. 从图中，变形时 P 点的位移 $u_i(\mathbf{x})$ 为

$$u_i(\mathbf{x}) = x'_i - x_i, \tag{2.2.7}$$

这里 $\mathbf{x}$ 表示 P 点的位置，$x'_i = x'_i(\mathbf{x})$ 是个连续函数，因为介质在变形时仍是连续的，即不断裂. 于是 Q' 的坐标为

$$x'_i + dx'_i = (x_i + dx_i) + u_i(\mathbf{x} + d\mathbf{x}),$$

这里 $\mathbf{x} + d\mathbf{x}$ 表示 Q 点的位置，$u_i(\mathbf{x} + d\mathbf{x})$ 显然是变形时 Q 点的位

移．所以，在形变前后点Q相对于点P的位移是

$$du_i(\mathbf{x}) = dx'_i - dx_i = x_i - x'_i + u_i(\mathbf{x} + d\mathbf{x})$$
$$= u_i(\mathbf{x} + d\mathbf{x}) - u_i(\mathbf{x}). \qquad (2.2.8)$$

看起来，量$du_i(\mathbf{x})$可以用来标志介质的形变，但问题是，物体作刚体移动时，它并不为零，这表示这个量还含有纯形变以外的移动．作为纯形变的计量，我们选择张量

$$\mathscr{D} \equiv |d\mathbf{x}'|^2 - |d\mathbf{x}|^2 = dx'_i\, dx'_i - dx_i\, dx_i. \qquad (2.2.9)$$

对物体的刚性移动，这个量为零．从关系$x'_i = x'_i(\mathbf{x})$，有$dx'_i = x'_{i,j}\, dx_j$，于是

$$\mathscr{D} = (x'_{i,j}\, dx_j)(x'_{i,k}\, dx_k) - dx_i\, dx_i$$
$$= (x'_{i,j}\, x'_{i,k} - \delta_{jk})\, dx_j\, dx_k$$
$$= 2S^f_{jk}\, dx_j\, dx_k, \qquad (2.2.10)$$

式中，δ_{jk}是δ函数，S^f_{jk}是无量纲量：

$$S^f_{jk} = \frac{1}{2}(x'_{i,j}\, x'_{i,k} - \delta_{jk})$$

$$= \frac{1}{2}(u_{j,k} + u_{k,j} + u_{i,j}\, u_{i,k}). \qquad (2.2.11)$$

按式(2.2.7)，符号S^f_{jk}的右上角写有f是为了标明对点P的移动大小，也就是对于物体纯形变的大小．

S^f称为广义应变，是个张量，S^f_{ij}表示它的9个分量．对刚性移动，$S^f_{jk} = 0$．由式(2.2.9)和式(2.2.10)看出，如果$S^f_{ij} = 0$，$\overline{PQ}$的长度不变．另一方面，如果$S^f_{ij} \neq 0$，而当$\overline{PQ}$与x_1轴平行，则$\overline{PQ}$的长度为dx_1，容易算出$\overline{P'Q'}$的长度为$(1 + 2S^f_{11})^{1/2}\, dx_1$，所以介质内一根沿$x_1$方向的直线，形变时伸长，其单位长度的伸长是

$$e^f_1 \equiv \frac{|d\mathbf{x}'| - dx_1}{dx_1} = (1 + 2S^f_{11})^{1/2} - 1. \qquad (2.2.11a)$$

因此，得出S^f_{11}的含义是

$$S^f_{11} = \frac{1}{2}[(1 + e^f_1)^2 - 1], \qquad (2.2.11b)$$

对 S'_{22} 和 S'_{33} 可以得到类似的表达式．我们将在下面讨论一种极限情况下，关于 $S'_{ij}(i\neq j)$ 的意义．

在上面推导中，没有对 P 和 Q 的位移大小作出限制，因此形变 $\mathscr{D}$ 可以是有限大的，应变 S' 也可以是有限大的．一般声波所引起的实际形变却是非常小的，这时位移梯度也非常小，即

$$|u_{i,j}|\ll 1 .$$

这样，在式(2.2.11)中，相对于位移梯度的一次项，可以忽略二次项 $u_{k,j}u_{k,i}$，于是 S'_{ij} 线性化为

$$S_{ij}\equiv\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}) \quad . \tag{2.2.12}$$

S_{ij} 为无限小应变分量，直称应变分量．应变 S 是个张量，表面看有 9 个分量，但由于

$$S_{ij}=S_{ji}, \tag{2.2.13}$$

实际上只有 6 个独立分量．由式(2.2.11)容易看出，如果令无限小形变时的 e'_i 为 e_i，沿 x_i 轴线元的单位长度伸长即为

$$e_1=S_{11},\quad e_2=S_{22},\quad e_3=S_{33}, \tag{2.2.14a}$$

即

$$S_{11}=e_1,\quad S_{22}=e_2,\quad S_{33}=e_3. \tag{2.2.14b}$$

由此，S_{11} 等具有直接的几何意义．随之容易证明，形变时单位体积的体积增量(或称膨胀)，是

$$\Delta=S_{11}+S_{22}+S_{33}=S_{ii}. \tag{2.2.15}$$

现在来分析 $S_{ij}(j\neq i)$ 具体含意．设形变前线元 $\overline{PQ}$ 并不平行于 x_i 轴中的一个，而是取空间任意方向，如图 2.2.5(a)所示．P'，Q' 仍分别为变形后 P，Q 点的新位置．令 $\overline{PQ}$ 沿 x_2 方向的分量为 $\overline{PQ_2}$，沿 x_3 方向的分量为 $\overline{PQ_3}$，并设变形后 Q_2 移到 Q'_2，Q_3 移到Q'_3．这些点一并画在图(a)．考虑所有这些点在(x_2,x_3)平面上的投影，示于图(b)，字母上的～号表示与图(a)中相对应的点．为便于比较，我们不考虑 P 点到 P' 点的移动，于是可以把 $\tilde{P}'$ 点搬到 $\tilde{P}$ 点，这时 $\tilde{Q}'$，$\tilde{Q}'_2$，$\tilde{Q}'_3$ 相随搬来，如图(c)所示．从图看出，原来的矩形面元 $\tilde{P}\tilde{Q}\tilde{Q}_2\tilde{Q}_3$ 变形为平行四边形面元 $\tilde{P}'\tilde{Q}'\tilde{Q}'_2\tilde{Q}'_3$．如果我

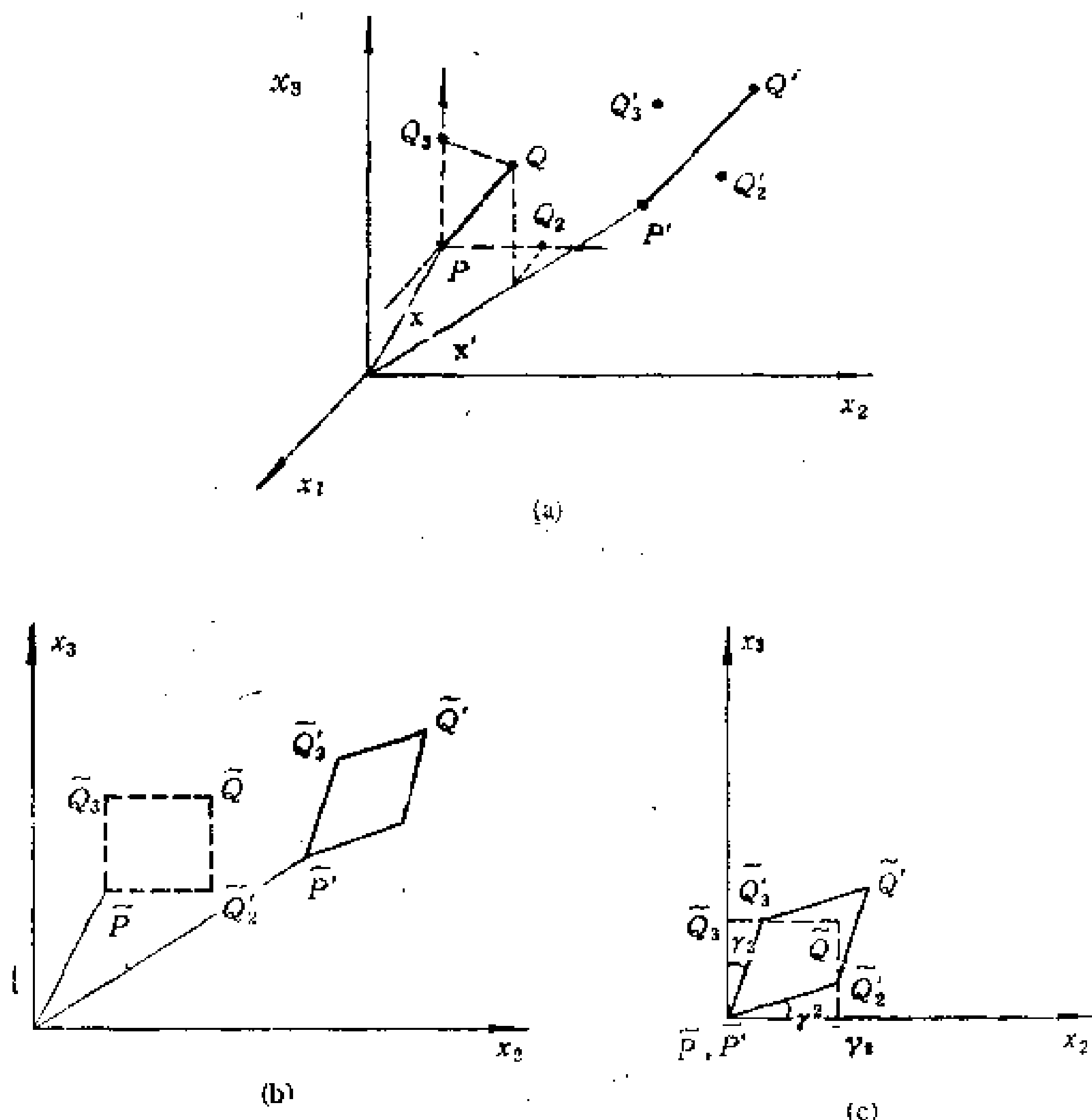


图2.2.5 介质变形中的一般应变和切应变部分

们类似式(2.2.7)那样作些定量计算，并同样忽略 $u_{i,j}$ 的二次以上项，可以证明，图(c)中的角 $\gamma_2=\gamma_3=2S_{23}$. 这里的形变是由于线元的滑动或剪切，所以 S_{23} 称为切应变. 同样的分析可以说明，其它的 $S_{ij}(j\neq i)$ 都有同样的性质.

对于图 2.2.5(a) 中线元 $\overline{PQ}$ 和线元 $\overline{P'Q'}$ 的关系，利用下面的式(2.2.17)可以证明，由于形变，$\overline{PQ}$ 的单位长度伸长（参看图 2.2.4)是

$$e=\frac{|d\mathbf{x}'|-|d\mathbf{x}|}{|d\mathbf{x}|}=\frac{|d\mathbf{u}+d\mathbf{x}|-|d\mathbf{x}|}{|d\mathbf{x}|}=S_{ij}l_il_j, \qquad (2.2.16)$$

式中 l_i 是 $\overline{PQ}$ 的方向余弦. 显然，式(2.2.14a)是本式的特例.

让我们回到式(2.2.8)和有关的图2.2.4.如前述，这个式所给出的量 $d\mathbf{u}(\mathbf{x})$ 不宜于用来定义纯形变，但它是实际发生的量，是由于变形而出现的 P 点对 Q 点的相对位置之改变. 现在我们来看，从纯形变的角度看，它究竟还包含其它什么意义. 按式(2.2.8)，

$$du_i(\mathbf{x}) = u_i(\mathbf{x}+d\mathbf{x}) - u_i(\mathbf{x}),$$

用泰勒级数展开，得到

$$du_i(\mathbf{x}) = u_{i,j}\,dx_j + O(dx_i dx_j).$$

这里 $u_{i,j}$ 同前面一样是 P 点的值. 对所讨论的无限小形变的情况，Q 点无限靠近 P 点，因此可忽略 $O(dx_i dx_j)$ 项，而有

$$du_i(\mathbf{x}) = u_{i,j}\,dx_j, \tag{2.2.17}$$

这可写作

$$\begin{aligned} du_i(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})\,dx_j + \frac{1}{2}(u_{i,j}-u_{j,i})\,dx_j \\ &= S_{ij}\,dx_j + \omega_{ij}\,dx_j, \end{aligned} \tag{2.2.18}$$

式中

$$\omega_{ij} \equiv \frac{1}{2}(u_{i,j}-u_{j,i}), \quad i,j=1,2,3. \tag{2.2.19}$$

容易看出，

$$\omega_{ii} = 0, \tag{2.2.20a}$$

$$\omega_{ij} = -\omega_{ji}, \quad j \neq i, \tag{2.2.20b}$$

因此 ω_{ij} 实际上只有三个独立分量. 式(2.2.18)中，S_{ij} 源于纯形变，下面来考察 ω_{ij} 代表哪一种变形.

根据前面的讨论，如果物体单纯作刚性转动，$S_{ij}=0$，因此 ω_{ij} 很可能和纯刚性转动有关. 令 ω_{ij} 的三个独立分量为

$$\omega_1 = \omega_{32} = -\omega_{23}, \tag{2.2.21a}$$

$$\omega_2 = \omega_{13} = -\omega_{31}, \tag{2.2.21b}$$

$$\omega_3 = \omega_{21} = -\omega_{12}, \tag{2.2.21c}$$

由此 $(\omega_1,\omega_2,\omega_3)$ 可以用轴矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 来表示. 在无限小刚性转动时，式(2.2.18)可写成

$$d\mathbf{u} = \boldsymbol{\omega} \times d\mathbf{x} \tag{2.2.22}$$

这里的"×"是矢量积．由此看出，ω_i 是绕坐标轴 x_i 的无限小旋转角，即 ω_{ij} 代表刚性转动．

简单地归结以上的讨论，可以知道，介质在受力作用时，一般发生刚性转动和纯形变，外加平行移动．在无限小形变的情况，刚性转动由 $\boldsymbol{\omega}$ 计量，$\boldsymbol{\omega}$ 的三个分量由式 (2.2.21) 和式 (2.2.19) 给出；纯形变由

$$\mathscr{D}=2S_{ij}dx_i dx_j$$

计量，其中应变分量 S_{ij} 由式(2.2.12)给出．下面将看到，S_{ij} 是很基本的量．

2.2.3 应力与应变的关系：弹性常数

对声波来说，介质中有主要影响的作用力是面力，或更准确些，是(无限小)应力，因此，主要考虑的是形变，或更具体些，是(无限小)应变．应力产生应变，或应变产生应力，二者之间应当有一定量的关系，这个关系对不同的介质是不同的．Hooke 根据实验结果，发现了众所熟知的胡克定律 $T_{11}=ES_{11}$，E 是杨氏模量，这说明应力与应变之间有线性关系，虽然比例常数因介质而异．胡克定律涉及的介质是各向同性的，样品是一维的，但人们从实验证明，线性关系存在于更普遍的情况，即介质可以是各向异性的，样品可以是多维的，只要应力和应变足够小．我们可以这样来推导应力和应变间的线性关系：假设未形变时介质内无应力，则应力 T_{ij} 和应变 S_{ij} 有关系

$$T_{ij}=T_{ij}(S_{ij}).$$

如果把式的右边用级数展开，并忽略 S_{ij} 的二次以上项，即得到

$$T_{ij}=c_{ijkl}S_{kl}. \tag{2.2.23}$$

就是说，T_{ij} 和 S_{kl} 有线性关系，其比例常数是 c_{ijkl}，因介质而异．这个关系也可以写成

$$S_{ij}=s_{ijkl}T_{kl}, \tag{2.2.24}$$

比例常数现在是 s_{ijkl}．式(2.2.23)或式(2.2.24)是广义的胡克定律，在足够小的应力或应变范围内，它们已为实验所广泛证实．服

从式(2.2.23)或式(2.2.24)的介质称弹性介质，c_{ijkl} 和 s_{ijkl} 都称弹性常数．顺便指出，由于 $S_{ij}=(u_{i,j}+u_{j,i})/2$，式(2.2.23)可以写作

$$T_{ij}=c_{ijkl}u_{k,l}. \tag{2.2.25}$$

如果 S_{ij} 或 T_{ij} 不是无限小，依据其大小可能需要保留 S_{ij} 或 T_{ij} 的二次或更高次项，这时另有高阶的弹性常数，但对一般的声波，我们将忽略它们．

为了区别两种弹性常数，常称 c_{ijkl} 为弹性劲度，s_{ijkl} 为弹性顺度．表面看它们各有 81 个独立量．但是，由于 $T_{ij}=T_{ji}$ 和 $S_{ij}=S_{ji}$，其独立量的数目往往低于 81 个．以 c_{ijkl} 为例，

$$c_{ijkl}=c_{jikl}=c_{ijlk}, \tag{2.2.26}$$

它们各自的数目由 81 减为 36．又可证明，若

$$c_{ijkl}=c_{klij}, \tag{2.2.27}$$

独立量数目又可减到 21．证明如下：弹性物体在应变经受微小变化 dS_{ij} 时，单位体积的应变能或称应变能密度 U 的变化量是

$$dU=T_{ij}dS_{ij}=c_{ijkl}S_{kl}dS_{ij},$$

所以，

$$\frac{\partial U}{\partial S_{ij}}=c_{ijkl}S_{kl}.$$

随之，

$$\frac{\partial^2 U}{\partial S_{ij}\partial S_{kl}}=c_{ijkl}. \tag{2.2.28}$$

由于 U 是单值函数，上式中微分的次序是可以交换的，因而

$$c_{ijkl}=c_{klij}.$$

顺便指出，根据上面的一些公式，U 可写作

$$U=\frac{1}{2}c_{ijkl}S_{ij}S_{kl}=\frac{1}{2}T_{ij}S_{ij}, \tag{2.2.29}$$

同时，

$$\frac{\partial U}{\partial S_{ij}}=T_{ij} \tag{2.2.30}$$

弹性常数有 21 个之多，这是指最一般的情况，这时弹性介质有最大程度的各向异性．在通常情况，介质的结构，从各向异性的角度讲，或多或少地具有对称性．就固体来说，单晶有 7 个晶系，由于其对称程度不同，独立的弹性常数的数目分别如表 2.2.1 所示．表中有的晶系有两个数目，这决定于晶系内的晶类．

表 2.2.1　不同晶系的独立弹性常数

晶　　系	三 斜	单 斜	正 交	四 方	三角	六　角	立　方
独 立 数	21	13	9	7 或 6	7 或 6	5	3

各向同性固体　各向同性固体则只有两个独立的弹性常数，即 c_{1111} 和 c_{2332}，通常用符号 λ 和 μ 表示，称为拉梅(Lame′)常数，$\lambda = c_{1111} - 2c_{2332}$，$\mu = c_{2332}$．这时，广义的胡克定律为

$$T_{ij} = \lambda S_{kk}\delta_{ij} + 2\mu S_{ij}. \tag{2.2.31}$$

式中，如前面的式(2.2.15)一样，

$$S_{kk} = S_{11} + S_{22} + S_{33} = \Delta$$

是形变时单位体积的体积增量，即膨胀．由式(2.2.31)有

$$S_{ij} = \frac{\lambda\delta_{ij}}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}T_{kk} + \frac{1}{2\mu}T_{ij}, \tag{2.2.32}$$

而

$$T_{kk} = (3\lambda + 2\mu)\Delta. \tag{2.2.33}$$

由式(2.2.31)可以看出常数μ的性质．假设介质内只有简单的切应力，例如 T_{23}，它作用于一个单位立方体的四个面，如图 2.2.6 所示，则相应的形变，按式(2.2.31)为切应变$S_{23} = T_{23}/2\mu$．在弹性力学中，通常定义剪切模量或刚性模量为(切应力)/(切应变)，而切应变[参看图 2.2.5(c)]是$r_2 + r_3 = 2S_{23}$，即图 2.2.6 中的 r．所以，μ 正是通常的剪切模量．至于常数 λ，它不对应于弹性力学中所定义的任何弹性模量，但和 μ 一起，与通常的杨氏模量 E、泊松比 ν、体积弹性模量 B 有下列关系：

$$E=\frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}, \tag{2.2.34}$$

$$\nu=\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}, \tag{2.2.35}$$

$$B=\lambda+\frac{2}{3}\mu \tag{2.2.36}$$

于是，

$$\lambda=\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \tag{2.2.37a}$$

$$\mu=\frac{E}{2(1+\nu)}. \tag{2.2.37b}$$

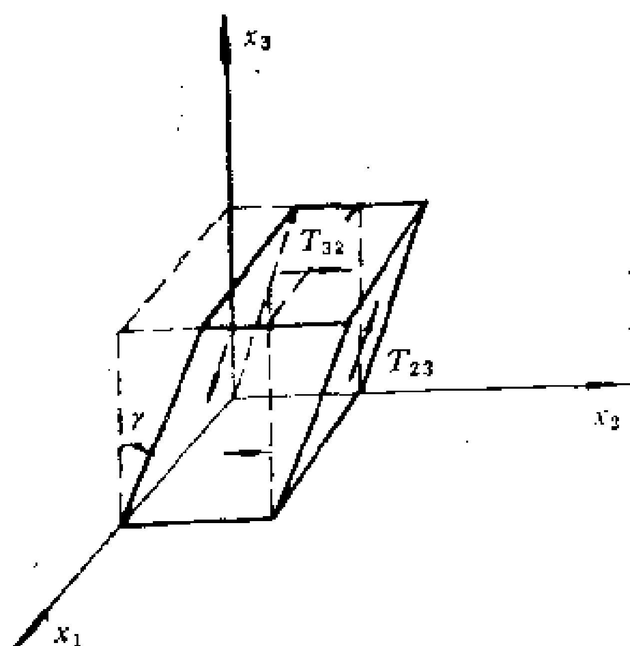


图2.2.6 从简单剪切看常数μ的性质

流体 包括液体和气体的流体，虽然在流体力学中有时看作是不可压缩的，但在声学中均看作弹性介质。流体一般都是各向同性的，在声学中，流体又常看作是理想的，以至流体内不存在任何切应力，而只有法向应力。这时，

$$T_{ij}=-P\delta_{ij}, \tag{2.2.38}$$

P是流体内的总压强，是个面力．在这种理想情况下，只有一个弹性常数，它定义为

$$B=\frac{P}{-\Delta}, \tag{2.2.39}$$

即式(2.2.36)中的B，此时$\lambda=B$，$\mu=0$。

更接近实际一些的流体模型，是具有粘滞性的流体．在粘滞性流体中，粘滞应力和压强同时作用于质点，不过粘滞应力不是和应变有比例关系，而是和应变的时间率成正比，或者说和质点速度的空间梯度成正比．如果令v_i为质点的速度分量，则对于粘滞效应，可以导出类似于式(2.2.31)的应力和应变时间率之间的关

系:

$$T'_{ij} = \lambda' e_{kk}\delta_{ij} + 2\mu' e_{ij}. \tag{2.2.40}$$

式中，T'_{ij} 指粘滞应力，而

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}) . \tag{2.2.41}$$

现在，类似于各向同性的固体，也有两个比例常数 λ' 和 μ'. μ' 是流体力学中常用的粘滞系数，或称剪切粘滞系数. μ'/ρ 常称粘滞率，ρ 是流体的密度. λ' 是第二个粘滞系数，它近似地可以忽略. 声学中常假设

$$\lambda' = -\frac{2}{3}\mu' ,$$

这时按式(2.2.40)，$\frac{1}{3}T'_{kk} = 0$，这等于假设由于粘滞作用的平均膨胀应力为零，而流体中只剩有 $-P = \frac{1}{3}T_{kk}$.

缩写下标 弹性常数 c_{ijkl}，以及对应的 s_{ijkl}，有4个下标，写起来颇为麻烦. 恰巧

$$c_{ijkl} = c_{jikl} = c_{ijlk}, \quad s_{ijkl} = s_{jikl} = s_{ijlk}$$

这样可以按下列规定把下标数缩写成2个. 令

$$c_{ijkl} = c_{qr} \qquad i,j = 1,2,3, \tag{2.2.42a}$$
$$q,r = 1,2,3,4,5,6.$$

式中

$$q = i \qquad \text{如果 } i = j,$$
$$= m + 3 \qquad \text{如果 } i \neq j \text{ 而 } m = 1,2,3 \neq i \neq j. \tag{2.2.42b}$$

r 同 k、l 有同样关系. 对 s_{ijkl}，令

$$s_{ijkl} = s_{qr} \qquad \text{当 } i = j, k = l,$$
$$= \frac{1}{2}s_{qr} \qquad \text{当 } i = j, k \neq l,$$
$$= \frac{1}{4}s_{qr} \qquad \text{当 } i \neq j, k \neq l, \tag{2.2.43}$$

q、r 取值如式(2.2.39b)所规定．式内引用因子$\frac{1}{2}$和$\frac{1}{4}$的原因，下面将谈到．

这种缩写下标的简写方法可以推广到 T_{ij} 和 S_{ij}．令

$$
\begin{aligned}
T_{ij} &= T_i \quad & \text{当 } i=j, \\
&= T_{m+3} \quad & \text{当 } i\neq j \quad \text{而 } m=1,2,3 \neq i\neq j\,.
\end{aligned}
\tag{2.2.44}
$$

$$
\begin{aligned}
S_{ij} &= S_i \quad & \text{当 } i=j, \\
&= \frac{1}{2} S_{m+3} \quad & \text{当 } i\neq j \quad \text{而 } m=1,2,3 \neq i\neq j.
\end{aligned}
\tag{2.2.45a}
$$

即对 S，

$$
\begin{aligned}
&S_1 = S_{11} \quad S_2 = S_{22} \quad S_3 = S_{33}, \\
&S_4 = 2S_{23} \quad S_5 = 2S_{13} \quad S_6 = 2S_{12}.
\end{aligned}
\tag{2.2.45b}
$$

在简写 S_{ijkl} 和 S_{ij} 时，有因子 $\frac{1}{2}$ 或 $\frac{1}{4}$ 出现，这是因为广义胡克定律用缩写记号表达时，形式比较整洁，即

$$T_q = c_{qr} S_r, \tag{2.2.46a}$$

$$S_q = s_{qr} T_r, \tag{2.2.46b}$$

$q,r=1,2,3,4,5,6$．从这两个式，容易得出

$$c_{qr} s_{rp} = 1 \qquad p\neq q, \tag{2.2.47a}$$

$$c_{qr} s_{rq} = 0. \tag{2.2.47b}$$

单位　按定义式(2.2.46)，并根据 T_q 和S_q 的各自单位，容易写出 c_{qr} 和 s_{qr} 的 单位，如表2.2.2所示．对实际固体材料，c_{qr} 的值一般以 $10^{10}\mathrm{N/m^2}$ 或 $10^{11}\mathrm{N/m^2}$ 来计量，s_{qr} 则一般以 $10^{-10}\mathrm{m^2/N}$

表 2.2.2　T_q，S_q，c_{qr} 和 s_{qr} 的单位

量	T_q	S_q	c_{qr}	s_{qr}
单　　位	Pa：$\mathrm{N/m^2}$	无	$\mathrm{N/m^2}$	$\mathrm{m^2/N}$

或 $10^{-11}\mathrm{m^2/N}$ 来计量．例如，金红石单晶的 c_{qr} 值是

$$c_{11}=26.60\times10^{10}\mathrm{N/m^2} \qquad c_{66}=18.86\times10^{10}\mathrm{N/m^2}$$

$$c_{33}=46.99\times10^{10}\mathrm{N/m^2} \qquad c_{12}=17.33\times10^{10}\mathrm{N/m^2}$$

$$c_{44}=12.39\times10^{10}\mathrm{N/m^2} \qquad c_{13}=13.62\times10^{10}\mathrm{N/m^2}$$

劲度特大的金刚石，其 c_{qr} 是

$$c_{11}=102\times10^{10}\mathrm{N/m^2},$$

$$c_{44}=49.2\times10^{10}\mathrm{N/m^2},$$

$$c_{12}=25\times10^{10}\mathrm{N/m^2},$$

其它某些固体的 c_{qr} 或 λ 与 μ 的值见附录 2-1.

§2.3 弹性介质中的质点运动方程和声波

明确了连续介质中的运动主体——质点，及面力随形变或质点位移的变化，我们就可以导出质点的运动方程，以及功率流．介质中质点的运动方式正是波动，本节进而讨论声波的概念和基本类型，讨论中忽略彻体力的影响且假定介质是各向同性的.

2.3.1 质点的运动方程

考虑介质的一个体积元，其体积为 δV，表面面积为 δS．牛顿定律给出

$$\int_{\delta V}\rho\ddot{u}_i\,dV=\int_{\delta V}f_i\,dV+\int_{\delta S}T_{li}\,dS, \qquad (2.3.1)$$

式中 $u_i(\mathbf{x},t)$ 是 $\mathbf{x}$ 处在时间 t 的质点位移分量，字母顶上的点表示时间微分，$f_i(\mathbf{x},t)$ 是彻体力分量，见式(2.2.1)，$T_{li}(\mathbf{x},t)$ 是沿 dS 法向作用于 dS 上的面应力分量，见式(2.2.2)．在§2.2中，我们一直没有提 u_i，f_i，T_{li} 等对时间的依赖性，实际上它们可以是时间的函数．介质密度 ρ 也可以是空间和时间的函数，虽然我们将假设它一般不是空间的函数，即假设介质是均匀的．利用式(2.2.3)

$$T_{li}=T_{ji}l_j,$$

l_i 是 dS 的法线方向余弦，以及数学中的散度定理，

$$\int_{\delta S} F_j l_j dS = \int_{\delta V} F_{j,j} dV,$$

得

$$\int_{\delta S} T_{li} dS = \int_{\delta S} T_{ji} l_j dS = \int_{\delta V} T_{ji,j} dV.$$

于是

$$\int_{\delta V} \rho \ddot{u}_i dV = \int_{\delta V} f_i dV + \int_{\delta V} T_{ji,j} dV,$$

$$\int_{\delta V} (T_{ji,j} + f_i - \rho \ddot{u}_i) dV = 0.$$

所以,对于任一个质点,有运动方程

$$\rho \ddot{u}_i = T_{ij,j} + f_i. \tag{2.3.2}$$

这个运动方程对任何弹性介质都是适用的，包括各种各向异性的固体介质,也包括流体. 式中没有考虑任何能量的损失.

2.3.2 能量守恒定理与功率流密度矢量

由于式(2.3.2)中没有考虑能量损失,我们现在来推导能量守恒原理. 考虑占体积 V、界面为 S 的物体. 开始时它没有任何形变,对这个物体内部的各个质点,式(2.3.2)是有效的. 对式的两边都乘以 $\dot{u}_i$,再对 V 作体积积分,即有

$$\int_V \rho \ddot{u}_i \dot{u}_i dV = \int_V \dot{u}_i T_{ji,j} dV + \int_V \dot{u}_i f_i dV. \tag{2.3.3}$$

按散度定理,

$$\int_V (\dot{u}_i T_{ij,j} + \dot{u}_{i,j} T_{ij}) dV = \int_S \dot{u}_i T_{ij} l_j dS,$$

于是式(2.3.3)可以写成

$$\int_V \rho \ddot{u}_i \dot{u}_i dV + \int_V \dot{u}_{i,j} T_{ij} dV = \int_S \dot{u}_i T_{ij} l_j dS + \int_V \dot{u}_i f_i dV. \tag{2.3.4}$$

容易看出，本式右边两项之和是作用于物体表面 S 的总面力和作用于物体体积内所有质点的总彻体力在时间 t 所作总功 $W(t)$ 的时间微分,即

$$\int_S \dot{u}_i T_{ij} l_j dS + \int_V \dot{u}_i f_i dV = \frac{d}{dt} W(t).$$

若ρ不是t的函数，或者近似地不是，由于

$$\rho \dot{u}_i \ddot{u}_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} \rho \dot{u}_i \dot{u}_i\right) = \frac{d}{dt} K(t),$$

$K(t)$是在时间t的单位体积介质的动能，即时间t的介质动能密度，式(2.3.4)左边的第一项是

$$\int_V \rho \dot{u}_i \ddot{u}_i dV = \frac{d}{dt}\int_V K\, dV = \frac{d}{dt} K_V(t),$$

$K_V(t)$是体积为V的物体在时间t的动能. 类似地，由于

$$\dot{u}_{i,j} T_{ij} = \frac{1}{2}(\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}) T_{ij} = \dot{S}_{ij} T_{ij}$$

$$= \frac{dU(t)}{dt},$$

$U(t)$是时刻t单位体积介质的应变能，即介质应变能密度. 式(2.2.29)曾给出

$$U(t) = \frac{1}{2} c_{ijkl} S_{ij} S_{kl},$$

可见式(2.3.4)左边的第二项是

$$\int_V \dot{u}_{i,j} T_{ij} dV = \frac{d}{dt}\int_V U\, dV = \frac{d}{dt} U_V(t),$$

$U_V(t)$是物体V在时间t的应变能. 因此式(2.3.4)表明

$$\frac{d}{dt} W(t) = \frac{d}{dt} K_V(t) + \frac{d}{dt} U_V(t),$$

或

$$W(t) = K_V(t) + U_V(t). \qquad (2.3.5)$$

因为已假设在$t=0$时物体无应变，这个公式正表示物体V中的能量守恒. 这里我们一开始假设了物体内部没有能量损耗，如果有的话，显然会在本式的右边多出一个能量损耗项.

如果V是介质内部的部分体积，它和外部的面力源无接触，不

受其直接激励，则作用于V的界面内侧质点的应力只是由于界面外侧质点的作用. 假设把$P(t)=\frac{d}{dt}W(t)$解释为外部力源所供给的功率，则式(2.3.4)应写作

$$P(t)=\frac{d}{dt}(K_V+U_V)+\int_S(-\dot{u}_i T_{ij})l_j dS \quad .$$

这个式表明，外源输入的功率一部分作为动能和弹性应变能储存在介质体积V内，一部分则通过V的界面S向外流出，沿dS法线方向流出的功率流密度是$-\dot{u}_i T_{ij}$. 在电磁学中有表达电磁功率流密度的坡印廷矢量$\mathbf{P}_{EM}$,

$$\mathbf{P}_{EM}=\mathbf{E}\times\mathbf{H},$$

$\mathbf{E}$,$\mathbf{H}$分别是电场和磁场的强度. 现在我们有力学的功率流密度矢量，写为

$$\mathbf{P}_A=-\dot{\mathbf{u}}\cdot\mathcal{T}=-\mathbf{v}\cdot\mathcal{T}. \tag{2.3.6}$$

象2.2.1曾经提到那样，$\mathcal{T}$是个二阶张量，符号"·"指$(-\mathbf{v}\cdot\mathcal{T})_j=(-v_i T_{ij})$，$\mathbf{v}=\dot{\mathbf{u}}$. 下面将证明，现在的质点运动正是波动. 因此$\mathbf{P}_A$可称为声学的波印廷矢量. 可注意的是，由于在本节推导中引用了$S_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})$，我们已经采用了无限小形变的假设.

2.3.3 波动和声波

再回到介质质点的运动方程

$$\rho\ddot{u}_i=T_{ij,j}+f_i,$$

我们来看一下它代表了怎样一种运动方式. 在此之前，我们首先把式(2.3.2)写成另一种形式，由广义胡克定律(2.2.23)和式(2.2.12)，式(2.3.2)可改写为

$$\rho\ddot{u}_i=c_{ijkl}u_{k,jl}+f_i, \tag{2.3.7}$$

由于式中只含位移u_i，所以又可称为位移运动方程，与此相对照，运动方程(2.3.2)称为应力运动方程.

各向同性介质　为了回避赘长的列式，我们将只限于分析各

向同性介质中的波动．前面曾提到，对这种介质，只有两个独立的弹性系数，拉梅常数 λ 和 μ．为导出位移运动方程，也可以直接运用式(2.2.31)

$$T_{ij}=\lambda S_{kk}\delta_{ij}+2\mu S_{ij},$$

注意到 $S_{kk,j}\delta_{ij}=u_{k,ki}$，可得各向同性介质的质点位移运动方程

$$(\lambda+\mu)u_{j,ji}+\mu u_{i,jj}+f_i=\rho\ddot{u}_i. \tag{2.3.8}$$

若用矢量符号和微分算子来表达，这个式可以写为

$$(\lambda+\mu)\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u})+\mu\nabla^2\mathbf{u}+\mathbf{f}=\rho\ddot{\mathbf{u}}, \tag{2.3.9a}$$

或

$$(\lambda+2\mu)\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u})-\mu\nabla\times\nabla\times\mathbf{u}+\mathbf{f}=\rho\ddot{\mathbf{u}}. \tag{2.3.9b}$$

因为

$$\nabla^2\mathbf{u}=\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u})-\nabla\times\nabla\times\mathbf{u},$$

在下面分析中，我们将设彻体力 f 为常数，并取常数为零．彻体力也会引起波动，它也是很重要的声源；本章忽略了它，只是由于篇幅的限制．

我们先讨论两个特殊情况，然后在它们所得结果的基础上，来讨论一般情况．第一个情况，设

$$\nabla\times\mathbf{u}=0, \tag{2.3.10}$$

这时 u 称为无旋矢量，因为按式(2.2.21)和(2.2.19)，有

$$\boldsymbol{\omega}=\frac{1}{2}\nabla\times\mathbf{u}, \tag{2.3.11}$$

而 ω 是无限小旋转角．由式(2.3.9b)，有

$$\ddot{\mathbf{u}}=\frac{\lambda+2\mu}{\rho}\nabla^2\mathbf{u}$$

$$=c_d^2\nabla^2\mathbf{u}, \tag{2.3.12}$$

这个式是熟知的波动方程，波的传播速度是

$$c_d=\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}, \tag{2.3.13}$$

现在的波可理解地称为无旋波．膨胀

$$\Delta\equiv S_{kk}=\nabla\cdot\mathbf{u}. \tag{2.3.14}$$

也满足波动方程，即

$$\ddot{\Delta}=c_d^2\nabla^2\Delta, \tag{2.3.15}$$

因此现在的波又称膨胀波，有时称压缩波．在这种波里，只有膨胀变化即体积变化，包括伸长和切变，而没有旋转．

第二种情况，设

$$\nabla\cdot\mathbf{u}=0, \tag{2.3.16}$$

这时 u 是螺旋矢量．代入式(2.39a)．仍设 $f_i=0$，得

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{u}}&=\frac{\mu}{\rho}\nabla^2\mathbf{u}\\&=c_s^2\nabla^2\mathbf{u},\end{aligned} \tag{2.3.17}$$

它也是标准的波动方程，波的传播速度是

$$c_s=\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}. \tag{2.3.18}$$

因为现在

$$\Delta=\nabla\cdot\mathbf{u}=0,$$

所以这种波称为不变体积波．因为只含切变，也称剪切波．又因为 $\omega=\frac{1}{2}\nabla\times\mathbf{u}$ 也满足方程

$$\ddot{\omega}=c_s^2\nabla\omega, \tag{2.3.19}$$

这种波还称为旋转波．

在这两种特例($\nabla\times\mathbf{u}=0$, $\nabla\cdot\mathbf{u}=0$)的基础上，我们来看一般的情况．在 $\nabla\times\mathbf{u}=0$ 的特例中，可以取 $\mathbf{u}=\nabla\varphi$，φ 是时间和空间的标量，因为 $\nabla\times\nabla\varphi=0$．同样，在 $\nabla\cdot u=0$ 的特例中，可以取 $\mathbf{u}=\nabla\times\psi$，$\psi$ 是矢量，因为 $\nabla\cdot\nabla\times\psi=0$．在一般的情况，我们取

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},t)=\nabla\varphi(\mathbf{x},t)+\nabla\times\psi(\mathbf{x},t). \tag{2.3.20}$$

容易看出，上式满足 f 为零的式(2.3.9a)．如果

$$\nabla^2\varphi=\frac{1}{c_d^2}\ddot{\phi}, \tag{2.3.21}$$

$$\nabla^2\psi=\frac{1}{c_s^2}\ddot{\psi}, \tag{2.3.22}$$

则这两个式又都是标准的波动方程．因此，在一般的情况下，介质中位移运动方程之解是两个波的叠加，一个是膨胀波，以波速c_d传播，另一个是不变体积波，以波速c_s传播．某些材料的c_d和c_s值见附录2-2．

值得指出，在式(2.3.20)中，左边的$\mathbf{u}$只有3个标量，而右边的φ和$\boldsymbol{\psi}$总共有4个标量，所以这4个标量中有一个不是独立的．为此，可以选取一个约束条件

$$\nabla\cdot\boldsymbol{\psi}=0, \tag{2.3.23}$$

这个条件称规范条件．

用φ和$\boldsymbol{\psi}$来表示，有

$$\Delta=\nabla\cdot\mathbf{u}=\nabla^2\varphi, \tag{2.3.24}$$

$$\boldsymbol{\omega}=\frac{1}{2}\nabla\times\mathbf{u}=\frac{1}{2}\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{\psi}\ . \tag{2.3.25}$$

弹性介质波可以统称为声波，包括超声波．目前还有把声波这名词限于指流体里的波，而称固体里的波为弹性波．其实固体里的波和流体里的波本质上完全相同，只不过在历史上各自的发展比较独立．现在，这两种波的研究和应用已越来越多地融汇在一起，特别是在超声学领域．

下面我们来看，流体里的波动只是上述波动的一个简单的特例．

理想流体　在理想流体里，剪切模量$\mu=0$，所有切应力为零．按式(2.2.38)

$$T_{ij}=-P\delta_{ij},$$

所以作用于任一质点的应力有完全的对称性．液体和固体有不同的处境：固体里原来的应力可以为零，而流体里总有不为零的静压强或平衡压强．在有外应力作用时，流体内部发生对平衡压强的压强偏离．令平衡压强为p_0，则

$$p=P-p_0, \tag{2.3.26}$$

p常称逾量压强或声压．p可以是空间和时间的函数，p_0则在时间和空间上是(或近似地是)常数．于是

$$T_{ji,j} = -p_{,j}\delta_{ij}$$

仍然忽略彻体力，应力运动方程(2.3.2)成为

$$\rho\ddot{u}_i = -p_{,i} \tag{2.3.27}$$

以上对一般弹性介质的讨论中，当从应力运动方程推导位移运动方程时，我们实际上引用了广义胡克定律，这里也需要引用关于流体的胡克定律．式(2.2.36)曾给出

$$P = -B\Delta,$$

B是体积弹性模量或压缩模量．利用关系式$\Delta = S_{ii} = u_{i,i}$，有

$$P = -Bu_{i,i}. \tag{2.3.28}$$

将本式与式(2.3.27)合并，得

$$\ddot{p} = \frac{B}{\rho}\nabla^2 p. \tag{2.3.29}$$

这代表以波速

$$c_L = \sqrt{\frac{B}{\rho}} \tag{2.3.30}$$

传播的压强波．容易看出，膨胀Δ也满足波动方程(2.3.29)．一些流体的声速值见附录2-3.

在声学文献中，为推导波动方程，常引用流体力学中通用的连续性方程或质量守恒定理

$$\nabla\cdot(\rho\mathbf{v}) = -\dot{\rho}, \tag{2.3.31}$$

式中$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}}$．如果相应于$P = p_0 + p$，我们把密度$\rho$分为

$$\rho = \rho_0 + \rho_e, \tag{2.3.32}$$

其中ρ_0是密度的平衡值，在空间和时间上是常数，ρ_e是密度随p而变化的部分．如果把流体的连续性表示为

$$\rho_0 V = (\rho_0 + \rho_e)(V + \delta V),$$

同时注意到$\delta V/V \ll 1$，$\rho_e/\rho_0 \ll 1$，以及$\Delta = \delta V/V$，我们可以导出式(2.3.31)．此外，可以看出，称为稠密的$s = \rho_e/\rho_0$也满足波动方程(2.3.29)．

如果考察u_i的时间空间变化，由式(2.3.27)和(2.3.28)得

$$\ddot{u}_i = c_L^2 u_{j,ji}, \tag{2.3.33}$$

这个式表面看不是波动方程．但假设我们取 $u_2=0$ 和 $u_3=0$，则有

$$\ddot{u}_1=c_L^2 u_{1,11}, \tag{2.3.34}$$

这恰恰是标量 $u_1(x_1,t)$ 的波动方程．这实际上反映了在流体里，由于 $\mu=0$，可以存在的声波是纵波．代替式(2.3.33)，我们可以写出更显示波动性质的表达式．由式(2.3.27)，有

$$\rho\ddot{\mathbf{u}}=-\nabla p, \tag{2.3.35}$$

对两边取旋量，并忽略小量的二次项，得

$$\rho_0\nabla\times\ddot{\mathbf{u}}=0,$$

或

$$\rho_0\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\mathbf{v})=0,$$

$\mathbf{v}$ 仍然是 $\dot{\mathbf{u}}$．这样，$(\nabla\times\mathbf{v})$ 对时间是常数．对于波动，我们感兴趣的只是随时间变化的量，因此，我们取这个常数为零．这样 $\mathbf{v}$ 是无旋矢量，可以写为

$$\mathbf{v}=\nabla\dot{\varphi}.$$

随之，$\mathbf{u}$ 可以写为

$$\mathbf{u}=\nabla\varphi. \tag{2.3.36}$$

由式(2.3.33)可以得出

$$\ddot{\varphi}=c_L^2\nabla^2\varphi, \tag{2.3.37}$$

它具有波动方程的形式．用位移势 φ 来表示，

$$p=-\rho\ddot{\varphi}, \tag{2.3.38}$$

$$\rho_e=-\frac{\rho}{c_L^2}\ddot{\varphi}. \tag{2.3.39}$$

在声学文献中，对流体里的声波，有时直接选取

$$\mathbf{v}=\nabla\Phi,$$

或

$$\mathbf{v}=-\nabla\Phi.$$

也有些关于固体声学的文献取

$$\mathbf{v}=\nabla\Phi+\nabla\times\mathbf{\Psi}.$$

§2.4 不同类型介质空间中的几种声波

在§2.3导出了弹性介质中质点受面力作用时的运动形式，即波动. 不论是什么样的弹性介质，当介质内的某个部分受面力时，就会发生形变. 由于这个部分同毗邻的部分通过界面相互作用，形变状态会传递给这毗邻的部分，而原来的部分将恢复到初始的无形变状态，形变状态由此顺序向前移动，穿越介质，这是任何弹性介质中声波的基本成因.

前面对介质所占据的空间并未作任何限制，即假设介质是无限大的. 实际介质自然不是无限大，但当介质足够大，以至在我们所观察的区域和时刻，介质界面对声波的影响可以忽略，我们仍可以说介质是无限大的. 在这样介质内部传播的声波，我们叫作体声波. 2.3.3曾证明，在无限大各向同性弹性介质中，只可能存在两种类型的声波，膨胀波和不变体积波，体声波一般是这两类波的组合. 在不同的激励条件下，这两类波可以有多种不同的空间分布，我们将在2.4.1对此有所讨论.

在许多实际情况下，介质所占据的空间是有限的，于是出现了介质的边界以及它的影响. 在介质的内部，声波仍是膨胀波和不变体积波的组合，但由于介质边界的影响，组合的或单类的声波会表现出特殊的形式和性质. 2.4.3节将讨论介质具有指定形状，形成"波导"的情况. 另一方面，在介质边界的本身，在单个介质的表面或两个介质的界面，可能存在与介质内部声波不同类型的波；2.4.2将介绍它们.

所有这些讨论，仍将主要限于各向同性的弹性介质.

当介质的体积有限，即存在边界的情况，则在计算具体声波的特征时，需要对波动方程施加边界条件. 实际上，即使不存在边界，也需要考虑初始条件，但本节将不包括对此的分析. 广义讲，初始条件也可看作时间域的边界条件. 边界条件可以分为三类，设讨论的是体积为V，边界为S的弹性体. 第一类边界条件给出初

始时间之后在 S 上位移的空间和时间函数．第二类边界条件给出初始时间之后在 S 上的应力函数．第三类边界条件则给出初始时间之后在 S 的一部分面上的位移函数以及在其它部分面上的应力函数．第三类边界条件因此称做混合边界条件．值得提出的是，在数学物理方法中，有规定待求量在边界上的值的条件，称 Dirichlet 条件，有规定待求量在边界上法向导数的值的条件，称 Neumann 条件，另有规定待求量在边界上的值和法向导数值的某个线性组合，称第三类条件．此外，还有 Cauchy 边界条件，它既规定了待求量在边界上的值，又规定它在边界上法向导数的值．

2.4.1 体声波

体声波指无限大介质内的声波．在前面 2.3.3 中对此已作过一些分析，这里不再讨论它的两个基本类型和基本性质．本节只介绍它们的几种简单的“波阵面空间分布”形式，即平面波，球面对称波，轴对称波几种形式．此外，将提一下最简单的随时间变化的形式，即相应波是时间的谐振波．

平面波　设 $u=u(x,t)$，试求一维波的方程

$$\ddot{u}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{2.4.1}$$

之解．众所熟知，这个式的通解是

$$u(x,t)=F_1(x-ct)+F_2(x+ct), \tag{2.4.2}$$

F_1 和 F_2 是任意函数，它们对各自的自变数 $x-ct$ 或 $x+ct$ 可微分．以 F_1 为例，时间 t 在 x 处出现的 F_1，在时间 $t+t_0$ 形状不变、量值不变地出现在 $x+ct$ 处．换言之，它描述了以速度 c 沿正 x 方向传播的波，F_2 则代表沿负 x 方向传播的波．任一波的自变量叫相位，F_1 的相位就是 $x-ct$．在同一时刻相位相同各点的轨迹叫波阵面或波前．F_1 或 F_2 所代表的波，其波阵面显然是个平面，这种波便称平面波．我们这里所谓“空间分布”实际上是指波阵面的空间形状．顺便指出，c 严格讲是相速．

在一般情况下，波的传播方向在三维空间可以是任意的，设其

方向余弦为 l_i;波动方程也是最一般的,即为式(2.3.20),(2.3.21)和(2.3.22). 这时式(2.3.21)有通解为

$$\varphi(x_i,t)=\varphi_1(x_il_i-c_dt)+\varphi_2(x_il_i+c_dt), \tag{2.4.3a}$$

而式(2.3.22)有通解为

$$\psi_j(x_i,t)=\psi_{j1}(x_il_i-c_st)+\psi_{j2}(x_il_i+c_st). \tag{2.4.3b}$$

位移的通解按式(2.3.20)由上两个解合成,

$$u_i=\varphi_{,i}+p_{ijk}\psi_{k,j}, \tag{2.4.4}$$

式中 p_{ijk} 为排列符号

$$p_{ijk}=\begin{cases}1 & \text{如果 } i,j,k \text{ 是 } 1,2,3 \text{ 的偶排列},\\ -1 & \text{如果 } i,j,k \text{ 是 } 1,2,3 \text{ 的奇排列},\\ 0 & \text{在其它情况}.\end{cases} \tag{2.4.5}$$

若转动坐标系,使新的 x_1' 轴和传播方向一致,并为简便起见,不计负向传播的波,则

$$\varphi(x_i',t)=\varphi(x_1'-c_dt), \tag{2.4.6a}$$

$$\psi_j(x_i',t)=\psi_j(x_1'-c_st). \tag{2.4.6b}$$

而

$$u_{1'}=\varphi'(x_1'-c_dt), \tag{2.4.7a}$$

$$u_{2'}=-\psi_3'(x_1'-c_st), \tag{2.4.7b}$$

$$u_{3'}=\psi_2'(x_1'-c_st). \tag{2.4.7c}$$

由此可见,三维情况的式(2.4.3)和(2.4.4)也代表平面波,不过这时一般有两个平面波,一个以声速 c_d 行进,另一个则以较慢的声速 c_s 行进. $x_il_i-c_dt$ 和 $x_il_i-c_st$ 是这两个波的相位,它们的波阵面分别是 $x_il_i-c_dt=$ 常数和 $x_il_i-c_st=$ 常数.

从式(2.4.7)又可看出,以声速 c_d 传播的平面波只有沿传播方向的位移分量 $u_{1'}$,而以较慢声速 c_s 传播的平面波只有与传播方向垂直的位移分量 $u_{2'}$, $u_{3'}$.前者是纵波,后者是横波. 在2.3.3节曾提到,以声速 c_d 传播的波是膨胀波,以声速 c_s 传播的波是不变体积波或剪切波,所以平面的膨胀波总是纵波,平面的不变体积波总是横波. 需要强调一下,这个结论只指平面波.

我们常把膨胀波叫P波,不变体积波叫S波. 这些名词是从

地震学中引用过来的．S 波又分为 SH 波和 SV 波．从式(2.4.7)看出，较慢的平面 S 波的两个位移分量，它们的偏振方向，一个沿 x_2' 轴，一个沿 x_3' 轴．如果其中一个轴是水平的，则另一个轴是垂直地面的(这时传播方向 x_1' 也是水平的)．这样，位移偏振方向为水平的波称 SH 波，位移偏振方向垂直地面的波称 SV 波．式(2.4.7)所表示的剪切波同时有两个位移分量，但也可以人为地产生只有一个位移分量的平面波，所以可以有纯 SH 波或纯 SV 波．若把地面作为标准面，则可以清楚地区分沿地面传播的地震波的 SH 分量或 SV 分量．在超声学中，波的传播方向就难得和地面有直接联系，水平或垂直是常以某个有关平面作参考的．SH 或 SV 不只是个几何问题，这两个剪切波的某些声学性能，主要是反射性能，有显著的差别，因此需要加以区别．

式(2.4.7)表明，在一般情况，介质内部可以传播偏振方向相互垂直的一个平面纵波和两个平面横波．这个公式讨论的是各向同性介质．可以提一下，在各向异性介质内部，一般也存在由偏振方向相互正交的三个波所组成的波系，但是它们常不是纯的纵波或纯的横波，而两个"准"横波的波速一般也不一样．这在本节后面还将简单说明．

球面波　由于边界条件的改变，在介质内部传播的波，不总是平面波．如果声源是平面的，或者在离声源很远的地方，声波大致是平面波．但如果，例如，声源是个球面或是个柱面，所产生的波显然不是平面波．硬要用平面波的概念来描叙这两种情况的声波，不是不可能的，但数学上将是很繁的．我们应当针对具体的边界条件，采取适当的坐标，来描叙实际的声场．到现在为止，我们一直采用直角坐标，

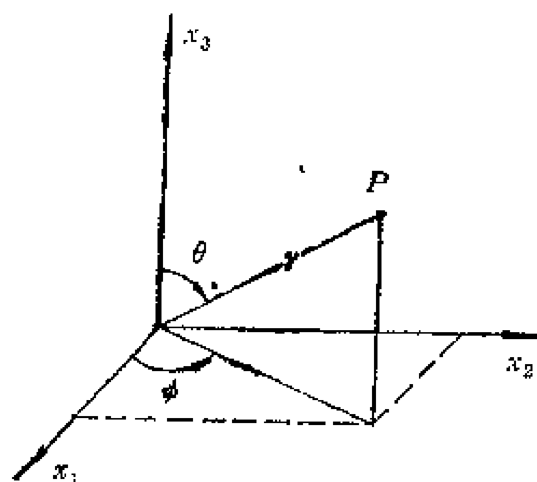


图2.4.1　球面坐标(γ,θ,ϕ)

现在让我们用球面(球极)坐标,如图 2.4.1 所示.

以位移标量势 φ 为例,现在有

$$\nabla\varphi = \hat{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} + \hat{\phi}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial\phi}, \tag{2.4.8}$$

$$\nabla^2\varphi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\phi^2}. \tag{2.4.9}$$

如果由于边界条件的性质,φ不依赖于角 θ 和角 ϕ,这个波叫球形对称波. 这时波动方程(2.3.21)成为

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) = \frac{1}{c_d}\varphi, \tag{2.4.10}$$

而

$$\varphi(r,t) = \frac{1}{r}[F_1(r-c_dt) + F_2(r+c_dt)], \tag{2.4.11}$$

F_1 是从坐标原点向外传播的波,F_2 则是由四周向坐标原点传播的波. 现在的等相面是球面.

在上面讨论平面波时,曾经提到,不变体积平面波是横波. 但不是所有的不变体积波都是横波;不变体积的球面波便不一定是在球面坐标,

$$\nabla\cdot\mathbf{u} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2u_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\, u_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\phi}{\partial\varphi}, \tag{2.4.12}$$

设 $\mathbf{u}=\mathbf{u}(r,t)$,但 $u_\theta\neq 0$. 这时

$$\nabla\cdot\mathbf{u} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2u_r) + \frac{1}{r}\cot\theta\, u_\theta. \tag{2.4.13}$$

$\nabla\cdot\mathbf{u}=0$,给出

$$\frac{\partial}{\partial r}(r^2u_r) = -r\cot\theta\, u_\theta. \tag{2.4.14}$$

可见,u_r 不一定为零,不变体积球面波有纵波部分.

轴对称波 在图2.4.2的柱面坐标中，

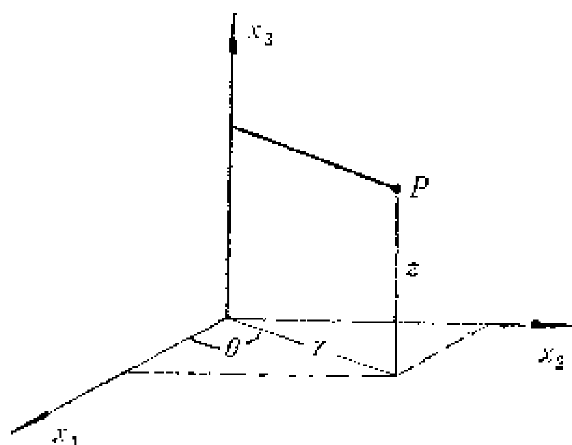


图2.4.2 柱面坐标(r,θ,z)

$$\nabla\varphi = \hat{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \hat{\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} + \hat{z}\frac{\partial\varphi}{\partial z}, \tag{2.4.15}$$

$$\nabla^2\varphi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}. \tag{2.4.16}$$

如果波不依赖于θ，则它是轴对称的．假设也由于边界条件的影响，还有更特殊的情况，即还有

$$\frac{\partial}{\partial z} = 0,$$

这时的波称圆柱型波．圆柱型波的位移只有u_r分量

$$u_r = \frac{\partial\varphi}{\partial r}, \tag{2.4.17}$$

而

$$\frac{1}{c_d^2}\ddot{\varphi} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right), \tag{2.4.18}$$

$\varphi(r,t)$的通解不像平面波或球面波那么简单．后面将举一个特殊例的通解．

时间谐振波 以上讨论的是几种波阵面空间形状不同的波．即使具有同一种波阵面的波，它也可以有种种色色随时间的变化，这是由边界条件所决定的．在随时间变化的方式上，时间简谐波是最常遇到的声波类型，它不仅出现在平面波、球面波等体声波，也出现在下面将讨论的表面声波和遵导声波．

再以φ为例，它常可分解为

$$\varphi(\mathbf{x},t) = \Phi(\mathbf{x})e^{-i\omega t}, \tag{2.4.19}$$

式中$\omega = 2\pi f$是角频率，f是谐振频率，这种波叫**时间谐振波**．把

式(2.4.19)代入 φ 的波动方程，容易得出

$$\nabla^2\Phi(\mathbf{x}) + k_d^2\Phi(\mathbf{x}) = 0, \tag{2.4.20}$$

式中

$$k_d = \frac{\omega}{c_d} \tag{2.4.21}$$

是波数. k_d 可以写作 $\frac{2\pi}{\lambda_d}$，λ_d 是波长，这个概念显然是从最基本的时间-空间正弦波或余弦波引伸来的. 波数 $k=\omega/c$ 普遍适用于声速为 c 的波. 习惯上取 $\mathbf{k}$ 为传播矢量，它的方向是波的传播方向. 方程(2.4.20)是确定 $\Phi(\mathbf{x})$ 的式，称亥姆霍兹方程。

当时间谐振波是平面波时，它的解足够简单，这里我们稍许讨论一下迄今常回避的各向异性介质问题，这时位移的解为

$$u_i(\mathbf{x},\mathbf{l},t) = \alpha_i \exp[ik(l_j x_j - ct)], \tag{2.4.22}$$

式中的 c 和 k 是待定的，是波传播方向 l_i 的函数，α_i 是 u_i 的幅值. 把上式代入一般介质的 $f_i=0$ 的位移运动方程(2.3.7)，

$$\rho \ddot{u}_i = c_{ijkl}\, u_{k,jl}, \tag{2.4.23}$$

得

$$(\Gamma_{il} - \delta_{il}\,\rho c^2)\alpha_l = 0, \tag{2.4.24}$$

其中

$$\Gamma_{il} = l_j l_k c_{ijkl}, \tag{2.4.25}$$

式 (2.4.24) 称Christoffel 方程，Γ_{il} 称 Christoffel 矩阵. 如要 α_l 不为零，式(2.4.24)中的系数行列式应为零，即

$$|\Gamma_{il} - \delta_{il}\,\rho c^2| = 0. \tag{2.4.26}$$

这个特征方程式是 c^2 的三次方程，它的三个根是介质中沿特定方向 $\mathbf{l}$ 三个体声波的波速平方. 前面在 2.3.3 曾经提到，在各向同性介质中，只有两种声波波速 c_d 和 c_s，但这里看到，在各向异性的一般情况，可以有三个波速. 当介质是各向同性时，三个便退化为两个. 从式(2.4.26)得出 c^2 的值后，便可由式(2.4.24)确定 α_l 的三个相对值. 在各向异性的一般情况，因此有三个声波，其中之一是准纵波，沿某些传播方向可以是正常的或纯的纵波，另两个是准

横波，它们的波速是不同的，沿某些传播方向可以是纯横波.

仍回到各向同性介质，关于时间谐振的圆柱型波 $\left(\frac{\partial}{\partial\theta}=0,\ \frac{\partial}{\partial z}=0\right)$，它的 $\Phi(\mathbf{r})$ 部分可由相应于波动方程(2.4.18)的亥姆霍兹方程求解得到. $\varphi(\mathbf{r},t)$ 的解为

$$\varphi(\mathbf{r},t)=\left[A(\omega)H_0^{(1)}\left(\frac{\omega r}{c_d}\right)+B(\omega)\,H_0^{(2)}\left(\frac{\omega r}{c_d}\right)\right], \quad (2.4.27)$$

式中 $H_0^{(1)}$，$H_0^{(2)}$ 分别是零阶的第一种和第二种汉克尔函数.

2.4.2 表面声波和界面声波

在介质的表面，可以产生沿表面传播，而幅度随深度迅速减弱的声波，它的传播速度也不同于体声波的 c_d 或 c_s，这种波称表面声波.这个问题最初是在对地震波的研究中提出的，J.W.S.Rayleigh 对常见的一种波得出了理论解释，因此这种波也叫瑞利波.（后来发现在不同条件下有另一些类型的地震波.）在超声学中，我们常采用瑞利波对各向同性固体材料的表面区进行检查和测量. 近廿年来，又利用瑞利波研制电子学微器件，极大地推进了瑞利波在各向异性介质中的理论和技术研究，本书第六章将专门讨论. 研究中还发现了其它类型的固体表面波，如在压电体表面的 BG 波，详见后面第六章.

介质表面可以看作介质和真空(空气)之间的界面，界面波不仅在这种特殊界面能够存在，而且在两种一般介质的界面，和其它很多情况，也能够存在，它们有类似表面波的特征，即除了以独特的速度沿界面传播外，也在两个介质中的一个或两个，幅度沿深度方向很快地减弱. 一个例子是固体如果和液体相接，界面上可以存在广义的瑞利波. 另一个例子是这时还可以存在所谓的 Stoneley 波. Stoneley 波在很特殊的条件下，可以在两种固体之间界面上产生.

下面将分别讨论瑞利波和广义瑞利波，以作表面波和界面波

的重要例子.

瑞利波　设介质表面是无限大平面，采用图 2.4.3 所示的直角坐标，x_1，x_2 坐标面便是介质的平表面. **k** 是波的传播矢，它的方向余弦是 $(l_1, l_2, 0)$. 我们将限于讨论沿表面传播的平面波，严格讲，这里平面

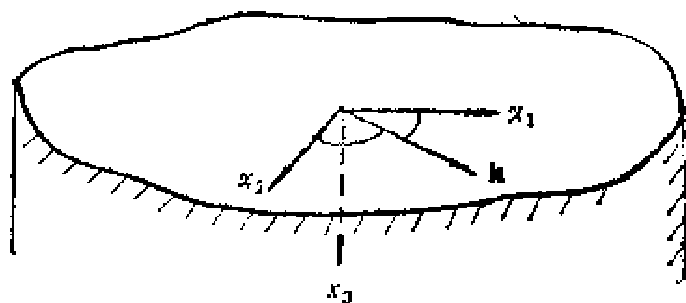


图2.4.3　介质表面的坐标系和表面波的传播矢 k

波的波阵平面只在横向是无限宽，在垂直的 x_3 方向却非常短，因为波是表面波，不是体波. 所以，通常说，波是直峰的. 再设波是时间谐振的，位移 $u_i(\mathbf{x}, \mathbf{l}, t)$ 于是可象式(2.4.22)那样写为

$$u_i(\mathbf{x}, \mathbf{l}, t) = \alpha_i \exp[ik(l_j x_j - ct)],$$

不过现在当 $x_3 \to \infty$，应有 $u_i \to 0$，因此写

$$u_i(\mathbf{x}, \mathbf{l}, t) = [\alpha_i \exp(ikl_3 x_3)]\exp[ik(l_1 x_1 + l_2 x_2 - ct)]. \tag{2.4.28}$$

Christoffel 方程(2.4.24)和特征方程(2.4.26)仍然适用. 特征方程

$$|\Gamma_{il} - \delta_{il}\rho c^2| = 0$$

原来是在给定 $l_i (i = 1, 2, 3)$ 的情况下 $(\Gamma_{il} = l_j l_k c_{ijkl})$ 用来确定 c^2，现在则改用来在 l_1，l_2 和 c^2 给定的情况下，确定 l_3. 特征方程给出 l_3 的六次方程. l_1 和 l_2 标志波在自由面上的传播方向，设为实数，则特征方程中 l_3 幂项的系数也都是实数，因此对每个 c 值，l_3 的 6 个根一般是 3 对复共轭数. 在这些根中，应当忽略负虚数的根，因为当 $x_3 \to \infty$，应有 $ikl_3 x_3 \to -\infty$. 于是在一般情况下，l_3 有 3 个正虚数的根 $l_3^{(n)}$，$(n = 1, 2, 3)$，而 u_i 是

$$u_i = \sum_{n=1}^{3} C_n \alpha_i^{(n)} \exp(ikl_3^{(n)} x) \exp[ik(l_1 x + l_2 x - ct)], \tag{2.4.29}$$

$\alpha_i^{(n)}$ 由 Christoffel 方程求得.

表面声波应当满足 $x_3=0$ 处的边界条件，这个表面是自由的，上面无作用力. 因此，边界条件为

$$\text{在 } x_3=0, \qquad \sigma_{3j}=c_{3jkl}\,u_{k,l}$$
$$=0, \tag{2.4.30}$$

从这些边界条件可以求解 C_n，从而可以确定 u_i。但这样做，不能随意取 c 的值，为此，对于任意的各向异性材料、传播表面取向和传播方向，需要找到一个使边界条件得到满足的 c 值，做法是用不同的 c 值进行搜索。

在各向同性的简单情况，前面(2.2.3 节)曾简略提到，

$$c_{11}=c_{22}=c_{33},$$
$$c_{12}=c_{21}=c_{13}=c_{31}=c_{23}=c_{32},$$
$$c_{44}=c_{55}=c_{66}=\frac{1}{2}(c_{11}-c_{12}), \tag{2.4.31}$$

采用上述步骤，可以证明，总有一个表面声波的解. 为不失普遍性，取 $l_1=1, l_2=0$，即设波沿 x_1 轴传播，可得

$$u_1=A[\exp(ik_R l_3^{(3)}x_3)-D\exp(ik_R l_3^{(2)}x_3)]\exp ik_R(x_1-c_R t), \tag{2.4.32a}$$

$$u_2=0, \tag{2.4.32b}$$

$$u_3=-iA\left[1-\left(\frac{c_R}{c_s}\right)^2\right]^{1/2}\left[\exp(ik_R l_3^{(3)}x_3)-\frac{1}{D}\exp(ik_R l_3^{(2)}x_3)\right]\times\exp ik_R(x_1-c_R t). \tag{2.4.32c}$$

这里分别用 $c_R, k_R=\omega/c_R$ 来表示满足条件的 c, k 值，

$$l_3^{(2)}=i\left[1-\left(\frac{c_R}{c_s}\right)^2\right]^{1/2}, \tag{2.4.33a}$$

$$l_3^{(3)}=i\left[1-\left(\frac{c_R}{c_d}\right)^2\right]^{1/2}, \tag{2.4.33b}$$

$$D=\left[1-\left(\frac{c_R}{c_d}\right)^2\right]^{1/4}\left[1-\left(\frac{c_R}{c_s}\right)^2\right]^{1/4}. \tag{2.4.33c}$$

c_R 由下式确定：

$$\left[2-\left(\frac{c_R}{c_s}\right)^2\right]^2=4\left[1-\left(\frac{c_R}{c_d}\right)^2\right]^{1/2}\left[1-\left(\frac{c_R}{c_s}\right)^2\right]^{1/2}, \tag{2.4.34}$$

这个式可写成

$$\left(\frac{c_R}{c_s}\right)^2\left[\left(\frac{c_R}{c_s}\right)^6-8\left(\frac{c_R}{c_s}\right)^4+8\left(3-2\frac{c_s^2}{c_d^2}\right)\left(\frac{c_R}{c_s}\right)^2 -16\left(1-\frac{c_s^2}{c_d^2}\right)\right]=0. \tag{2.4.35}$$

由此看出，c_R/c_s 有 3 个有用根，而它们是泊松比 ν 的函数，因为由式(2.2.35)，$\nu=\lambda/2(\lambda+\mu)$，而

$$\left(\frac{c_s}{c_d}\right)^2=\frac{\mu}{\lambda+2\mu}=\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}. \tag{2.4.36}$$

我们一直没有列入介质的吸收等效应，而波又是直峰的，因此表面波沿 x_1 方向不衰减.

可以证明，c_R 在 $0\leqslant\nu\leqslant\frac{1}{2}$ 的范围内只有一个正实数的解，且

$$0<c_R<c_s<c_d. \tag{2.4.37}$$

c_R/c_s 随 ν 的变化见图2.4.4.

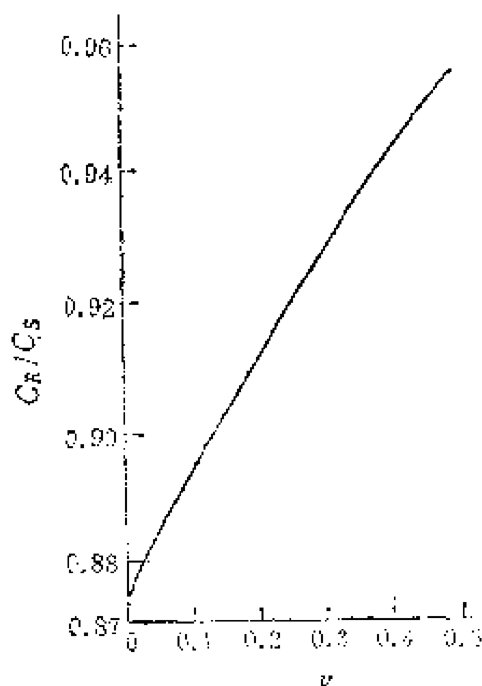


图2.4.4 各向同性介质表面瑞利波波速随介质泊松比的变化

从式(2.4.32)看出，瑞利波的质点位移局限在弧矢平面内，弧矢平面是指垂直于介质自由表面而包含传播方向的竖平面. 质点位移由一个平行于表面的分量和一个垂直于表面的分量组成. 在任意深度，质点呈椭圆运动，椭圆平面在弧矢平面内，椭圆的主轴垂直于介质表面，椭圆的形状随深度而变. 两个位移分量的幅值 U_1 和 U_3 随深度的变化一例见图2.4.5，图中 U_1 和 U_3 见下式：

$$u_1=U_1\sin k_R(x_1-c_Rt),$$

$$u_3 = U_3 \cos k_R (x_1 - c_R t) .$$

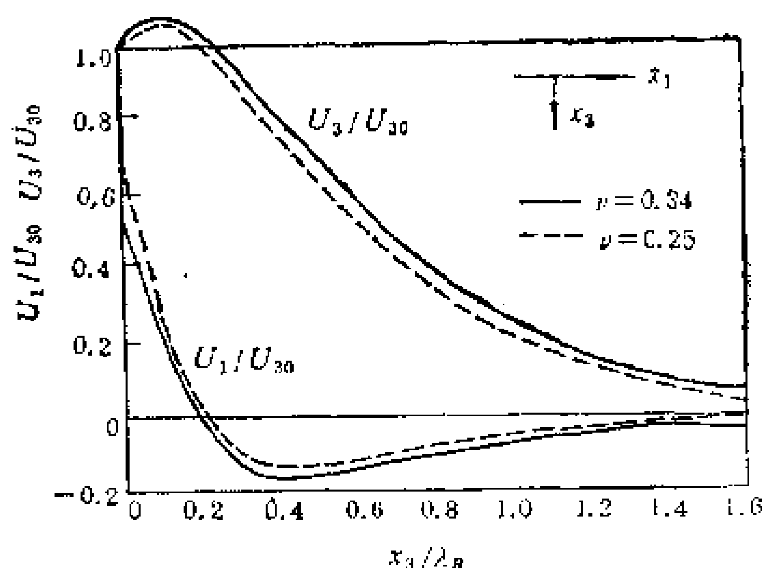


图2.4.5 各向同性固体中，平行于表面的位移分量幅值 U_1 和垂直于表面的位移分量幅值 U_3 随深度的变化；U_{30} 是 U_3 在自由面 $x_3=0$ 的值，λ_R 是瑞利波波长

水面上经常看到水表面波，这种波有时用来作为表面声波或声波的示范，图像生动、易懂，但这种波实质上不是声波. 在这种波里，促使水面恢复到水平面的力不是声波里起作用的介质弹性力，而是重力，或在短波情况，还加上表面张力. 水面重力波的波速约为1—10m/s，比表面声波的波速 c_R 要慢得多. 关于 c_R，以钢为例，泊松比为 $\nu=0.29$，从式(2.4.36)和(2.4.35)解得 $c_R=0.926c_s$，而钢的 c_s 约为 3,220 m/s.

广义瑞利波 设半无限大固体介质的平面表面上覆有半无限大流体介质，流体的密度和声速分别为 ρ' 和 c'，如图 2.4.6 所示. 固体设为各向同性的，其密度和两个声速如前分别为 ρ，c_d，c_s. 取直角坐标如图，界面平面为 $x_3=0$，固体里波的传播方向沿 x_1 轴. 推广瑞利波的概念，类比式(2.4.28)和(2.4.30)，固体里沿界面声波的位移可以写为

$$u_1 = \alpha_1 \exp(ikl_3x_3)\exp[ik(x_1-ct)], \qquad (2.4.38a)$$

$$u_2 = 0, \qquad (2.4.38b)$$

$$u_3 = \alpha_3 \exp(ikl_3x_3)\exp[ik(x_1-ct)], \qquad (2.4.38c)$$

这里 c，k，l_3 将根据新的边界条件另求. 液体里设同时存在沿

$(l_1', 0, l_3')$ 方向离开界面而传播的平面纵波. 用上标"'"来表示流

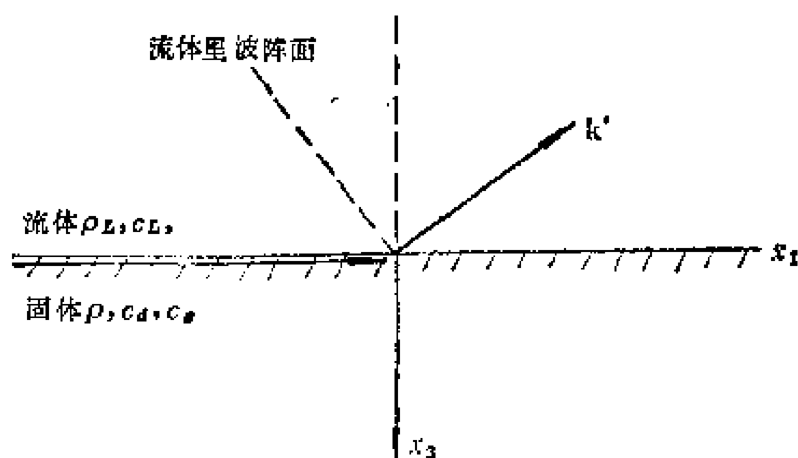


图2.4.6 固体流体界面的广义瑞利波

体中的诸量(密度和相速除外,它们分别写为 ρ_L 和 c_L),则

$$u_1' = \alpha_1' \exp[ik'(l_1' x_1 - l_3' x_3 - ct)], \qquad (2.4.39a)$$

$$u_2' = 0, \qquad (2.4.39b)$$

$$u_3' = \alpha_3' \exp[ik'(l_1' x_1 - l_3' x_3 - ct)]. \qquad (2.4.39c)$$

当固体上未有流体覆盖时,按式(2.4.30),表面上的边界条件是所有的应力分量为零. 现在则界面上的应力不是零,因为不再是自由的,但流体中只有法向应力,所以界面两侧的法向应力是连续的. 还有一个边界条件,即界面两侧的位移应是连续的. 满足这些边界条件,同样注意到固体一侧的波应满足当 $x_3 \to \infty$, $u_1, u_2 \to 0$ 的条件,并采用计算瑞利波时所用的步骤,可以得到这里的"广义瑞利波",它的波速为 c, 写为 c_{GR},由下式决定:

$$\left[2 - \left(\frac{c_{GR}}{c_s}\right)^2\right]^2 - 4\left[1 - \left(\frac{c_{GR}}{c_s}\right)^2\right]^{1/2}\left[1 - \left(\frac{c_{GR}}{c_d}\right)^2\right]^{1/2}$$

$$= -\frac{\rho_L}{\rho}\left(\frac{c_{GR}}{c_s}\right)^4\left[\frac{1 - (c_{GR}/c_d)^2}{1 - (c_{GR}/c_L)^2}\right]^{1/2}. \qquad (2.4.40)$$

比较确定瑞利波 c_R 的式(2.4.34),容易看出,上式只多右边的一项,而这项正比于 ρ_L/ρ. 当 $\rho_L \to 0$, $c_{GR} \to c_R$. 当 $\rho_L \neq 0$,上式给出一个 c_{GR} 的正实根,而

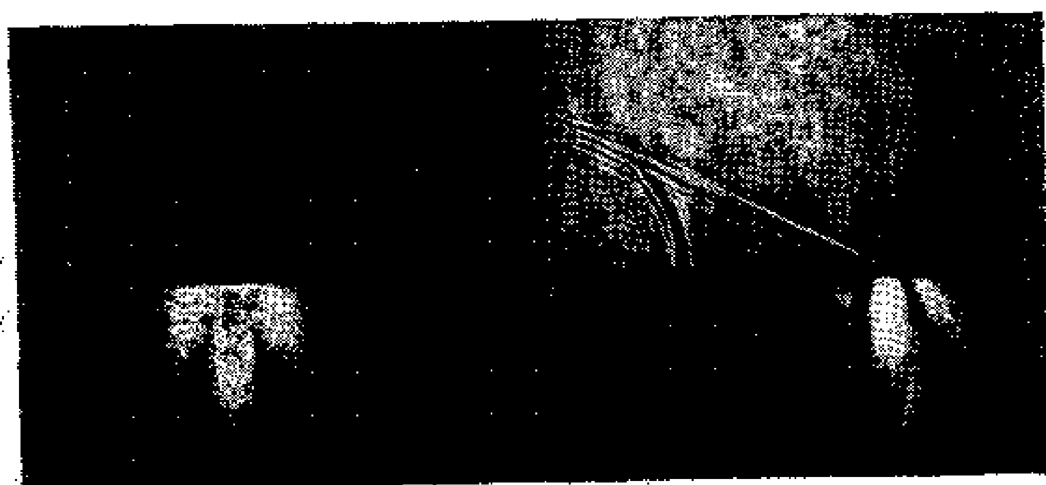
$$c_s > c_{GR} \gtrsim c_R. \qquad (2.4.41)$$

关于流体里的波,它的传播矢量 **k'** 满足

$$\hat{\mathbf{x}}_3 \times (\mathbf{k}' \times \hat{\mathbf{x}}_3) = \mathbf{k}_{GR}, \tag{2.4.42}$$

由此可以定出 k_1' 和 k_3'.

对照前面对瑞利波的讨论，可以看到，当固体介质上覆盖流体时，表面波（现在成为界面波）一边运行，一边向流体"漏"洩，它的能量因此不断损失，它的幅度逐渐衰弱. 广义瑞利波是漏波. 图2.4.7给出广义瑞利波的光弹照片.



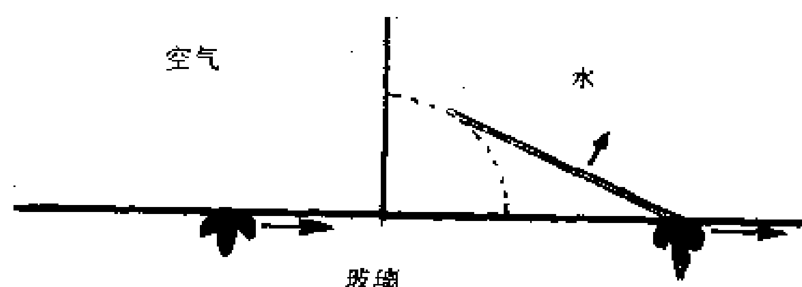


图2.4.7 广义瑞利波的光弹照片（中国科学院声学研究所超声传播组摄）

2.4.3 遵导声波

在2.3.3和2.4.1节中讨论体声波时，我们假设传播介质足够大，以至声源所发射的声波没有受到任何边界的干扰. 那里证明，在一般的固体里，有三种基本的声波波型；在各向同性固体里，三种波型简并为两种；在理想流体里，则只有一种. 在实际情况下，无疑会常遇到有限大的物体，这时边界对体内传播的声波会施加

影响，例如可能对声波反复反射．原始波和边界所产生的一些次级波相互干涉，有时形成似乎是新的类型的声波，具有自己的传播特征，但本质上它们还是膨胀波、不变体积波等基本类型体声波组成的．特别是对某些简单而标准形状的传播体，人们对体内传播的声波作了较多的研究，常用独特的方式加以描述，从而提出了一些新的分类．这些传播体的形状，既比较简单，易于数学处理，又是从日常用品中提炼出来的，例如钢材中常用的钢棒和钢板，因此棒内或薄板内声波的传播问题，便得到重视．另一方面，也有专为声学用途而选择的形状，这里的声学用途主要是指把声波导向指定的路径，类似通信中用波导来引导电磁波．例如，引导空气声的管道，引导表面声波的材料表面隆起．这些特殊形状材料中传播的声波称为導导声波．下面将分几个常见的形状，介绍其内部传播的声波．介绍中将限于讨论时间谐振波．按式(2.4.19)的形式，这种波在时间上是无始无终的，是连续波．与它相对应，有占时短促的脉冲波，我们将不讨论．只顺便指出，对连续波所得结果，按傅里叶级数的概念，可用于脉冲波的分析．

流体圆柱内的声波　流体圆柱如图 2.4.8 所示，设圆柱在长度方向仍是无限的，波是时间简谐的，又是轴对称的，$\frac{\partial}{\partial\theta}=0$．由式(2.4.16)，波动方程(2.3.37) $\ddot{\varphi}=c_L^2\nabla\varphi$ 在柱面坐标系中为

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=-\left(\frac{\omega}{c_L}\right)^2\varphi\ . \tag{2.4.43}$$

用分离变数法可以求得，$\varphi(r,z,t)$ 的解为

$$\varphi(r,z,t)=AJ_0(k_a r)e^{i\beta z}e^{-i\omega t}. \tag{2.4.44}$$

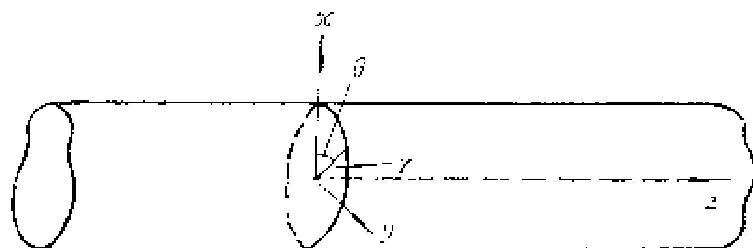


图2.4.8　圆柱波导及相应的柱面坐标

这里忽略了沿负 z 方向传播的波，A 是常数，k_a^2 是分离常数，是待定的，J_0 是零阶贝塞尔函数，

$$\beta^2=\left(\frac{\omega}{c_L}\right)^2-k_a^2=k_L^2-k_a^2, \tag{2.4.45}$$

β 是沿 z 方向的传播常数，c_L 是液体中纵波的相速，$k_L=\omega/c_L$. 于是由式(2.3.36) $\mathbf{u}=\nabla\varphi$ 有

$$u_r=\frac{\partial\varphi}{\partial r}=-k_a A J_1(k_a r)e^{i(\beta z-\omega t)}, \tag{2.4.46a}$$

$$u_z=\frac{\partial\varphi}{\partial z}=i\beta A J_0(k_a r)e^{i(\beta z-\omega t)}. \tag{2.4.46b}$$

为确定 k_a，需要引用圆柱面的边界条件，圆柱已假设为无限长，所以只有柱侧面的边界条件. 我们设柱侧面是刚性的，即

$$\text{在 } r=a \text{ 处，}\qquad v_r=\frac{\partial u_r}{\partial t}=0. \tag{2.4.47}$$

这代表内部充气体或液体的刚性壁圆管. 由式(2.4.46a)得

$$J_1(k_a a)=0,$$

即

$$k_a a=j_m,\qquad m=0,1,2,\cdots. \tag{2.4.48a}$$

j_m 是 $J_1(x)=0$ 的第 m 个根，

$$j_0=0,\quad j_1=3.83,\quad j_2=7.01,\ \cdots \tag{2.4.48b}$$

不同m的各解称为波导模式，简称模式. 每个模式有不同的 β，因为按式(2.4.45)，

$$\beta^2=\left(\frac{\omega}{c_L}\right)^2-\left(\frac{j_m}{a}\right)^2, \tag{2.4.49}$$

各个模式的 φ，u_r 和 u_z 也随之有不同的随 r 的分布. ω/β 是波沿管轴(z 轴)的相速 c_p，因此不同模式的相速不一样的. 由于 $\beta=\beta(\omega)$ (除 $m=0$ 的以外)，其它模式的相速都是频率的函数. 这是一个前面所未曾遇到的现象，我们称之为频散.

图 2.4.9 给出前三个模式的 φ 随 r 的分布，按式(2.3.38)，

$$p=-\rho\dot{\varphi}.$$

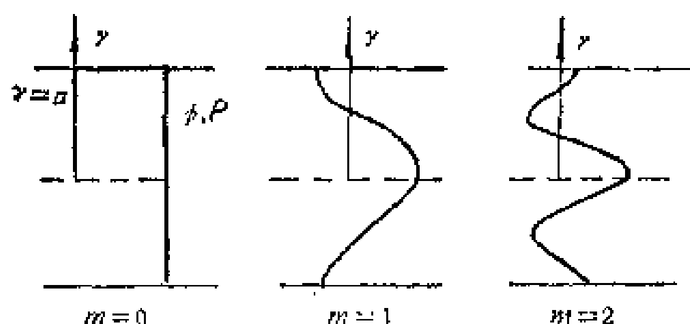


图2.4.9　刚性壁圆管中流体里三个模式的位移势和声压沿径向的分布

所以这些分布也是相应模式的声压分布．图 2.4.10 绘出这三个模式的 c_p/c_L 和 $\omega a/c_L$ 的关系曲线．图中同时给出了三个模式的群速 c_g 的曲线．在相速为频率函数的情况，一群频率稍许各异的波，在沿同一方向并进时，各自的传播速度会稍有不同．尽管如此，它们仍长时期配合，保持着由叠加而形成的一个峰包，这个峰包以一定的速度运行，这个速度便是波群的群速度 c_g．可以证明，

$$c_g=\left(\frac{d\beta(\omega)}{d\omega}\right)^{-1}，\quad (2.4.50)$$

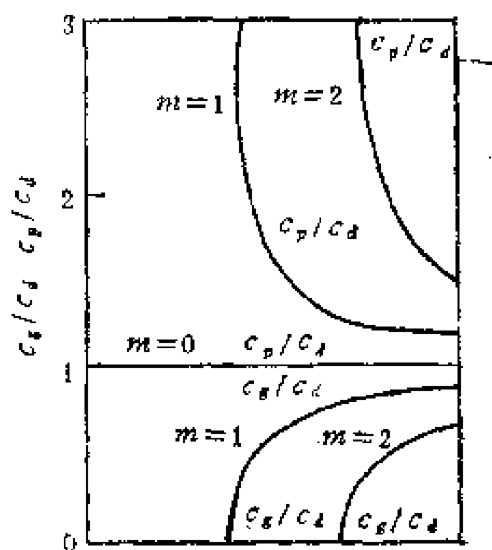


图 2.4.10　刚性壁圆管中流体里前三个模式的 c_p/c_L 和 c_g/c_L 随 $\omega a/c_L$ 的变化

群速也是频散波群的能流速度．由图 2.4.9 可以看出，对于一般的模式，有所谓截止频率，小于这个频率的模式沿 z 轴很快衰落，没有能量沿管轴传输，在这个频率，c_p 无限大．

频散和不同模式的声场分布各异，这两个现象是所有波导一般模式的特征，不限于圆柱波导，也不限于流体波导．表面看，模式就是正规的波，在文献中也常笼统地称为波．因此，波导中似乎出现了与无限大介质中纵波或横波不同类型的声波，但其实它们仍是由纵横这两种基本波组成的．以圆管内流体里的声波为例，管内仍只有普通的纵波，只是这些波现在对管轴是倾斜的，遇到管壁被斜反射，由此在管内曲折前进．我们在分析中着重沿着管轴

来观察它们的传播，从而看到它们具有不同于无限大介质中平面纵波的一些性质.

从这个意义讲，2.4.2节所讨论的端和波也是一个纵波和一个横波对着介质壁(自由表面)的投射，只不过这时入射方向是顺着壁(自由表面)，而且两个波的幅度都随深度而迅速减弱，因此两个波不会碰上任何对面的壁.

回到图2.4.8和2.4.9，可以看到，流体圆柱内的声压在管截面的分布一般不是均匀的，它沿管轴的相速一般也不是c_L. 但当ω很小，以至$\dfrac{\omega a}{c_L}<j_1=3.83$时，只有$m=0$的模式能存在，而这个模式是平面波，它沿管轴的相速$c_p$也正是无限大流体内纵波的相速$c_L$. 正因为如此，在讨论管中声波时，我们常把它看作是相速为c_L的平面波，这其实是有条件的.

固体圆柱内的声波 类似上面的分析可以用到各向同性的固体圆柱，但在固体情况，多出一个矢量势，因此数学处理烦杂些，结果也复杂些，对此我们不打算详论，只简单提及存在的几种模式(有的文献中直接叫波)： 有不依赖于θ的轴对称模式，其中又分$u_\theta=0, u_r\neq0, u_z\neq0$的"纵"或"膨胀"模式以及$u_r=0$，$u_z=0$，$u_\theta\neq0$的"扭转"模式；有更一般的$u_r\neq0, u_\theta\neq0$，$u_z\neq0$，且它们的幅度依赖于$r$和$\theta$的"弯曲"模式。每个模式又全是多"次"的，固体圆柱的柱面边界条件和流体的不同，一般是自由的，即应力为零.

还值得提一下，在各向同性固体圆柱内，有一个最简单的纵模式，在ω趋于零时，这个模式是沿柱轴传播的平面波，这类似于流体圆柱内$m=0$的模式。但细(相对于波长而言)固体圆柱内的平面纵波，它的沿轴相速不是无限大介质内的平面纵波相速$c_d=\sqrt{(\lambda+2\mu)/\rho}=\sqrt{E(1-\nu)/\rho(1+\nu)(1-2\nu)}$，而是

$$c_p=\sqrt{\frac{E}{\rho}}\leqslant c_d, \tag{2.4.51}$$

E和ν分别是前面提过的杨氏模量和泊松比. 式(2.4.51)是比较常用的，我们可以用很粗糙的近似方法来推导它. 当圆柱半径a

比传播波长非常小时，可以假设圆柱截面上应力是均匀的和完全轴向的，位移也是沿轴的，截面在运动时保持平面．我们来考虑图2.4.11中柱内厚度为δ_z的一小段固体．小段的运动方程为

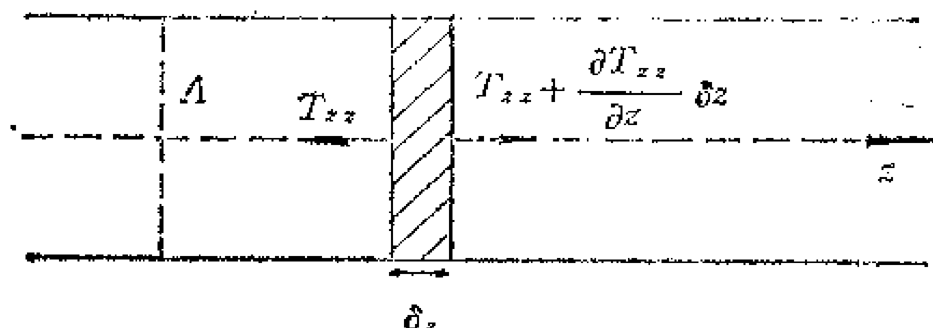


图2.4.11　各向同性固体圆柱内低频声波传播的近似理论

$$(\rho A\delta z)u_z = A(T_{zz,z}\delta z),$$

式中A是圆柱的截面面积，

$$T_{zz}=Eu_{z,z},$$

于是

$$u_z=\frac{E}{\rho}u_{z,zz},$$

即

$$c_p=\sqrt{\frac{E}{\rho}}\ .$$

显然，上述结果是近似的，由于固体内泊松比的存在，所讨论的小段内质点不可能不伴随有径向位移．

固体薄平板内的声波　除圆柱以外，另一个常见的波导是横向尺寸很大的薄平板．下面将简单地讨论板面自由各向同性的固体板，如图2.4.12所示．沿z轴传播的声波模式称为Lamb波．

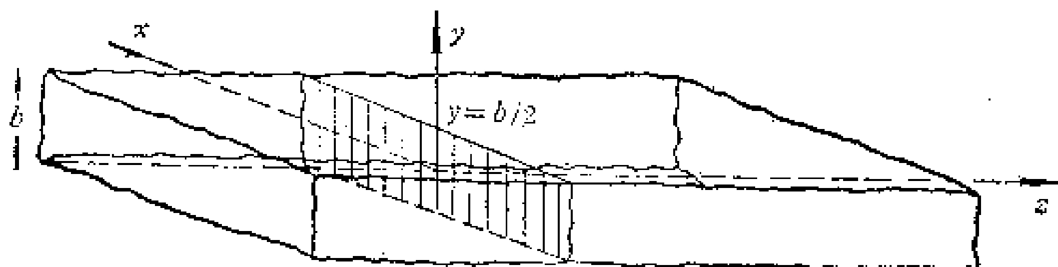


图2.4.12　横向尺寸无界的各向同性固体板(上下面自由)及坐标系

在这种情况，可以明确证明，这个波实际上是板内P波和SV波相对于z轴斜向运行，因而在上下板面不断受到反射而组合，如图2.4.13所示．关于固体自由表面上声波的反射问题，我们将在后

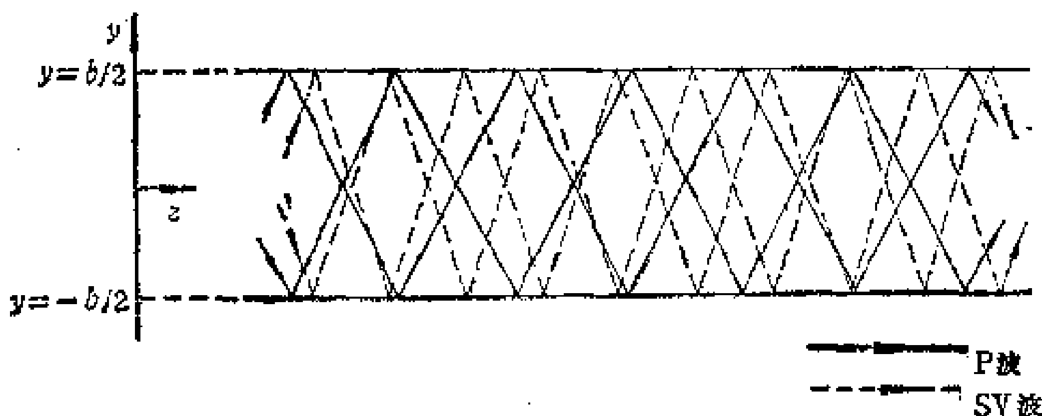


图2.4.13　板内有P波和SV波相对z轴斜向运行，在上下板面连续受到反射

面2.5.1节讨论，那时将看到，一般说，P波的反射波会被反射成P波加SV波，而SV波会被反射成SV波加P波，即反射的P波和SV波是"耦合"的．图2.4.12中前进的P波和SV波的各自波矢量**k**，其沿z轴分量β必须相等，这样才会组成以传播常数β沿z轴传播的行波．在板的横向，即y向，P波和SV波形成共振驻波．

在这个物理模型的基础上，可以导出Lamb波的位移和频散关系．这个波的声场可分为对于板中间平面是对称的或是反对称的两大类．对于对称模式，位移分量是

$$u_y = iA\left[k_{dt}\cos\left(k_{st}\frac{b}{2}\right)\sin(k_{dt}y) - \right.$$

$$\left. - \frac{\beta^2 - k_{st}^2}{2k_{st}}\cos\left(k_{dt}\frac{b}{2}\right)\sin(k_{st}y)\right]e^{i(\beta z-\omega t)},\quad (2.4.52\text{a})$$

$$u_z = \beta A\left[\cos\left(k_{st}\frac{b}{2}\right)\cos(k_{dt}y) - \right.$$

$$\left. - \frac{\beta^2 - k_{st}^2}{2\beta^2}\cos\left(k_{dt}\frac{b}{2}\right)\cos k_{st}y\right]\cdot e^{i(\beta z-\omega t)}.\quad (2.4.52\text{b})$$

对于反对称模式，位移分量是

$$u_y = iB\left[k_{dt}\sin\left(k_{st}\frac{b}{2}\right)\cos(k_{dt}y) + \right.$$

$$\left. + \frac{\beta^2 - k_{st}^2}{2k_{st}}\sin\left(k_{dt}\frac{b}{2}\right)\cos(k_{st}y)\right]e^{i(\beta z - \omega t)}, \quad (2.4.53a)$$

$$u_z = \beta B\left[\sin\left(k_{st}\frac{b}{2}\right)\sin(k_{dt}y) - \right.$$

$$\left. - \frac{\beta^2 - k_{st}^2}{2\beta^2}\sin\left(k_{dt}\frac{b}{2}\right)\sin(k_{st}y)\right]e^{i(\beta z - \omega t)}. \quad (2.4.53b)$$

式中，b 是板厚，而

$$k_{dt}^2 = \left(\frac{\omega}{C_d}\right)^2 - \beta^2, \quad (2.4.54a)$$

$$k_{st}^2 = \left(\frac{\omega}{C_s}\right)^2 - \beta^2, \quad (2.4.54b)$$

k_{dt} 和 k_{st} 分别是 P 波和 SV 波波数的横向（y 向）分量. Lamb 波的频散关系是：对于对称模式，

$$\frac{\tan(k_{st}b/2)}{\tan(k_{dt}b/2)} = -\frac{\beta^2 k_{dt}k_{st}}{(k_{st}^2 - \beta^2)^2}. \quad (2.4.55a)$$

而对于反对称模式，

$$\frac{\tan(k_{st}b/2)}{\tan(k_{dt}b/2)} = -\frac{(k_{st}^2 - \beta^2)^2}{4\beta^2 k_{dt}k_{st}}. \quad (2.4.55b)$$

这两个方程常称 Rayleigh-Lamb 频率方程. 由于 $\beta = \omega/c_p$，从这两个式可以算出相速 c_p 对频率 ω 的关系. 更通常的是用 $b\omega$ 或 $b\omega/2\pi$ 或 $b\omega/2\pi c_p$ 作为自变量. $\tan(k_{st}b/2)$ 和 $\tan(k_{dt}b/2)$ 是多值的，因此对称模和反对称模都是多"次"的. 式(2.4.36)曾指出，$c_s/c_d = \sqrt{(1-2\nu)/2(1-\nu)}$，所以各次模式的位移以及频散曲线依赖于泊松比.

$\nu = 0.22$时，最初几个模式的位移沿板厚度的分布在图2.4.14中绘出，$\nu = 1/3$ 时频散曲线在图 2.4.15 中绘出. 由图可以看到，除一个模式外，所有模式都有截止现象；在截止频率以上，β 是实数，在它以下，β 是虚数. 实际上兰姆波的 β 可以是复数，因此要

完整地表示兰姆波的频散曲线，还需要作三维图. 图2.4.14和2.4.15中，S为对称，A为反对称，S和A的下标为不同次

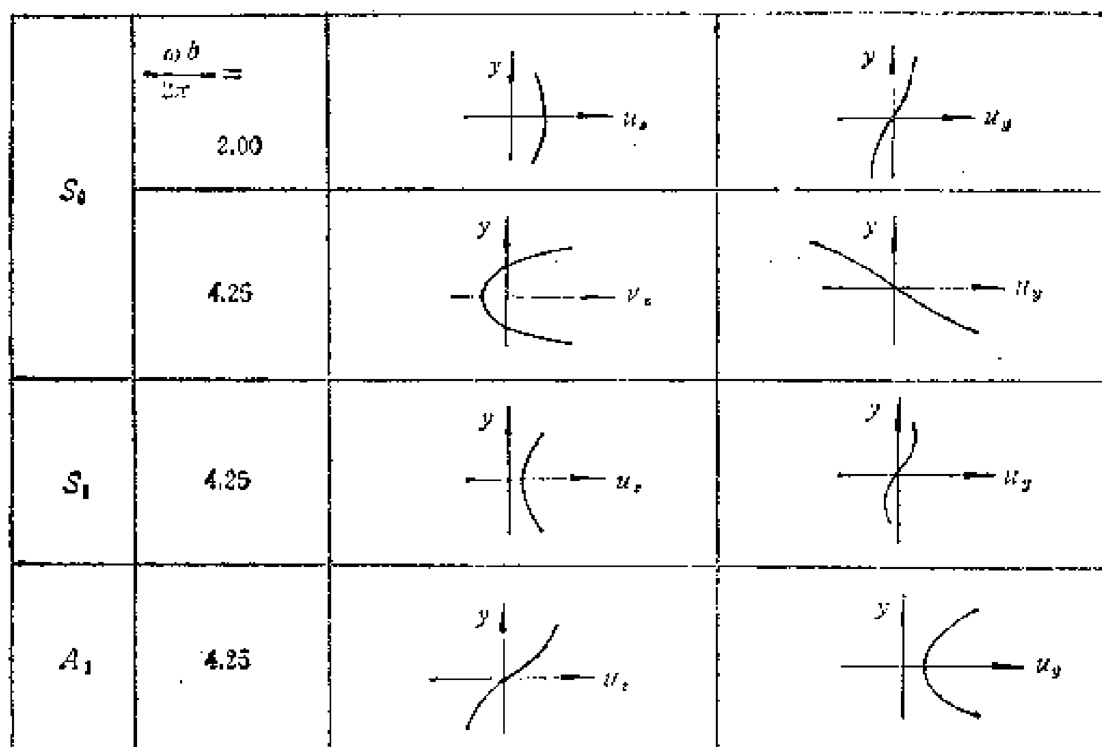


图2.4.14 Lamb 波最初几个模式沿厚度的位移分布，$\nu=0.22$

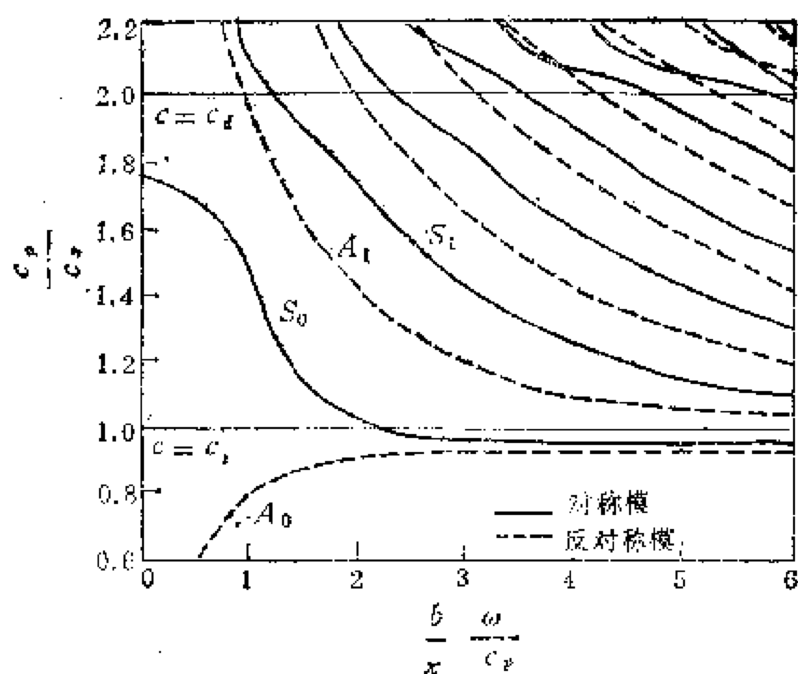


图2.4.15 Lamb 波初始一些模式的频散曲线，$\nu=\frac{1}{3}$

的模式.

Lamb 波是用以适当角度从板面射入薄板的纵波来激发的. 如果射入的是适当角度的SH波(2.4.1节),则板内只有一种斜向运行的波,不断受到反射,而这种波保持为SH波. 这和SH波在自由平面的反射性质有关,在后面的2.5.1节将可得出解释. 板内现在形成的沿 z 轴传播的模式,称SH模式.

半无限大介质上表面薄层内的声波 在2.4.2节中,我们曾提到,对地震波的研究引出了表面声波的概念,表面波中有沿半无限大介质表面传播的瑞利波. 但早期实验发现,在地震波里,还具有很大的垂直于弧矢平面(2.4.2节)的位移,这却不是瑞利波的属性,因为瑞利波的位移是限于弧矢平面之内. A.E.H.Love 提出了设想,认为这是由于地球表面附近不是均匀的,而有一个层结构;层内有SH波在层的两个界面之间曲折前进. Love并作了定量分析.这正类似上面所讨论的薄平板内的SH模式,但差别在于,现在的薄板不是上下板面都自由,而只有上板面是自由的,下板面则连接到一个不同弹性参数的无限大介质.

对这样的半无限大固体介质表面固体薄层内的SH模式,可以用类似于自由薄板内SH模式的处理方法来进行分析,只要考虑到下板面的改变了的边界条件. 在半无限大介质之内,在界面以下,现在也会有SH波,但它的幅度随界面以下的深度而指数减弱,直到振幅为零. 半无限大介质表面薄层的SH模式,称Love模式或Love波,它也是多次的和频散的. 实际上,当层介质的体横波相速小于半无限大介质的体横波相速时,Love波的频散关系才有实数解,并且Love波的相速在两个体横波相速之间.

半无限大固体介质上有表面固体薄层时,在一定程度上这类似2.4.2节中所讲到的半无限大固体介质上覆有液体介质. 在那里,可以产生广义瑞利波. 在这里,除Love波外,还可以产生叫做瑞利类模式的波,它是瑞利波向薄层的横向延伸,也是多次的和频散的.

§2.5 各向同性介质内体声波的一些基本传播特性

上节我们已经涉及声波的某些特性，例如体声波的声速及其非频散性，導导声波的声速及其频散性．在本节，我们进一步介绍声波的其它基本传播特性，将只限于讨论各向同性介质中体声波在两个半无限大介质之间平面界面的反射和折射，遇到障碍物时的散射和衍射，以及在介质传播时不可避免的衰减．表面声波和導导声波同样会有相似情况下的传播特性，例如，表面声波在粘结在一起的两个介质的表面接缝处会产生反射和折射，或者虽在同一介质的表面上传播，却因表面的一半受到某种处理，从而改变了表面的声学性质，表面声波在交接处也会部分反射、部分折射．又例如，固体板内部如有裂纹，Lamb 波到此会受到散射．但限于篇幅，我们将不讨论表面或導导声波的这些现象，也不讨论体声波在各向异性介质中的类似现象．

2.5.1 平面体声波在两个半无限大各向同性介质间平面界面的反射和折射

假设有两个各向同性半无限大介质 I 和 II，它们的密度和拉梅弹性常数分别为 ρ_1，λ_1，μ_1 和 ρ_2，λ_2，μ_2，它们在 $z=0$ 平面相接．在固体-固体的情况，两个面可以有几种不同的接法．比如说，一种接法是，两个面相互紧贴，在应力作用下可以局部分离．我们将只限于讨论另一种接法，即两个接触面是“焊”在一起的情况．假设有平面声波从占据空间 $z\geqslant0$ 的介质 I，以相对于界面法线的任意角度入射，这个声波可以是纵波，或 SV 横波，或 SH 横波．当相介质为理想流体时，当然只能是纵波，图 2.5.1 绘出这时的情况．图中用 α 和 β 分别表示纵波和横波同界面法线（z 轴）的角度．入射的是平面波，反射和折射的也将是平面波．

如果入射波是纵波或 SV 横波，则在整个空间，

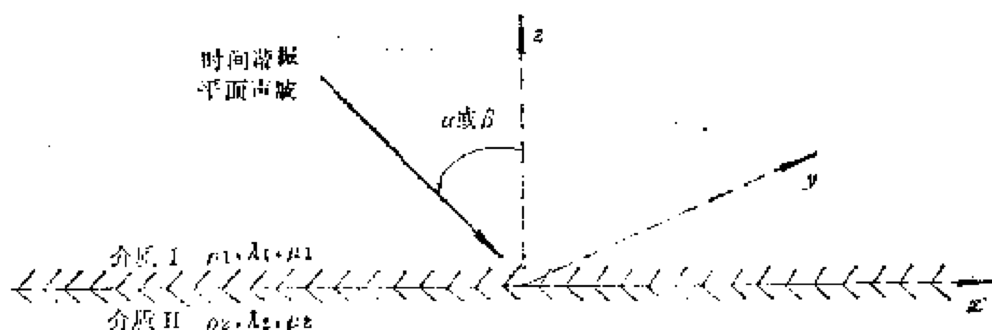


图2.5.1 平面声波入射两个半无限各向同性介质的平面界面

$$u_y = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial y} = 0. \tag{2.5.1}$$

随之,根据式(2.2.12),

$$S_{xy} = 0, \qquad S_{zy} = 0. \tag{2.5.2}$$

又根据式(2.2.31),

$$T_{yx} = 0, \qquad T_{yz} = 0, \tag{2.5.3}$$

这类问题称为平面应变问题. 顺便提到,有另一类平面问题,称为平面应力问题,问题所涉及的物体处于这么一个受力状态,即体内有一组不受任何应力的平行平面. 如果这组平面垂直于 y,则 $T_{yy} = 0, T_{yz} = 0, T_{yx} = 0$.

介质 I 或(和)介质 II 可能是理想流体,则 μ_1 或(和) μ_2 为零. 介质 II 可能是真空,则 $\rho_2 = 0, \lambda_2 = 0, \mu_2 = 0$,界面是介质 I 的自由面或表面. 下面将先讨论介质-真空,再讨论介质-介质的情况. 我们将假设,所有入射波是时间谐振波,显然,所有反射和折射的波也将是时间谐振的.

固体-真空 当入射的波是 P 波或 SV 波,一般会同时反射出纵波和 SV 波. 数学上看,只反射出一种波不能满足自由表面的边界条件;从实验看,同时反射出两种波得到普遍的证实. 当入射的波是 SH 波,则反射的只有 SH 波,下面我们分别进行计算.

设入射波为纵波 P(u_1),如图 2.5.2 所示,其入射角为 α_1,设反射波为 P(u_2)和 SV(u_4),其反射角分别为 α_2 和 β_4. 令 $\varphi_1, \varphi_2, \psi_4$ 分别表示三个波的位移势,则

$$\mathbf{u}_1 = \nabla\varphi_1, \quad \mathbf{u}_2 = \nabla\varphi_2, \quad \mathbf{u}_4 = \nabla \times \boldsymbol{\psi}_4.$$

因为 $(u_i)_y=0$, $\dfrac{\partial}{\partial y}=0$, $i=1,2,4$, 所以

$$\mathbf{u}_1(x,z,t)=\nabla\varphi_1(x,z,t), \tag{2.5.4a}$$

$$\mathbf{u}_2(x,z,t)=\nabla\varphi_2(x,z,t), \tag{2.5.4b}$$

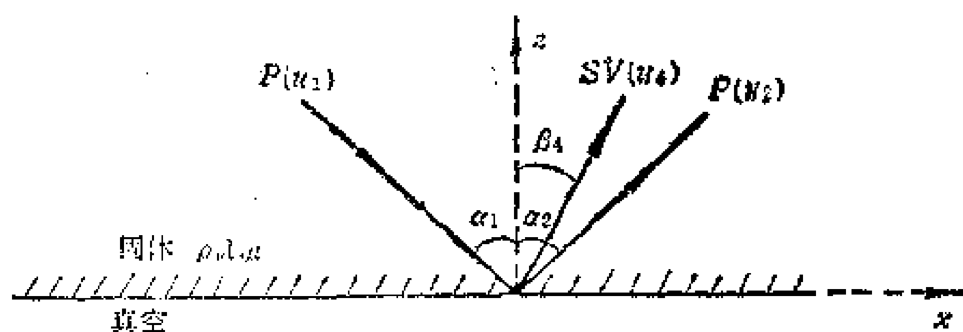


图2.5.2 入射到固体自由界面的纵波

$$\mathbf{u}_4(x,z,t)=\nabla\times[\hat{e}_y\psi_4(x,z,t)], \tag{2.5.4c}$$

其中 $\hat{e}_y$ 是沿 y 轴的单位矢. 入射波假设是时间谐振平面波，以此各个位势可写成

$$\varphi_1(x,z,t)=A_1\exp[ik_d(l_1x-n_1z-c_dt)], \tag{2.5.5a}$$

$$\varphi_2(x,z,t)=A_2\exp[ik_d(l_2x+n_2z-c_dt)], \tag{2.5.5b}$$

$$\psi_4(x,z,t)=A_4\exp[ik_s(l_4x+n_4z-c_st)]. \tag{2.5.5c}$$

A 是幅度，k 是波数，l，n 是波传播的方向余弦：

$$k_d=\frac{\omega}{c_d},\quad k_s=\frac{\omega}{c_s},\quad k_dc_d=k_sc_s, \tag{2.5.6}$$

$$l_i=\sin\alpha_i,\quad n_i=\cos\alpha_i,\quad i=1,2, \tag{2.5.7a}$$

$$l_4=\sin\beta_4,\quad n_4=\cos\beta_4. \tag{2.5.7b}$$

由式(2.2.31)可以得出，在介质内任意点，所有声波共同引起的总的应力分量有

$$\begin{aligned}T_{zz}&=\lambda(S_{xx}+S_{yy}+S_{zz})+2\mu S_{zz}\\&=(\lambda+2\mu)\frac{\partial u_z}{\partial z}+\lambda\frac{\partial u_x}{\partial x},\end{aligned} \tag{2.5.8a}$$

$$\begin{aligned}T_{xz}&=2\mu S_{xz}\\&=\mu\frac{\partial u_z}{\partial x}+\mu\frac{\partial u_x}{\partial z},\end{aligned} \tag{2.5.8b}$$

其中 u_x, u_z 是总的应变分量,即

$$u_x = (u_1)_x + (u_2)_x + (u_4)_x = \frac{\partial}{\partial x}(\varphi_1 + \varphi_2) - \frac{\partial}{\partial z}\psi_4, \quad (2.5.9a)$$

$$u_z = (u_1)_z + (u_2)_z + (u_4)_z = \frac{\partial}{\partial z}(\varphi_1 + \varphi_2) + \frac{\partial}{\partial x}\psi_4. \quad (2.5.9b)$$

在自由界面,所有声波应满足的边界条件为

$$在\ z = 0, \quad T_{zz} = 0, \quad T_{zx} = 0, \quad (2.5.10)$$

已有 $T_{zy} = 0$. 由上式和式(2.5.3),有

$$(\lambda + 2\mu n_1^2) A_1 \exp[i k_d (l_1 x - c_d t)] + (\lambda + 2\mu n_2^2) A_2 \exp[i k_d (l_2 x - c_d t)] = -2\mu \left(\frac{k_s}{k_d}\right)^2 n_4 l_4 A_4 \exp[i k_s (l_4 x - c_s t)], \quad (2.5.11a)$$

$$l_1 n_1 A_1 \exp[i k_d (l_1 x - c_d t)] - l_2 n_2 A_2 \exp[i k_d (l_2 x - c_d t)] = \frac{1}{2}\left(\frac{k_s}{k_d}\right)^2 (l_4^2 - n_4^2) A_4 [i k_s (l_4 x - c_s t)]. \quad (2.5.11b)$$

只有当

$$l_1 = l_2 = l, \quad (2.5.12a)$$

$$k_d (l x - c_d t) = k_s (l_4 x - c_s t), \quad (2.5.12b)$$

式(2.5.11)才给出 A_2/A_1 和 A_4/A_1 的解. 式(2.5.12a)给出

$$\alpha_2 = \alpha_1, \quad (2.5.13a)$$

而式(2.5.12b)给出

$$\frac{\sin\beta_4}{\sin\alpha_1} = \frac{k_d}{k_s} = \frac{c_s}{c_d}, \quad (2.5.13b)$$

式(2.5.13a)和(2.5.13b)分别给出反射 P 波和反射 SV 波的反射角.

式(2.5.13)可写为

$$\frac{\sin\alpha_1}{c_d} = \frac{\sin\alpha_2}{c_d} = \frac{\sin\beta_4}{c_s}, \quad (2.5.14)$$

这和电磁学里的斯涅耳定理有同样的形式，可看作声学里的斯涅耳定理. 下面将看到,斯涅耳定理也适用于折射.

式(2.5.14)可以写为

$$k_d \sin\alpha_1 = k_d \sin\alpha_2 = k_s \sin\beta_4 \equiv k_b, \tag{2.5.15}$$

或

$$\frac{c_d}{\sin\alpha_1} = \frac{c_d}{\sin\alpha_2} = \frac{c_s}{\sin\beta_4} \equiv c_b. \tag{2.5.16}$$

k_b 是沿界面的波数，c_b 是沿界面的声速，参见图2.5.3. 式(2.5.16)表明，所有涉及的波有一个共同的横扫界面的声速，这现象实际上

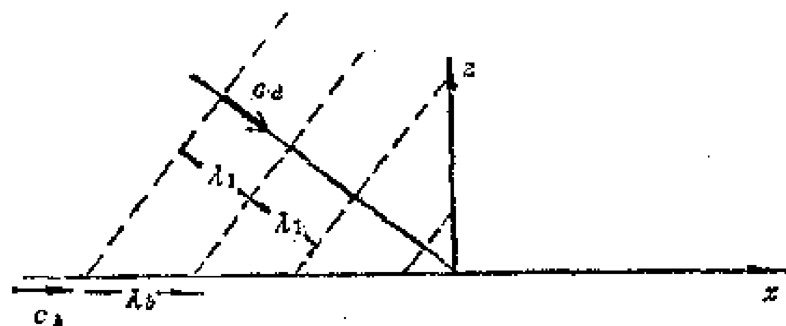


图2.5.3 斜入射声波横扫界面的速度，λ_1 是纵波波长，λ_b 是纵波横扫界面的波长

是惠更斯原理的一种表现，因为反射波是入射波在横扫界面时连续产生的。

将式(2.5.14)代入式(2.5.11)可以求出 A_2/A_1 和 A_4/A_1，即反射波相对入射波的幅度。令

$$\alpha_1 = \alpha_2 \equiv \alpha, \quad \beta_4 \equiv \beta, \tag{2.5.17}$$

$$\eta \equiv \frac{c_d}{c_s}, \tag{2.5.18}$$

则位移势的反射系数为

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{\sin 2\alpha \sin 2\beta - \eta^2 \cos^2 2\beta}{\sin 2\alpha \sin 2\beta + \eta^2 \cos^2 2\beta}, \tag{2.5.19a}$$

$$\frac{A_4}{A_1} = -\frac{2\sin 2\alpha \cos 2\beta}{\sin 2\alpha \sin 2\beta + \eta^2 \cos^2 2\beta}, \tag{2.5.19b}$$

A_2，A_4，A_1，如式(2.5.5)给出，是位移势的系数. 对位移本身，如果

$$(u)_x = U_1 \exp[i k_d (l_{1x} - n_1 z - c_d t)], \tag{2.5.20a}$$

$$(u_1)_z = W_1 \exp\left[ik_d(l_1x - n_1z - c_dt)\right], \qquad (2.5.20b)$$

$$(u_2)_x = U_2 \exp\left[ik_d(l_2x + n_2z - c_dt)\right], \qquad (2.5.20c)$$

$$(u_2)_z = W_2 \exp\left[ik_d(l_2x + n_2z - c_dt)\right], \qquad (2.5.20d)$$

$$(u_4)_x = U_4 \exp\left[ik_s(l_4x + n_4z - c_st)\right], \qquad (2.5.20e)$$

$$(u_4)_z = W_4 \exp\left[ik_s(l_4x + n_4z - c_st)\right]. \qquad (2.5.20f)$$

可以证明，位移反射系数为

$$\frac{U_2}{U_1} = -\frac{W_2}{W_1} = \frac{A_2}{A_1}, \qquad (2.5.21a)$$

$$\frac{U_4}{U_1} = -\cot\beta\frac{A_4}{A_1}; \qquad \frac{W_4}{W_1} = -\tan\alpha\frac{A_4}{A_1}. \qquad (2.5.21b)$$

注意到

$$\eta = \frac{c_d}{c_s} = \left[\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\right]^{1/2},$$

由式(2.5.19)可知，$\frac{A_2}{A_1}$和$\frac{A_4}{A_1}$是泊松比ν的函数．此外，这两个量明显地是入射角α的函数．图 2.5.4 给出$\nu=\frac{1}{4}$和$\frac{1}{3}$时，$\frac{A_2}{A_1}$

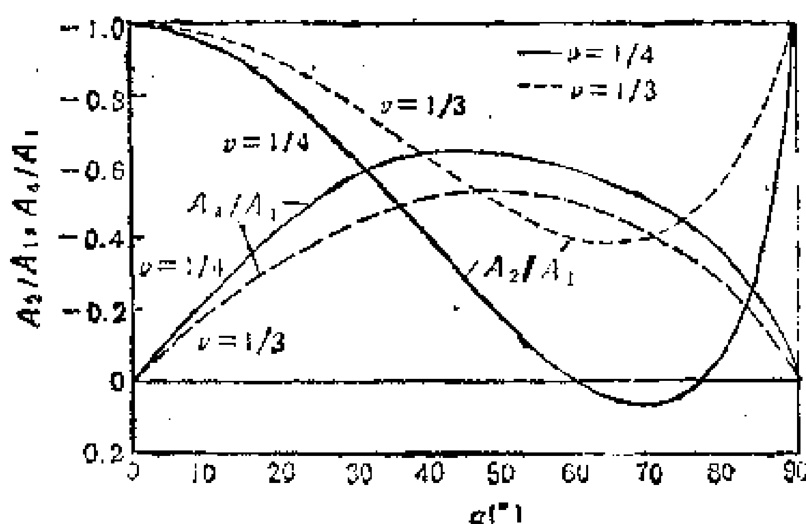


图2.5.4 纵波入射到自由界面时位移势反射系数$\frac{A_2}{A_1}$和$\frac{A_4}{A_1}$在两个ν值随入射角α的变化

和$\frac{A_4}{A_1}$随α的变化；图2.5.5绘出$\frac{A_2}{A_1}$在多个ν值随α的变化．从图2.5.5可以看出，当纵波垂直入射时，无论ν值是什么，只反射出同幅反相的纵波，而不出现横波．从图又可看出，对某些ν值，$\frac{A_2}{A_1}$在0与$\frac{\pi}{2}$之间某些角度时可能为零，这时只反射出SV波．按式(2.5.19a)，当α满足

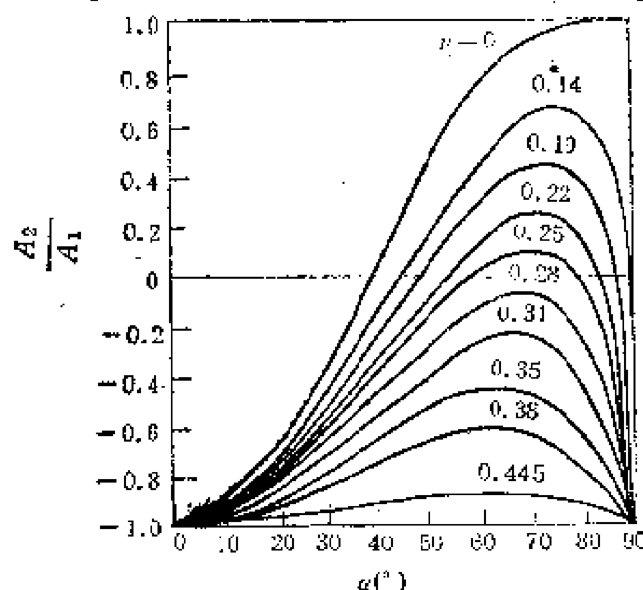


图2.5.5 纵波入射到自由界面时位移势反射系数$\frac{A_2}{A_1}$在多个ν值随入射角α的变化

$$\sin 2\alpha \sin 2\beta - \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\cos^2 2\beta = 0, \tag{2.5.22}$$

$\frac{A_2}{A_1}=0$，而这时由式(2.5.19b)，$\frac{A_4}{A_1}=-\cot 2\beta$．当入射角为90°，情况更复杂些，这时会有反射角为$\sin^{-1}\frac{1}{\eta}=\sin^{-1}\frac{c_s}{c_d}$的$SV$波，见图2.5.6．

上面讨论的是纵波入射的情况，现在来讨论当入射波是SV波的情况，如图2.5.7所示．用类似上面的推导，可以得到

$$\beta_3=\beta_4\equiv\beta, \tag{2.5.23a}$$

$$\frac{\sin\beta_1}{c_s}=\frac{\sin\beta_3}{c_s}\equiv\frac{\sin\beta}{c_s}=\frac{\sin\alpha_2}{c_d}\equiv\frac{\sin\alpha}{c_d}, \tag{2.5.23b}$$

$$\frac{A_4}{A_3}=\frac{\sin 2\alpha\sin 2\beta-\eta^2\cos^2 2\beta}{\sin 2\alpha\sin 2\beta+\eta^2\cos^2 2\beta}, \tag{2.5.24a}$$

$$\frac{A_2}{A_3}=\frac{\eta^2\sin 4\beta}{\sin 2\alpha\sin 2\beta+\eta^2\cos^2 2\beta}. \tag{2.5.24b}$$

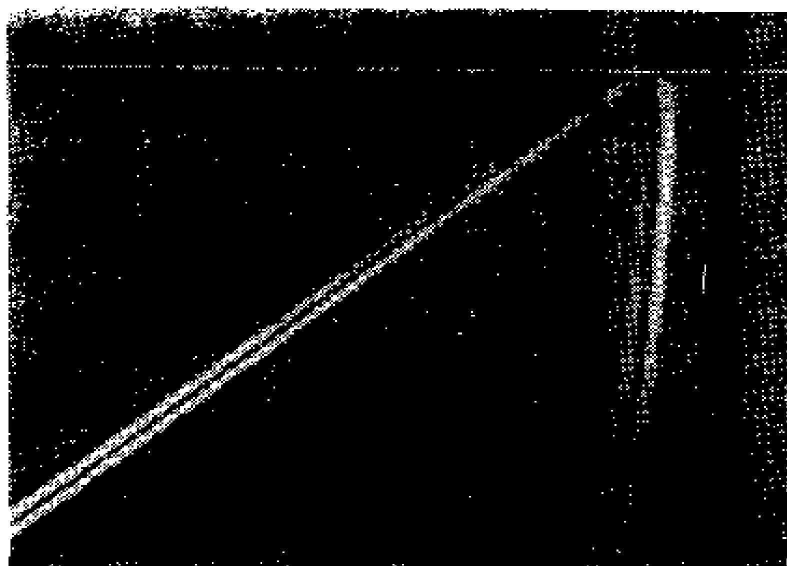


图2.5.6 掠入射到自由面的纵波(中国科学院声学研究所超声传播组摄)

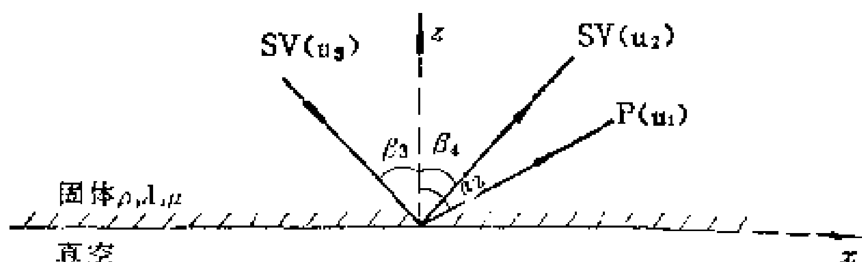


图2.5.7 入射到固体自由界面的SV波

类似式(2.5.19),式中 A_3 是入射 SV 位移势的幅度,即

$$\psi_3(x,z,t)=A_3\exp[ik_s(l_3x-n_3z-c_st)]. \qquad (2.5.25)$$

至于 φ_2 和 ψ_4 仍同式(2.5.5b)和(2.5.5c). 如果同前采用式(2.5.20c)至(2.5.20f)的写法,并且

$$(u_3)_x=U_3\exp[ik_s(l_3x-n_3z-c_st)], \qquad (2.5.26a)$$

$$(u_3)_z=W_3\exp[ik_s(l_3x-n_3z-c_st)], \qquad (2.5.26b)$$

则

$$\frac{U_4}{U_3}=-\frac{W_4}{W_3}=-\frac{A_4}{A_3}, \qquad (2.5.27a)$$

$$\frac{U_2}{U_3}=\tan\beta\frac{A_2}{A_3}; \quad \frac{W_2}{W_3}=\cot\alpha\frac{A_2}{A_3}. \qquad (2.5.27b)$$

在不同 ν 值下,位移势反射系数 $\frac{A_4}{A_3}$ 随 SV 波入射角 β 的变化

见图 2.5.8. 从图可以看出，和 P 波入射时类似，SV 波垂直入射时不产生P 波；在 ν 的某个范围内，在 0 和 $\frac{\pi}{4}$之间的两个 β 值，不反射出 SV 波，这时按式 (2.5.24a)，β 满足

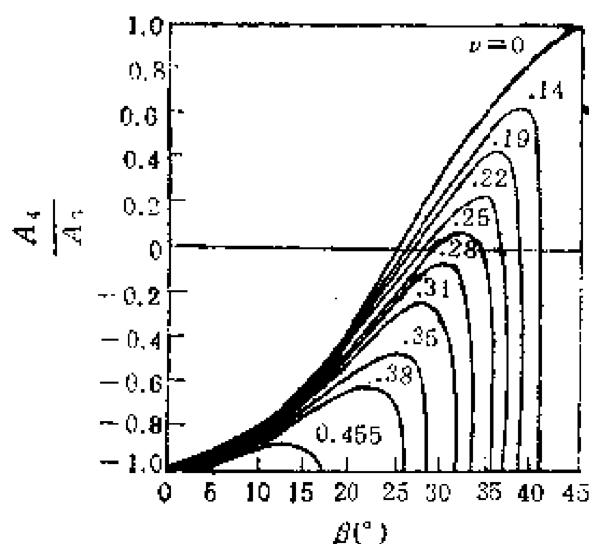


图2.5.8 SV 波位移势反射系数$\frac{A_4}{A_1}$在不同 ν 值随入射角 β 的变化

$$\sin 2\alpha \sin 2\beta - \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\cos^2 2\beta = 0. \tag{2.5.28}$$

从图还可看出，当 $\beta = \frac{\pi}{4}$，入射 SV 波不反射出 P 波.

按式(2.5.23b)，即

$$\sin\alpha = \frac{c_d}{c_s}\sin\beta = \sin\beta \Big/ \frac{1}{\eta},$$

正常的反射 P 波只在 $0 \leqslant \beta \leqslant \sin^{-1}\frac{1}{\eta}$的范围内才存在，因为对实际的材料，$\nu \leqslant \frac{1}{2}$，$\eta = \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} > 1$，只有在上述 β 范围，α 才是实数.

当 $\beta = \sin^{-1}\frac{1}{\eta}$时，$\alpha = \frac{\pi}{2}$，这时纵波掠过界面. 当$\frac{\pi}{2} > \beta > \sin^{-1}\frac{1}{\eta}$时，纵波可能退化为一种表面波.

$$\beta = \sin^{-1}\frac{1}{\eta} \equiv \beta_{cr}, \tag{2.5.29}$$

通常称为 SV 波入射的临界角，它是一个重要的量. 当 SV 波以临界角 β_{cr} 入射时，情况示意于图 2.5.9(a)；当 SV 波以大于β_{cr}而小于$\frac{\pi}{2}$的角度入射时，情况示意于图 2.5.9(b)，这时反射的 SV

波，其幅度和入射的相等，其相位则差一个依赖于β的常数.

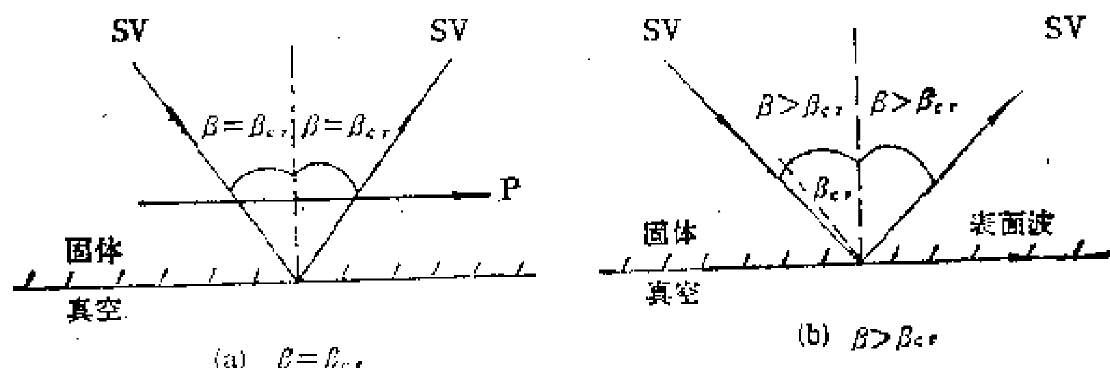


图2.5.9 SV 波以(a)临界角 β_{cr} 以及(b)大于临界角入射时的反射

至于入射角 $\beta=\frac{\pi}{2}$的情况，现有的推导和结论并不完善，似有待更深入的探讨.

最后我们来分析第三种情况，即入射波是 SH 波，这时，与前式(2.5.1)相比，$\frac{\partial}{\partial y}=0$ 仍有效，但

$$u_y \neq 0,$$

而有

$$u_x=0,\ u_z=0, \tag{2.5.30a}$$

$$u_y=u_y(x,z,t). \tag{2.5.30b}$$

与式(2.5.1)及相应的平面应变问题对比，此类问题称为反平面应变问题. 前面对 P 波或 SV 波入射的分析步骤仍可大体沿用. 目前，ψ 的三个分量中，$\psi_2=0$，只剩 ψ_1 和 ψ_3，而

$$u_y=\frac{\partial\psi_1}{\partial x_3}-\frac{\partial\psi_3}{\partial x_1}\ .$$

由规范条件 $\nabla\cdot\psi=0$，可以看出，ψ_1 和 ψ_3 是有联系的.

容易证明，在介质的自由界面，入射的 SH 波总是反射为同幅同相的SH 波，且反射角等于入射角，图 2.5.10 绘出这个情况. 因此，入射波为 SH 波时，反射情况(以及两个介质界面上的折射情况)要比入射波为P波或 SV 波时简单. 这是由于反射时没有模式转换，在数学处理上和即将讨论的流体-真空情况是同范畴的.

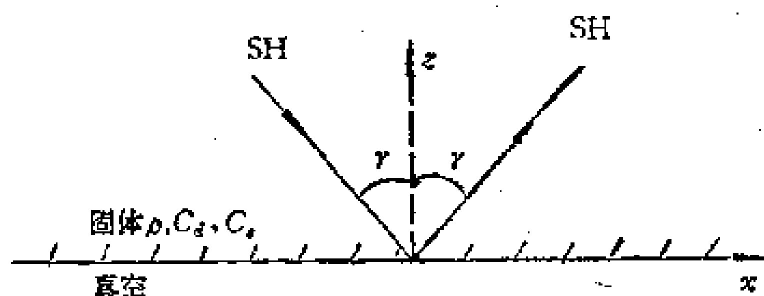


图2.5.10 入射到固体自由界面的SH波

流体-真空 若载声介质是理想流体，则只有纵波入射的可能，也只有纵波反射的可能，如图2.5.11所示.

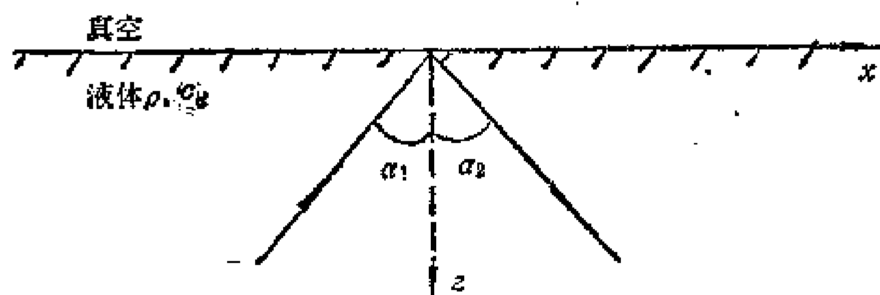


图2.5.11 纵波入射到流体自由界面

在流体中，有

$$\varphi_1(x,z,t)=A_1\exp[ik_d(l_1x-n_1z-c_dt)], \tag{2.5.31a}$$

$$\varphi_2(x,z,t)=A_2\exp[ik_d(l_2x+n_2z-c_dt)], \tag{2.5.31b}$$

$$(u_1)_x=U_1\exp[ik_d(l_1x-n_1z-c_dt)], \tag{2.5.31c}$$

$$(u_1)_z=W_1\exp[ik_d(l_1x-n_1z-c_dt)], \tag{2.5.31d}$$

$$(u_2)_x=U_2\exp[ik_d(l_2x+n_2z-c_dt)], \tag{2.5.31e}$$

$$(u_2)_z=W_2\exp[ik_d(l_2x+n_2z-c_dt)]. \tag{2.5.31f}$$

声压为

$$p_1=P_1\exp[ik_d(l_1x-n_1z-c_dt)], \tag{2.5.32a}$$

$$p_2=P_2\exp[ik_d(l_2x+n_2z-c_dt)]. \tag{2.5.32b}$$

引用边界条件：

$$\text{在 } z=0, \qquad p=p_1+p_2=-\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\varphi_1+\varphi_2)$$

$$=0, \tag{2.5.33}$$

并大体沿用对固体内纵波入射的计算步骤，容易证明，

$$\alpha_1=\alpha_2=\alpha, \tag{2.5.34a}$$

$$\frac{A_2}{A_1}=-1, \tag{2.5.34b}$$

$$\frac{U_2}{U_1}=\frac{W_2}{W_1}=\frac{A_2}{A_1}=-1. \tag{2.5.34c}$$

$$\frac{P_2}{P_1}=\frac{A_2}{A_1}=-1. \tag{2.5.34d}$$

固体-固体 与固体-真空界面相比，固体-固体界面上大都出现折射波．但基本分析方法相似，仅具体边界条件有所不同．有些结果也是相似的，如当 P 波或 SV 波入射时，反射和折射时一般都有模式转换，而当 SH 波入射，只反射和折射 SH 波．

如前面提到，我们假设固体和固体是"焊接"起来的，两个固体内的入射、反射和折射情况如图 2.5.12 所示，图中分别表示纵波入射，SV 波入射和 SH 波入射的例子．

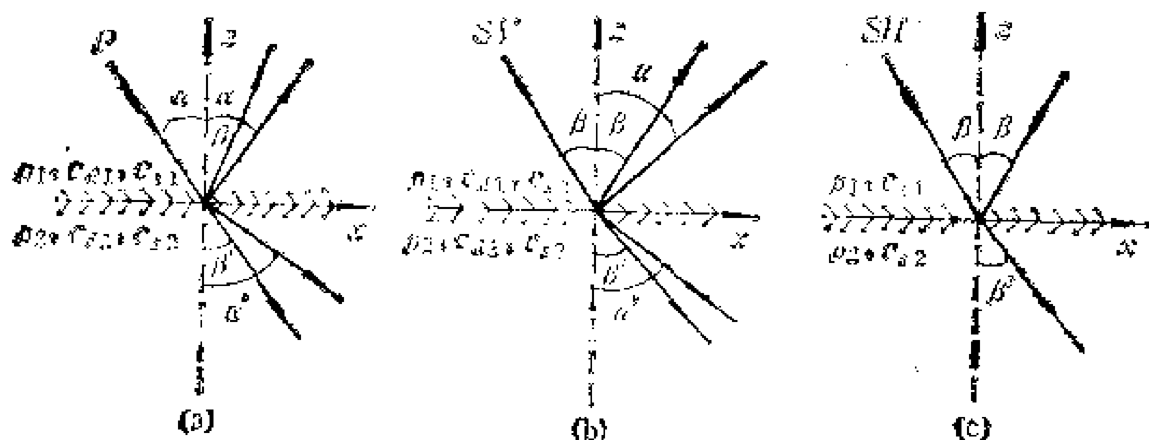


图2.5.12 固体-固体界面上声波的反射和折射．
(a) 纵波入射；(b) *SV* 波入射；(c) *SH* 波入射

对于 P 波和 SV 波的入射，边界条件是

$$\text{在}\ z=0,\quad u_x^{\mathrm{I}}=u_x^{\mathrm{II}},\quad u_z^{\mathrm{I}}=u_z^{\mathrm{II}},$$

$$T_{zz}^{\mathrm{I}}=T_{zz}^{\mathrm{II}},\ T_{zx}^{\mathrm{I}}=T_{zx}^{\mathrm{II}}. \tag{2.5.35}$$

这里上标 I，II 分别表示在介质 I 和介质 II 内所有波的有关量之和．在整个空间，同式(2.5.3)，仍有 $T_{yz}=0$，$T_{yx}=0$．对于 SH

波的入射，边界条件是

$$在\ z=0,\ u_y^{\mathrm{I}}=u_y^{\mathrm{II}},\ T_{zy}^{\mathrm{I}}=T_{zy}^{\mathrm{II}}\ . \tag{2.5.36}$$

容易证明，对任一入射情况，都有斯涅耳定律：

$$\frac{c_{d1}}{\sin\alpha}=\frac{c_{s1}}{\sin\beta}=\frac{c_{d2}}{\sin\alpha'}=\frac{c_{s2}}{\sin\beta'}=c_b\,. \tag{2.5.37}$$

同类型波的反射角恒等于入射角的规律已在图 2.5.12 中表出，c_b 仍是沿界面的声速. 从斯涅耳定律，可以推论几个临界角的现象. 在纵波入射情况，若

$$c_{d2}>c_{s2}>c_{d1},$$

入射角 α 可以有两个临界角：

$$\alpha_{cr\alpha'}=\sin^{-1}\frac{c_{d1}}{c_{d2}},\qquad \alpha_{cr\beta'}=\sin^{-1}\frac{c_{d1}}{c_{s2}}.$$

对于前者，折射角 $\alpha'=\dfrac{\pi}{2}$，对于后者，折射角 $\beta'=\dfrac{\pi}{2}$；若

$$c_{d2}>c_{d1}>c_{s2},$$

则只有一个临界角：

$$\alpha_{cr\alpha'}=\sin^{-1}\frac{c_{d1}}{c_{d2}}.$$

这时折射角 $\alpha'=\dfrac{\pi}{2}$；若

$$c_{d1}>c_{d2}>c_{s2},$$

则没有临界角. 在实际应用中，为在介质Ⅱ中产生（斜的）SV 体波，常近似地选择 $c_{d2}>c_{s2}>c_{d1}$ 的上述第一个方案，以利用纵波声源，如图 2.5.13 所示. 在 SV 波入射情况，若

$$c_{d2}>c_{s2}>c_{d1},$$

入射角 β 可有多达三个临界角，它们分别是

$$\beta_{cr\alpha}=\sin^{-1}\frac{c_{s1}}{c_{d1}},\qquad \left(\alpha=\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\beta_{cr\alpha'}=\sin^{-1}\frac{c_{s1}}{c_{d2}},\qquad \left(\alpha'=\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\beta_{cr\beta'} = \sin^{-1}\frac{c_{s1}}{c_{s2}}. \qquad \left(\beta' = \frac{\pi}{2}\right)$$

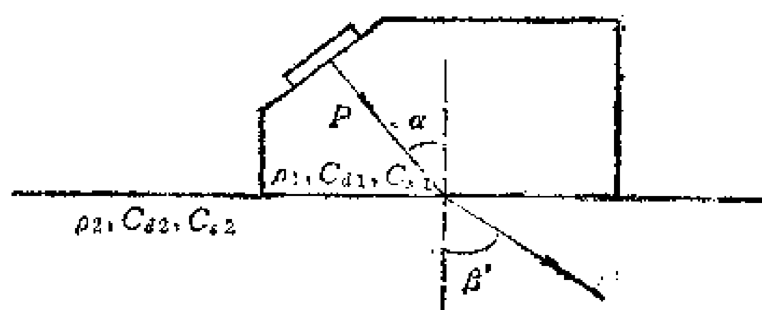


图2.5.13 $c_{d2}>c_{s2}>c_{d1}>c_{s1}$ 时的纵波折射，$\alpha_{cr\beta'}>\alpha>\alpha_{cr\alpha'}$

若

$$c_{d2}>c_{s1}>c_{s2},$$

可有两个临界角 $\beta_{cr\alpha}$ 和 $\beta_{cr\alpha'}$；若

$$c_{s1}>c_{d2}>c_{s2},$$

则只有一个临界角 $\beta_{cr\alpha}$. 在 SH 波入射情况，若

$$c_{s2}>c_{s1},$$

入射角可以有一个临界角 $\beta_{cr\beta'}=\sin^{-1}\dfrac{c_{s1}}{c_{s2}}$，这时 $\beta'=\dfrac{\pi}{2}$.

我们将略去有关反射波和折射波幅度的计算结果.

固体-流体，流体-固体，流体-流体 在这些情况下，入射波的反射和折射，可以看作固体-固体情况下的特例. 从基本方程直接计算，有时可能比利用固体-固体的结果更简单些. 这里我们也不引录大量的计算公式.

2.5.2 体声波的散射

介质一般不是无限大的，"无限大"只是相对于所关心的空间范围讲的. 一个介质中传播的声波，在一般情况，终将遇到另一个介质，这第二个介质可能如上节所讨论的那样，是"半无限大"的，也可能是体积有限的，位于原来介质（Ⅰ）之内的一个物体，它由另一种材料（介质Ⅱ）组成. 声波遇到这个物体时，将在照射到的界面元上经受反射和折射，但所经受的可以不止这些，特别是当物体

的尺寸和波长可比拟时.入射声波所受到干扰的总效应,称为散射(为此,有人把平界面的反射和折射,也叫做散射). 入射波受散射体干扰后,介质Ⅰ中所形成的声波总体(总的声波),减去原来的入射波,定义为散射波. 以入射波是平面波这个简单情况为例,散射后声波的总体,常不保持平面波或其它简单波的形式,而具有较复杂的空间分布. 因此,更宜于用声场这个名词来描述.从散射后的总声场,我们人为地划分出原有的、假设未受任何干扰的入射波,虽然它常是难以识别的.

声波在大介质中遇到异体是很普遍的事,因此散射问题是声波传播的基本问题之一. 该问题在声学中显得特别重要,因为声波的波长常和实际存在的一些异体可比. 这和光学有较显著的区别. 光波在传播中也遇到异体,但日常环境中的异体比光波波长要大得多,这时发生的主要是上节所讨论的界面反射和折射问题.

当然,众所周知,光波也会遇到尺寸与其波长可比的物体. 正是在这种情况下的传播现象,导致了对光的波动性的认识. 但在光学中常用衍射这个名词来描述有关现象,而很少用散射一词(例如在解释天空呈蓝色时称瑞利散射). 在声学中也有人用衍射一词,使两种名词往往难以区别. 我们倾向于采取声学中更通用的做法,认为散射比衍射有更广泛的含意,即认为散射包含衍射;散射所包括的是反射、折射和衍射,而衍射则专指绕过物体边缘,特别是尖锐边缘,而进入几何阴影区的投射.

为讨论声波的散射问题,下面我们将分析一个较简单的例子,即固体中或流体中球形异体对平面体声波的散射. 对形状更复杂的散射体,包括有尖锐边界的散射体,或者对入射波是表面声波的情况,后面第四章和第六章等将有所讨论. 顺便指出,同在体声波技术中一样,在表面声波技术中,散射效应有较广泛的应用.

各向同性固体中球形体对平面纵波的散射 我们设入射声波是介质Ⅰ中的时间谐振平面纵波,设球形障碍物由任意介质Ⅱ组成,这里设为固体,如图 2.5.14 所示,但也可以是流体或空穴. 介

质Ⅰ和介质Ⅱ都是各向同性的，它们的密度和拉梅常数分别是ρ_1，λ_1，μ_1和ρ_2，λ_2，μ_2．入射波遇到球形障碍物时，一般会向各方散

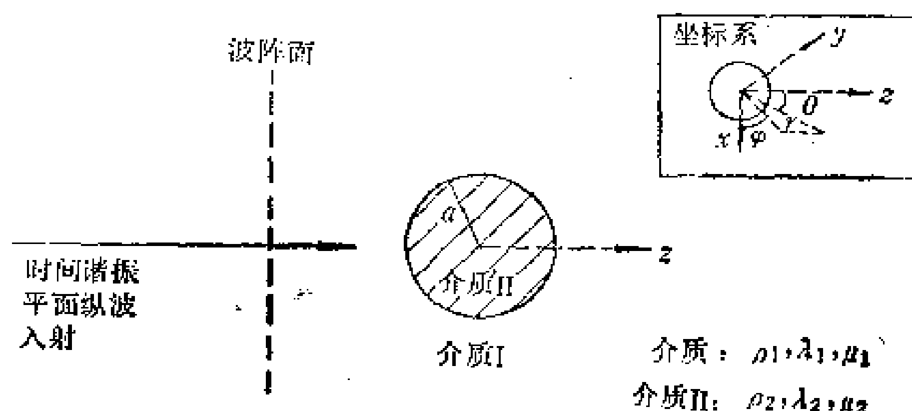


图2.5.14　各向同性固体内平面纵波受球形障碍物的散射

开，而不像遇到平面形大界面时那样只受到指向少数方向的反射和折射．所以，数学上现在的求解比平界面情况要繁杂的多．但是，两个情况的求解步骤还是相同的：求出各自介质中的声波通解，然后再求在介质界面上所应满足的边界条件．

如图 2.5.14，入射波的传播方向沿z轴，设入射波的位移幅度为 1，其入射波为

$$\mathbf{u}_i = [\nabla\varphi_i(z)]e^{-i\omega t}, \tag{2.5.38}$$

这里

$$\varphi_i(z) = \frac{1}{ik_{d1}}\exp(ik_{d1}z), \tag{2.5.39}$$

$k_{d1} = \omega/c_{d1}$．散射波不是平面波，也不仅是纵波．由于目前结构的对称性质，可以预计，散射波对z轴对称（参看 2.4.1 节）．我们取球面坐标系，如图 2.5.14 中插图所示．散射波不依赖于φ，可写为

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_s &= [\nabla\varphi_s(r,\theta) + \nabla\times\boldsymbol{\Psi}_s(r,\theta)]e^{-i\omega t}\\ &= [\nabla\varphi_s + \nabla\times(\nabla\times\hat{\mathbf{r}}r\Pi_s)]e^{-i\omega t},\end{aligned} \tag{2.5.40}$$

式中$\Pi_s = \Pi_s(r,\theta)$；φ_s和$\boldsymbol{\Psi}_s$，Π_s都是介质Ⅰ的参量ρ_1，λ_1，μ_1的函数，因为散射波这里只指介质Ⅰ中的有关部分．Π_s的引进是基于以下的原因：在一般情况，$\boldsymbol{\Psi}_s$可分解为两个相互垂直分矢量，

困之是二者之和；在目前的特殊情况，则简化为只剩一个分量，而这个分量可写为 $\nabla\times\hat{\mathbf{r}}r\Pi_s$)，$\hat{\mathbf{r}}$ 如前是 r 方向的单位矢量．Π_s 和 φ_s 一样，满足亥姆霍兹方程，参看式(2.4.20)，

$$\nabla^2\varphi_s+k_{d1}^2\varphi_s=0,\tag{2.5.41a}$$

$$\nabla^2\Pi_s+k_{s1}^2\Pi_s=0,\tag{2.5.41b}$$

式中 $k_{s1}=\omega/c_{s1}$．球形障碍物的内部也激发声波（除非球体是空穴），设它的质点位移为

$$\mathbf{u}_q=[\nabla\varphi_q+\nabla\times(\nabla\times\hat{\mathbf{r}}r\Pi_q)]e^{-i\omega t},\tag{2.5.42}$$

其中 $\varphi_q=\varphi_q(r,\theta)$，$\Pi_q=\Pi_q(r,q)$ 都是介质Ⅱ的参量 ρ_2，λ_2，μ_2 的函数，

$$\nabla^2\varphi_q+k_{d2}^2\varphi_q=0,\tag{2.5.43a}$$

$$\nabla^2\Pi_q+k_{s2}^2\Pi_q=0,\tag{2.5.43b}$$

$k_{d2}=\omega/c_{d2}$，$k_{s2}=\omega/c_{s2}$．

于是，在球形障碍物的表面有边界条件：$r=a$ 时，

$$u_{ir}+u_{sr}=u_{qr},\tag{2.5.44a}$$

$$u_{i\theta}+u_{s\theta}=u_{q\theta},\tag{2.5.44b}$$

$$T_{irr}+T_{srr}=T_{qrr},\tag{2.5.45a}$$

$$T_{i\theta r}+T_{s\theta r}=T_{q\theta r}.\tag{2.5.45b}$$

散射波 $\mathbf{u}_s$ 之解便由满足这些边界条件的 φ_s 和 Π_s 组成，φ_s 和 Π_s 是亥姆霍兹式的通解．在具体的求解演算中要用球面坐标，而人射波则是平面波，所以需要对平面波用球面贝塞尔函数和勒让德多项式展开．

一个具体的理论计算和实验测量的例子在图 2.5.15 中给出，图中绘出了平面纵波入射时散射纵波和散射横波的(远场)指向性图案．这里介质Ⅰ是钛合金，介质Ⅱ是碳化钨．碳化钨球体的直径是 800μm，入射平面纵波的频率分别为 2.25 MHz 和 10MHz．

指向性图案表示出的远声场，看来是“静态”的，这是因为所有的波是时间谐振的．如果我们考察的是人射脉冲声波，考察它遇到障碍物的实际传播途径，则会发现波的运行是生动的，多花样的．在上述球形障碍物的情况，根据理论和实测波形的数据分析，

入射脉冲声将部分地围绕着球体运动，从而闯入了几何的阴影区，

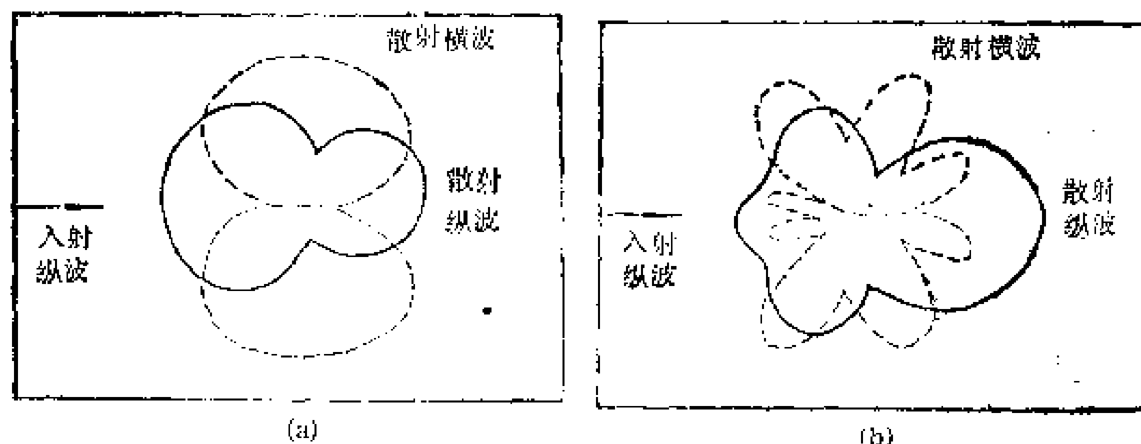


图2.5.15 钛合金介质中入射平面纵波遇到 WC 球体时的散射指向性图案，球体直径 800μm

(a) 入射纵波频率为2.25MHz，$k_d a=0.9$；

(b) 入射纵波频率为10 MHz，$k_d a=4.0$

其中部分声波又会中途折入球体内部等等．作为部分证明，图2.5.16给出玻璃介质内入射平面横波遇到一个圆柱形空腔时，一部分沿腔壁绕行的光弹照片．这个照片只是随时间增长所拍摄的系列照片中的一张，显示在这一刹那，入射波已绕着空腔的壁爬行了一圈多．

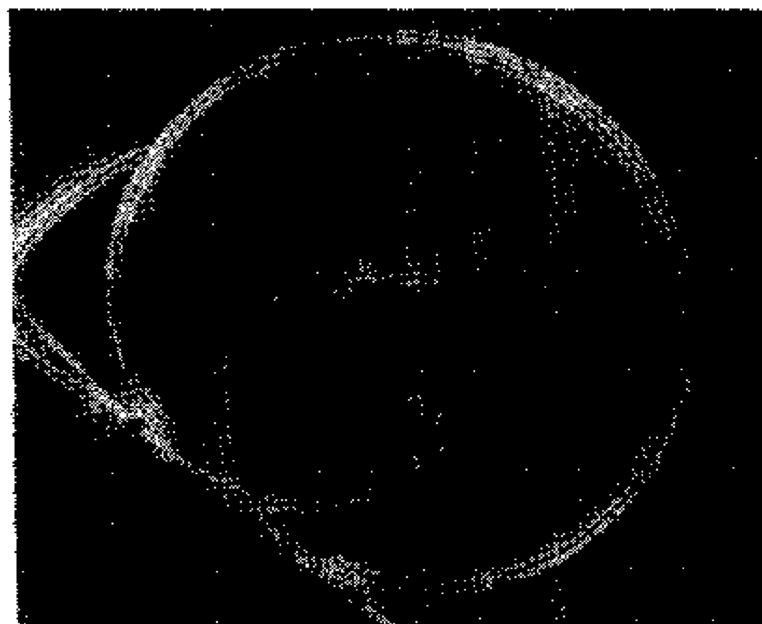


图2.5.16 玻璃内平面横波遇到圆柱形空腔时的"爬行"光弹照片（中国科学院声学研究所超声传播组摄）

流体中刚性球体对平面声波的散射 用类似但要简单得多的计算，可以导出流体中球体对平面纵波的散射情况，这时散射波只有纵波. 我们只给出球体为刚性时理论计算的指向性图案，列于图 2.5.17.

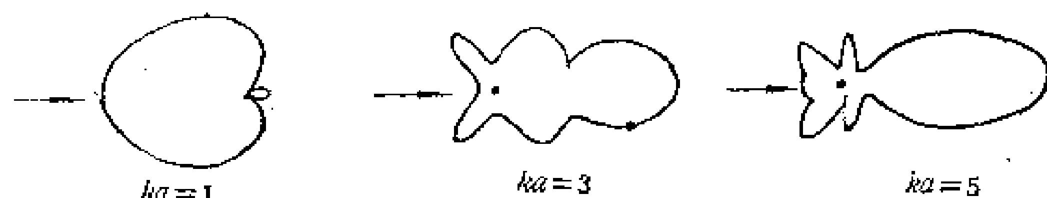


图2.5.17 流体中入射平面波遇到刚性球体(黑点)时的散射指向性图案

2.5.3 体声波的吸收

在前面的所有讨论中，都忽略了声波振幅在传播过程中随传播距离逐渐减小的事实，这主要是因为不想一开始便涉及太广的问题，也部分因为减弱程度常很微小. 但是，声波，不论是体声波还是表面声波，总会随传播距离而减弱，而对较高频段的超声波，这个现象尤其明显.

声波减弱的原因有多种，一种原因是在传播中声波的作用面可能扩大了，而声波的能量并未得到补充，它的幅度便相应减小. 明显的例子是 2.4.1 节所提到的球形对称波和圆柱形波的传播. 可以证明，前者波阵面上的质点位移与 r 成反比，r 是波阵面到球心的距离（见图 2.4.1），而后者波阵面上的质点位移与 $r^{1/2}$ 成反比，其中 r 是波阵面到柱轴的距离(见图 2.4.2).

研究得更多的是另一种情况，即穿透大群障碍物或不均匀介质的声波，包括平面声波的情况. 例如声波在充满小悬浮粒子流体里的传播，或在多晶固体内的传播，或在人体组织内的传播. 表面看，平面波的波阵面似乎并未扩大，但实际上部分声波被零星地、陆续地散开，而偏离了平面波主体方向，从而沿平面波主体方向传播的声波减弱了. 在这些情况，声波的总能量并没有减少，只是从指定的方向看，声波越传越弱. 这种声波减弱，比起上面提到的由于波阵面几何扩大而产生的声波减弱，在研究工作中，占有比

较突出的地位，这不仅因为多粒子或不均匀性的散射问题相当复杂，人们对有关规律尚不充分了解，还因为它涉及不少重要的声学应用．就超声应用来说，可以以下面几个为例：对液体中悬浮粒子的检测，对粗晶固体的探伤，对人体组织结构的识别．

另一类普遍存在的声波在传播中减弱的原因则是，由于种种机理，声波不断损失能量，或者说，波动形式的力学能量不断转换为其它种类的能量，在绝大多数情况，转换为热能．这种类型的声波减弱现象，称为介质对声波的吸收，常简称为声波的吸收．这里涉及多种物理现象，具体机理繁多，而各个机理常在不同的环境（频率、温度等等）起着不同程度的作用．对这类减弱原因的研究，多年来众多声学工作者和其它物理领域工作者耗费了大量精力才智，至今尚未结束，这里我们仅十分简单地介绍比较基础的一些结果．

在讨论这类减弱原因以前，我们先来看，声波的吸收减弱是怎样定量表达的．现在的减弱不是由于波阵面的几何扩大，所以我们假设声波是平面波．这样，下面的表达方式也适用或包括散射所引起的减弱．不忽略减弱时，如果只考虑沿单方向传播的时间谐振平面波，质点位移可以写为

$$u(x,t)=u_0 e^{i(kx-\omega t)}, \tag{2.5.46}$$

现在，波在传播过程中不断减弱，$u(x,t)$便表示为

$$u(x,t)=u_0 e^{-\alpha x} e^{i(kx-\omega t)}, \tag{2.5.47}$$

式中α称为衰减系数，它表达了声波随传播距离而减弱的程度．在简单情况下，α是常数，但更普遍地它是频率的函数，它的量纲是长度的倒数，其单位可以有如下两种取法：

设 $$U_\alpha(x)\equiv u_0 e^{-\alpha x},$$

又设x_1和$x_2>x_1$是传播途中两个不同的位置，则

$$\alpha(\mathrm{Np/cm})=\frac{1}{x_2-x_1}\ln\frac{U_\alpha(x_1)}{U_\alpha(x_2)}, \tag{2.5.48a}$$

$$\alpha(\mathrm{aB/cm})=\frac{1}{x_2-x_1}\log_{10}\frac{U_\alpha(x_1)}{U_\alpha(x_2)}$$

$$= 8.68\alpha(\mathrm{Np/cm}), \qquad (2.5.48\mathrm{b})$$

括弧内的符号指单位，Np 是奈培，dB 是分贝，α 有时还用 dB/μs 来计量，

$$\alpha(\mathrm{dB}/\mu\mathrm{s}) = 8.68\times 10^{-6}c(\mathrm{cm/s})\alpha(\mathrm{Np/cm}). \qquad (2.5.49)$$

狭义讲声波的衰减是指用(2.5.47)之类的形式所表示的声波随传播的减弱，在有些文献中则把声波任何形式的衰减笼统地代表声波随传播的减弱．上面提到，以(2.5.47)之类的形式表示时，声波的衰减可以起因于吸收，可以起因于散射，也可以起因于吸收和散射并存．在最后的情况，α 常是两个分量的简单之和．

我们着重讨论吸收，由于吸收，平面波的行为由式(2.5.46)转变为式(2.5.47)．唯象地我们可以用这样一个效应来表达它的转变，即现在的波数k不是实数而是复数，

$$\begin{aligned} k &= k' + ik'' \\ &= k' + i\alpha, \end{aligned} \qquad (2.5.50)$$

k' 称传播常数．按原来的定义，$k=\omega/c$，c 是声速，是由载声介质的弹性模量和密度所决定的．k 是复数，可以理解为弹性模量是复数．弹性模量是应力对应变的某种比，于是最终可以理解为应力和应变，或者二者之一，是复数．

这个数学上的表示法实际上是有其物理解释的．为简单起见，我们设应力和应变都只有一个分量，且设二者中只有一个是复数．设应力是实数，并且是时间谐振的，

$$T = T_0 e^{-i\omega t}, \qquad (2.5.51\mathrm{a})$$

在有吸收时，相应的应变是复数，

$$S = (S' + iS'')e^{-i\omega t}, \qquad (2.5.51\mathrm{b})$$

S 也可以写为

$$S = S_0 e^{-i(\omega t - \phi)}, \qquad (2.5.52)$$

即 S 是复数，这可以理解为应变和应力不同步，应变落后于应力，其相差为

$$\phi = \tan^{-1}\frac{S''}{S'}. \qquad (2.5.53)$$

由单位体积应变能$\int_{s} TdS$的计算可以证明，假若W_s是应力在一周期内对单位体积所储蓄的最大能量，ΔW是一周期内在单位体积所消耗的能量，则

$$\phi=\tan^{-1}\left(\frac{1}{2\pi}\frac{\Delta W}{W_s}\right). \qquad (2.5.54)$$

由此，ϕ和能量损失是直接相联的，$\tan\phi$是一周期内的能量损失分数．当$\phi^2\ll 1$，$\phi\simeq\tan\phi=\frac{1}{2\pi}\frac{\Delta W}{W_s}$，$\phi$称为损失角，又称材料的内耗．

应变落后于应力，意即应力并不立刻产生应变．要产生一个有限大小的应变，需要一个有限长的时间，这是一个相当普遍现象的特例，这个普遍现象，称为弛豫，所需有限时间称弛豫时间，其准确定义我们将在后面再谈．弛豫现象不限于当前所涉及的应力、应变范畴，而在物理学中广泛出现．任一个原来是平衡的热力学系统，当某个外界变量有变化时，这个系统将随之进行自我调整，经过一段时间（虽然是很短的时间，例如10^{-10} s或更短）而到达新的平衡态，这类现象统称弛豫．在声学中，这个外界变量是力学量，所以是弛豫的一大类别，是力学弛豫，有时称滞弹弛豫．在其它物理学领域，外界变量可以是其它性质的量，例如电场或磁场，这些已超出我们所讨论的范围．

下面我们将简称力学弛豫为弛豫，从以上讨论看到，弛豫和声波吸收紧密有关．弛豫有多种多样的具体机理，各自发生于不同的物理环境，作用在不同的范围，因此声波吸收的原因远不是单一的．我们举几个比较普通的例子来作讨论．

首先我们讨论流体中的声波，流体中弛豫的研究，有长久的历史和丰硕的成果．对于理想流体，式(2.3.28)和(2.3.29)曾分别给出

$$p=-\rho\dot{\varphi},$$

$$\rho_e=-\frac{\rho}{c_L^2}\dot{\varphi},$$

合并这两式可得

$$p = c_L^2 \rho_e, \tag{2.5.55}$$

p 是流体中的逾量压强，ρ_e 是流体的逾量密度. 这个公式表明，压强变化实时地产生密度变化. 在实际情况，这两种变化并不是同步的，前面式(2.5.51a)和式(2.5.52)就表明了这一点. 因此，我们需要修正式(2.5.55). 我们提出一个不同步的具体模型，把式(2.5.55)修改为

$$\begin{aligned} p &= c_L^2 \rho_e + \tau' \dot{\rho}_e \\ &= c_L^2 (\rho_e + \tau \dot{\rho}_e), \end{aligned} \tag{2.5.56a}$$

$\dot{\rho}_e$ 是 ρ_e 的时间微分，τ' 是比例常数，

$$\tau = \frac{\tau'}{c_L^2}, \tag{2.5.56b}$$

从式(2.5.56a)容易得出，

$$\rho_e = \frac{p_0}{c_L^2}(1 - e^{-t/\tau}), \tag{2.5.57}$$

此式表示，对流体元施加恒定声压 p_0，在施加的刹那间 ($t = 0$)，$\rho_e = 0$，随着时间消逝，ρ_e 逐渐增加. ρ_e 要增加到式(2.5.55)所规定值 p_0/c_L^2，是需要很长时间的. 式(2.5.57)指出，当 $t = \tau$，ρ_e 的值是极限值 p_0/c_L^2 的 $\left(1 - \frac{1}{e}\right)$. 在弛豫现象中，在恒应力条件下，应变达到新平衡值的 $\left(1 - \frac{1}{e}\right)$ 所需时间，称为恒应力下弛豫时间；式(2.5.56b)中的 τ 便是这样一个弛豫时间. 还有另一种恒应变下的弛豫时间，下面为简便计，我们将不区别这两种弛豫时间. 顺便提到，式(2.5.56a)所表示的模型，即应力不仅依赖于应变，还依赖于应变的时间变化率，有相当普遍的代表性.

由式(2.5.56)我们可以得到实际流体的运动方程. 对于沿 x 方向的一维波，式(2.3.27)给出

$$u_1 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x},$$

把式(2.5.56)代入则

$$\ddot{u}_1 = -\frac{c_L^2}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}(\rho_e + \tau\dot{\rho}_e). \tag{2.5.58}$$

在流体的连续性方程

$$\rho_0 V = (\rho_0 + \rho_e)(V + \delta V)$$

中忽略小量的平方项 $\rho_e \delta V/V$，有

$$\rho_e \simeq -\rho_0\frac{\delta V}{V} = -\rho_0\frac{\partial u_1}{\partial x}. \tag{2.5.59}$$

将 ρ_e 代入式(2.5.58)，运动方程近似地为

$$\ddot{u}_1 = c_L^2\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \tau\frac{\partial^2 \dot{u}_1}{\partial x^2}\right). \tag{2.5.60}$$

设 u_1 是时间谐振的，上式的解可写作式(2.5.47)的形式

$$u_1 = u_{10}\, e^{-\mathscr{L}x}\, e^{i(kx-\omega t)}, \tag{2.5.61}$$

代入式(2.5.60)，得

$$k^2 - \mathscr{L}^2 = \frac{\omega^2}{c_L^2(1+\omega^2\tau^2)}, \tag{2.5.62a}$$

$$2\mathscr{L}k = \frac{\omega^3\tau}{c_L^2(1+\omega^2\tau^2)}. \tag{2.5.62b}$$

由此，衰减系数为

$$\begin{aligned}\mathscr{L} &= \frac{\omega^2\tau}{2c_L^2}\,\frac{\omega/k}{1+\omega^2\tau^2}\\ &= \frac{\omega^2\tau}{2}\,\frac{c_p/c_L^2}{1+\omega^2\tau^2}.\end{aligned} \tag{2.5.63}$$

而

$$\frac{\omega}{k} \equiv c_p = c_L\frac{1}{\omega\tau}\left[2(1+\omega^2\tau^2)\left(\sqrt{1+\omega^2\tau^2}-1\right)\right]^{1/2} \tag{2.5.64}$$

是新的波速，它是角频率 ω 的函数．声速依赖于频率的现象，在前面 2.4.3 节中曾遇到过，称为频散．但 2.4.3 节所讨论的是波导内的声波，那里的频散是由介质的尺寸受限而引起的，而这里涉及

无限大介质内的声波，这里的频散是由于介质本身的性质，现象相似，起因却各异. 由于介质本身的性质，其中传播的声波有频散效应，这类介质称为频散介质，在具有弛豫效应的介质中，声波便是频散的.

在式(2.5.63)和(2.5.64)中，若 $\omega\tau\ll1$，$\tau\ll1/\omega$，即弛豫时间远小于时间谐振声波的周期 $2\pi/\omega$，则

$$c_p=c_L(1+\omega^2\tau^2/2+\cdots\cdots)$$

$$\simeq c_L, \tag{2.5.65}$$

$$\mathscr{L}\simeq\frac{\omega^2\tau}{2c_L}. \tag{2.5.66}$$

式(2.5.63)或(2.5.66)给出的是式(2.5.56)所表示模型的 $\mathscr{L}$ 一般式，它的值依赖于参量 τ，τ 的值则依赖于具体的弛豫机理. 对于流体，首先可以想到，它实际上具有粘滞性，而这个特性可以证明符合式(2.5.56). 前面式(2.2.40)曾经提到，在各向同性的情况，流体的粘滞特性可用两个系数 λ' 和 μ' 来表征，但 $\lambda'=\mathscr{L}-\frac{2}{3}\mu'$，于是可用一个参量 μ' 来表征. 推导类似式(2.5.56)的关系式，可以得出，对应于粘滞性的弛豫时间是

$$\tau=\frac{4}{3}\frac{\mu'}{\rho_0c_L^2}. \tag{2.5.67}$$

以标准大气压下 20 ℃ 的空气为例，$\tau=1.6\times10^{-10}$ s. 于是，当 $\omega\ll1/\tau$，

$$\mathscr{L}\simeq\frac{2}{3}\frac{\omega^2\mu'}{\rho_0c_L^3}, \tag{2.5.68}$$

对于上述情况的空气，$\mathscr{L}\simeq10^{-11}f^2$(Np/m)，$f$ 是频率.

实际流体不只有一个弛豫机理，流体中声波的传播过程一般假设是绝热的，大量实验也肯定了这一点，但这是近似的，流体具有导热性，不能全忽略. 在声波通过时，流体部分受到压缩，因而这部分的温度升高，对周围形成温度梯度. 在这部分流体转成稀疏之前，流体的导热性将引起热量的流动，这时有弛豫. 可以证

明，相应的弛豫时间是

$$\tau = \frac{1}{\rho_0 c_L^2} \frac{k_T}{C_P} \quad , \tag{2.5.69}$$

式中 κ_T 是流体的导热率，C_P 是常压下的摩尔热容；当 $\omega\tau \ll 1$，相应的衰减系数是

$$\mathscr{L} \simeq \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{\rho_0 c_L^3} (\gamma - 1) \frac{\kappa_T}{C_P}, \tag{2.5.70}$$

$\gamma = C_P/C_V$，C_V 是常体积下的摩尔热容.

通常假设，实际流体的总衰减系数是上述两个衰减系数之和. 在每个系数比较小时，相加大概是合理的，和实际测量结果对比，这个总系数对频率的依赖关系大致正确. 可是，它的绝对值偏小或远远偏小，这可能说明，真正的总衰减系数不止是上述两个系数相加，流体里的弛豫机理不止上述两种. 对这个问题的研究，导致一项当时是新的概念：声波和介质的分子结构有相互作用，待发掘的弛豫机理牵涉到介质的分子结构. 到现在为止，我们一直把介质当作宏观的，对声波吸收的研究却把我们引向介质的微观性质. 为了标志这一点，现在把式(2.5.68)和(2.5.70)中两个 α 相加而组成的总衰减系数称为经典衰减系数.

在流体中，最早发现的分子弛豫现象是一种热弛豫. 构成介质的多原子分子不仅有平移的自由度，还有原子之间相互振动和转动的"内"自由度. 当分子碰撞时，分子平移形式的能量有可能转移为内能，或者反过来；它的内能级从而会有跃迁. 传播的声波在压缩区会增加流体分子的平均平移动能，但由于这个平均平移动能可能被部分地转移为内能，压缩区内压强的增加便不是实时的，瞬刻的. 过了一些时候，区域内的流体开始稀疏，压强却会继续增加一段时间，这又因为部分内能会反过来转移为平移动能，这些正是弛豫过程. 这种弛豫可以简单地用外比热和内比热的概念来描叙，所以称为热弛豫. 内外能量的转移，在声波周期接近分子某个内能级的弛豫时间 τ 时，可能性最大，这时声波的衰减也最大.

对于最简单的只有一个内自由度的气体，可以证明，声波的衰减系数是

$$\alpha=\frac{1}{2}\frac{\omega}{c_L}\frac{\omega\tau}{1+(\omega\tau)^2}\frac{C_{int}}{C_{ext}(C_{ext}+R)},\qquad(2.5.71)$$

式中 C_{int} 和 C_{ext} 分别是摩尔的内热容和外热容，二者之和是摩尔热容 C_V，R 是理想气体的气体常数，声波的相速现在不再是恒值 c_L 而是频散的。图 2.5.18 给出只有一个内自由度的气体 CO_2 中声波的单位波长衰减系数 $\alpha\lambda$ 和声速 c_p 在 20℃ 时随频率的变化。

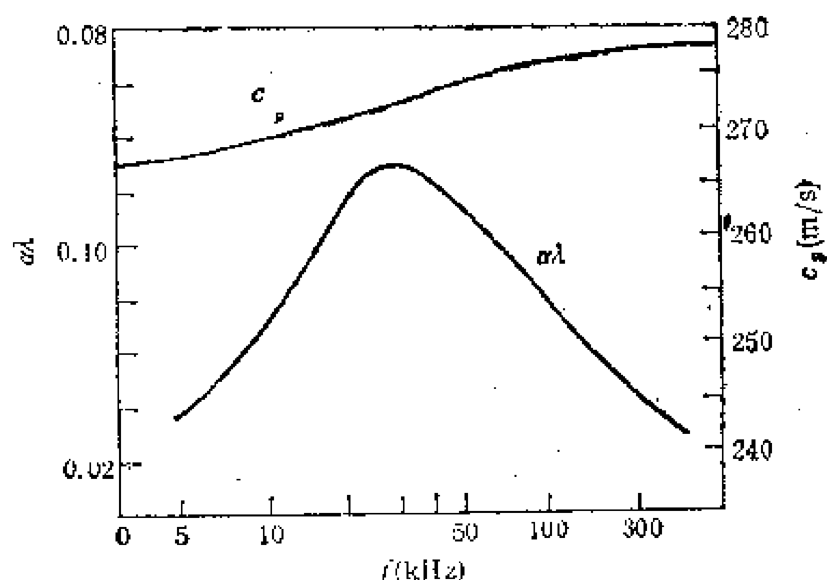


图2.5.18　20℃时 CO_2 气体中声波热弛豫衰减系数和速度随频率的变化

热弛豫效应成功地解释了实验测出的气体中声波衰减系数超过经典的理论值的现象，它同时也成功地解释了许多液体的逾量衰减。可是，它并不能够解释另一些液体的逾量衰减，包括最普通的液体——水。因此，需要寻找另一种弛豫机理，称为结构弛豫理论，它提供了比较满意的解答。这个理论认为，水有两种分子团结构，形成两个内能级，较低能量的正常能级具有比较松散的结构，较高的能级则分子的堆积较密。能级的跃迁不是像热弛豫那样由于声波所带来的温度变化，而是由于声波所导致的压强变化。

我们继续讨论水中声波的衰减，实验发现，海水中的衰减，在

低频，例如小于100kHz时，要比淡水中的大得多．理论和实验表明，这里涉及到化学弛豫这另一种机理，原来海水中溶有多种盐和酸，其中 $MgSO_4$ 盐和硼酸的缔合以及离解受声压的影响．

固体对声波的吸收同样可以用弛豫现象来解释，在大多数情况，同样要用介质微观结构的弛豫现象来解释，虽然在固体里，微观结构不限于分子或其离子．在宏观现象方面，和液体的情况类似，在声波传播过程中，从高温区到低温区的热扩散导致弛豫效应．所不同的是，在固体里，只有在很高的频率时，这项弛豫机理所产生的声衰减才比较显著．在超声频率较高，例如100MHz时，这项声损失还是微小，以致与其它种类的损失相比，可以忽略．

可是，当声波频率更高，吸收问题将牵涉到介质的微观结构，介质不再可以看作是连续的，而表现为分离的晶格．由于热能，这些晶格总在振动，振动可以看作系统的弹性波，这些波需要用量子的概念来描叙，通常是用称为声子的准粒子来描叙．因为是受热振动，这些声子叫热声子．在热平衡状态，热声子有它的分布规律，就是说，在一定的温度下，频率为 ω_s 的声子数 N_s 遵守一定的分布函数规律，即所谓普朗克分布函数．当外来的声波穿过固体时，应变效应和介质的非谐性会干扰这个平衡分布，从而导致弛豫，有弛豫便有吸收．

固体里还有许多其它种类微观结构，例如点缺陷、位错、晶粒间界、伴随相变的结构变化或者序态的变化、非晶结构等等，分别在不同环境下显示弛豫现象，吸收着声波．

值得指出的是，不是声波的所有吸收机理都表现为弛豫效应，我们以声波和热声子的相互作用为例加以说明．当外来的声波频率更高时，或与此相当，在介质温度更低时，为解释声波的吸收，更有效的理论是把外来声波看作声子，随之考虑声波声子和热声子的碰撞或散射．

这里所讨论的一些体声波吸收机理，原则上也适用于表面声波．对于常用的表面声波载声介质，表面声波的吸收一般起源于声波和热声子的相互作用，有时也起源于例如声波和点缺陷的相

互作用．此外，声散射现象也部分地导致表面声波的衰减，因为载声介质的表面常有微坑或划痕．表面声波还有它比较独特的减弱原因．当表面声波器件接触气体时，会有体声波向周围气体辐射，从而减弱传播中的表面声波．

附录2-1　一些单晶材料的弹性劲度 c_{qr} 和多晶或非晶材料的拉梅常数 λ, μ

一些单晶材料的弹性劲度 c_{qr}（10^{10}N/m^2）

单　晶	c_{11}	c_{33}	c_{44}	c_{66}	c_{12}	c_{13}	c_{14}	c_{16}
蓝宝石	4.94	4.96	14.5		15.8	11.4	-2.3	
钼酸铅	10.92	9.17	2.67	3.37	6.83	5.28		1.36
钇铝石榴石(YAG)	33.32		11.50		11.07			
钇铁石榴石(YIG)	26.8		7.66		11.06			
硅	16.57		7.96		6.39			
锗	12.89		6.71		4.83			
金	18.6		4.20		15.7			
铁	23.7		11.6		14.1			
铝	10.80		2.85		6.13			
铜	17.1		6.91		12.2			
镍	25.0		11.85		16.0			
钨	50.2		15.2		19.9			
钛	16.2	18.1	4.67		9.2	6.9		

一些多晶或非晶材料的拉梅常数 λ 和 μ（10^{10}N/m^2）

材　料	c_{11}	$\mu=c_{44}$	$\lambda=c_{11}-2c_{44}$	材　料	c_{11}	$\mu=c_{44}$	$\lambda=c_{11}-2c_{44}$
金	20.7	2.85	15.0	玻璃			
铁	27.7	8.2	11.3	火石	6.13	2.18	1.77
铝	11.1	2.5	6.1	冕牌	5.82	1.81	2.20
铜	21.14	5.46	10.22	派热克斯	7.3	2.5	2.3
镍	32.4	8.0	16.4	有机玻璃	0.848	0.143	0.562
钨	58.1	13.4	31.[illegible]	聚乙烯	0.340	0.026	0.288
钛	16.59	4.4	7.8	聚苯乙烯	0.58	0.12	0.34
熔石英	7.85	3.12	1.61	橡皮	—0.1	-7×10^{-5}	—0.1

注：表中数据准确度仅供参考。

附录2-2 一些多晶或非晶固体材料中室温下的声速和密度

材料	c_d (10^3m/s)	c_s (10^3m/s)	ρ (10^3kg/m^3)	材料	c_d (10^3m/s)	c_s (10^3m/s)	ρ (10^3kg/m^3)
金	3.24	1.20	19.8	熔石英	5.968	3.764	2.2
铁	5.85	3.23	7.8	玻璃			
不锈钢347	5.79	3.10	7.0	火石	4.26	2.56	3.6
铝	6.26	3.08	2.7	冕牌	5.66	3.42	2.5
铜	4.70	2.26	8.9	派热克斯	2.67	1.12	1.18
镍	5.63	2.96	8.8	有机玻璃*	2.7	1.1	1.18
钨	5.46	2.62	19.1	聚乙烯*	1.95	0.54	0.9
钛	5.99	2.96	4.54	聚苯乙烯*	2.35	1.12	1.06
铅	2.16	0.7	11.4	橡皮(一种)*	—1.0	—0.03	—0.9
银	3.60	1.59	10.5		*频率为 1MHz 时		

注：表中数据准确度仅供参考。

附录2-3 一些流体的声速和密度

一些液体的声速、体积弹性模量和密度

液体	温度 (℃)	c_d (10^3m/s)	B (10^9Pa)	ρ (10^3kg/m)
水	0	1.4023		
	4	1.4216		
	10	1.4472		
	20	1.4823	2.18	0.998
乙醇(酒精)	20	1.15		0.79
蓖麻油	20	1.54		0.95
甘油	20	1.98		1.26
汽油(#80)	20	1.14		0.706
水银	20	1.45	25.3	13.6

大气压下一些气体的声速和密度

气　　体	温　度 (℃)	c_E (m/s)	ρ (kg/m)
空气	0	331.6	1.293
	20	343	1.21
氧	0	317.2	1.43
氮	20	349	
氢	0	1269.5	0.09
二氧化碳	0	258(低频) 269(高频)	1.98

参　考　书　目

[1] Robert Bruce Lindsay, Mechanical Radiation, McGraw-Hill, New York (1960).

[2] Julius Miklowitz, The Theory of Elastic Waves and Waveguides, North-Holland, Amsterdam (1978).

[3] Karl F. Graff, Wave Motion in Elastic Solids, Oxford University Press, London (1975).

[4] A. S. Nowick and B. S. Berry, Anelastic Relaxation in Crystalline Solids, Academic Press, Inc., New York (1972).

第三章　超声的产生和接收

应　崇　福

§3.1　概　　述

如果不计固体里的晶格热振动，那么在自然界里很少有超声，特别是为人类(而不是为其它动物)用的超声，因此需要人为地产生可实用的超声．人耳不能听到超声，于是又需要设计仪器来察觉、测量或显示超声．超声与超声之间具有繁多的细微区别，从而不可能只用一种方法来产生或接收．一般我们按频率高低、功率大小、在气体、液体或在固体中存在等等标准来划分．在长期的探索中，人们先后找到了多种产生和接收超声的方法．

本章将介绍一些目前比较常用的产生和接收超声的方法．超声是一种力学波，为了产生这种波，需要在源处激发机械振动．单纯的机械方法似乎是一种很自然的手段，可是发现，用直观的机械方法，如历史上最早靠手摇齿轮来打击的方法，只能勉强产生很低频率的微弱超声．要产生例如兆赫级的超声则几乎不可能．随后发明了不那么直观的机械方法，即用高速流体喷注来激发流体的机械振荡，这是实验室里最早出现的一种比较有效的产生超声的办法，它的一些经过改进的类型至今仍在工业上应用，简单地总称为哨．不过，即使这种手段也难以产生近兆赫的超声．19世纪末，又发现了压电效应，在这基础上，加上电子学的发展，终于找到了当前主要产生超声的方法．这不仅因为它能用于很宽的频率范围，还因为它能控制所发射超声的许多性能．类似地，利用了磁致伸缩效应，也成为当前一种重要的产生方法．近年来正在发展利

用激光激励超声的技术.

至于超声的接收，在初始时期即使原理上也不那么容易找到答案，最初使用过火焰对声波的敏感性这一原理来检测声波，这自然是不太可靠的. 稍后发现了传波管内或棒面上观察粉末驻波图案的机械方法，现在则大都利用逆压电效应，此外，也可利用热学方法、光学方法等等.

发射或接收超声的器件叫超声换能器. 换能的含义是把一种形式的能量，如声、光、电、热等形式之一，转换成另一种形式. 超声换能器所转换的对象显然是超声. 并不是所有发射或接收超声的设备都形成专用的器件，从而形成超声换能器. 另一方面，有些种类的换能器既可产生超声，又可不加改变而接收超声；这类换能器我们称为可逆的. 严格讲，可逆性要求任一方向的能量转换是等效率的，但有些叫做可逆的超声换能器只是近似地满足这个条件. 本章下一节在介绍产生和接收超声的一些常用方法时将先讨论几种可逆超声换能器.

压电换能器是目前最常用的可逆超声换能器，它在发射和接收中都占有独特的地位，为此，本章第三节将较为详细地介绍这类换能器. 其实，在后面的有些章节中将再次进行较深入的分析，本章第三节只是提供一些必要的基础知识.

超声换能器总包括一个振动体，从声学理论讲，振动体的声波辐射是个重要而内容甚为丰富的问题. 例如，要在固体内部或表面上激发超声波，一般是把超声换能器紧贴或粘在固体的表面. 固体表面的部分区域受换能器的力作用，将有超声由受力处发向固体内部和它的表面. 不同种类的换能器将激发不同类型、不同分布的作用力，这些力所各自激发的不同类型、不同分布的超声是H.Lamb本世纪初开始研究的问题，现在统称Lamb问题. 直到现在，这个问题还在探讨和发展中. 反过来，如果我们需要发射指定种类的超声，应当选用什么样的力源以及相应的换能器呢? 有关的理论分析和实验测量同样都不简单，本章将无意涉及这项内容.

§ 3.2 产生和接收超声的一些常用方法

3.2.1 可逆超声换能器

这里将讨论压电、磁致伸缩、静电和电磁几种可逆超声换能器. 对压电换能器,在 § 3.3 将专作较详细的介绍;对磁致伸缩换能器,在第七章也将另有介绍,因此对这两种换能器,这里只很简单地提一下.

压电换能器 有些种类的单晶具有压电性,就是说,当这些晶体沿一定的方向受压强作用,或作长度变化时,会在表面产生数量上成比例的束缚电荷. 这些单晶体有一个共同的特征,便是结构上没有对称中心. 压电效应是法国 Curie 兄弟(J. Curie 和 P. Curie)1880年从理论上预测和实验上验证的. 不久有人预言了逆效应,Curie兄弟又很快地在实验上作了验证. 正、逆压电效应分别是压电换能器作为超声接收、发射器件的基础. 1917年法国的P. Langevin为寻找用声波探测潜艇的方案,经过一段曲折,开始用压电单晶石英做换能器. 又因为当时拥有刚发明的高频电振荡器,所以在一年多时间内便获得可观的成就,在水下1 km 多以外探到潜艇,这样开辟了超声压电换能器的实用领域. 当时Langevin所发射和接收的声波,其频率是几十千赫. 现在,利用石英单晶能够在实验室里产生 10^{11}Hz的超声.

半个多世纪来,压电换能器的压电材料,其品种已大为扩充,不再限于单晶体,而更多采用极化陶瓷、极化高分子薄膜等(参看 § 3.3).

磁致伸缩换能器 这种换能器所依据的是磁致伸缩效应,或称 Joule 效应. 一般认为,J.P. Joule 是磁致伸缩效应的发现者,实际上在 1847 年他发表描述论文之前,已有一些人对这个现象进行过探讨. 如果把铁磁材料制成的棒或管,放在沿棒形或管形的磁场内,随着磁场大小的变易,棒或管的长度会发生改变,这个改变和磁场的方向并没有关系,这种效应便是磁致伸缩效应. 严格讲,是纵向磁致伸缩效应,因为在强磁场中还有一种体积磁致伸缩

效应．磁致伸缩的逆效应也是成立的，就是说，当铁磁体发生形变时，它的自发磁化强度会发生变化．实用中，较少用磁致伸缩换能器来接收超声．

表面看来，磁致伸缩换能器和压电换能器很相似，虽然后者是受交变电场的作用，而前者则受交变磁场的影响．但二者的一个根本差异在于，压电体的伸缩和电场的方向相关，而磁致伸缩体的伸缩与磁场的方向无关．因此，如果把一个铁磁棒放在（过零）交变磁场内，当磁场作周期性变化时，铁磁棒也会周期性伸缩，但伸缩频率将是磁场变化频率的两倍．此外，单位长度的变化和磁场大小之间的关系不是线性的．为此，在设计磁致伸缩换能器时，通常除施加交变磁场外，还附加直流的偏压磁场，它的值一方面要大于交变磁场的峰值，一方面又要选取适当，使应变-磁场曲线上的工作点在曲线的陡峭区域，从而引用给定的磁场变化，可得到最大的同频率长度变化．

铁磁材料多用镍或其它合金．因为镍是贵重金属，也有用铝铁合金．近年来还在发展铁同Tb、Dy等稀土合金，据报道静态磁致应变有很大的提高，非晶态合金是另一类有前途的材料．

对磁致伸缩换能器，后面第七章将有更详细的讨论．此外，应用上还有“压磁”效应这样一个名称，它的含义还不完全统一，有人用来指磁致伸缩效应，有人用于非金属的铁氧体陶瓷材料，也有人专指具有偏磁场的磁致伸缩效应．

静电换能器　静电换能器有时简称ESAT，是一种电容式超声换能器．假设要在导电的固体样品中产生超声波，而这个样品外表有一个平面，换能器就以这个平面为电容器的一极，外加一个平板作为另一极，共同形成一个电容器．然后在电容器两端施加交变或瞬变电压，这样就可以在样品表面产生交变或瞬变力，从而向样品内部发射超声．这时和磁致伸缩换能器类似，也出现频率不一致的问题，解决办法也是加一个偏压．反过来，假若样品内部原来有声波，当投射到样品表面，样品表面会振动，从而改变电容器的电容值．用电学方法加以测量，就间接测出了表面振动的振

幅，也就是入射超声的振幅．静电换能器能产生或接收几兆赫以至几百兆赫的超声．

由上述原理可见，静电换能器以样品作为它的组成部分，却不接触样品，因而可以对样品不作任何扰动．

现在对这种换能器的原理作稍许定量的分析，从产生超声讲，电容器两极加有电压，于是两极上出现极化表面电荷，其密度为

$$\sigma = C(V_{dc} + V), \tag{3.2.1}$$

C 是电容器的单位面积电容，$V = V(\omega)$ 是外加的交变（或瞬态）电压，V_{dc} 是直流偏压．

$$C = \frac{\varepsilon_0}{d - (\xi_1' - \xi_1)}, \tag{3.2.2}$$

ε_0 是两极间介电质（空气）的电容率，d 是两极的间隙，ξ_1' 和 ξ_1 分别是外加电极和样品平面的位移，如图 3.2.1 所示．两个电极单位面积上表面电荷之间，有库伦力 F 作用

$$F = \frac{1}{2\varepsilon_0}\sigma^2, \tag{3.2.3}$$

代入式(3.2.1)和(3.2.2)，在

$$V \ll V_{dc} \text{和} \xi_1', \xi_1 \ll d \tag{3.2.4}$$

的条件下，式(3.2.3)线性化为

$$F \simeq \frac{C_0^2}{2\varepsilon_0}(V_{dc}^2 + 2V_{dc}\ V), \tag{3.2.5}$$

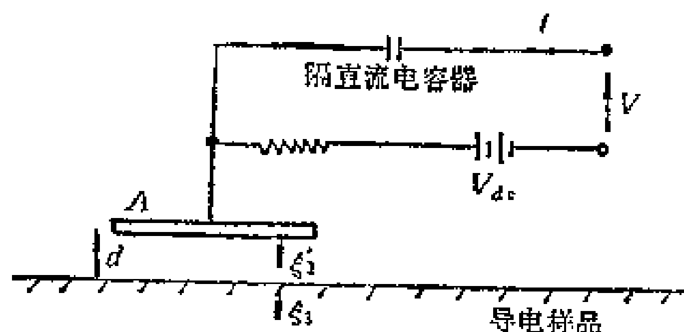


图 3.2.1 发射超声用静电换能器

式中

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0}{d}.$$

是电容器单位面积的箝制电容．产生声波时，静应变 $\frac{C_0^2}{2\varepsilon_0}V_{dc}^2$ 没有作用，起作用的是加在样品表面的交变（或瞬变）力

$$F(\omega) \simeq \left(\frac{C_0^2}{2\varepsilon_0}V_{dc}\right)V(\omega) = \frac{\varepsilon_0}{2d^2}V_{dc}\ V(\omega), \tag{3.2.6}$$

这个力将向样品内部辐射超声．从式(3.2.6)可见，假设条件(3.2.4)得到满足，力 $\tilde{F}(\omega)$ 将和外加的 $V(\omega)$ 成正比．

如果电容器之间不加偏电压，那么

$$F=\frac{1}{2\varepsilon_0}\sigma^2=\frac{1}{2\varepsilon_0}(CV)^2 \quad \simeq\frac{1}{2\varepsilon_0}C_0^2V^2.$$

设 $V=V(\omega)=V_0\sin\omega t$，则

$$F\simeq\frac{\varepsilon_0}{4d^2}V_0^2(1-\cos2\omega t),$$

$$\tilde{F}\simeq-\frac{\varepsilon_0}{4d^2}V_0^2\cos2\omega t, \tag{3.2.7}$$

即声波频率为交变电压的两倍．

顺便提到，为了得到较强的超声，需要较大的 $\tilde{F}(\omega)$，即较高的 $V(\omega)$ 和 V_{dc}．限制电压取值不能过高的原因是，两个电极之间的间隙 d 很小，一般在 10μm 左右，因此空气容易被击穿．为此，可以在两电极之间搁置一片电介质，如云母片，聚脂薄膜之类．实验表明，这样做一般并不影响样品表面的自由状态．

从接收超声讲，静电换能器的外加平板电极是固定不动的，而作为第二电极的样品表面则因受到样品内部声波的投射而作振动，以此导致两极间间隙的变化，导致电容器电容的交变或瞬变．设两电极间加有偏电压 V_{dc}，并且加压是通过一个大电阻（几十兆欧）实现的，则随着电容器两极间间隙的变化，可以测到一个正比于样品表面振幅的电压 $V(\omega)$：

$$V(\omega)=V_{dc}\frac{\Delta d(\omega)}{d}, \tag{3.2.8}$$

这里 ω 是入射声波的频率．

作为接收器，如果采用性能比较好的输入放大器，例如在 30MHz 可以测得约 10^{-4} Å 的位移．可见静电换能器是高灵敏度的位移检测器．为了保证电容器电容的变化正比于电极间间隙的变化，可以进一步在平板电极的外沿加防护环以减弱边缘效应．如果样品是不导电的，应在表面镀上金属薄膜如铜膜，也有人提出

采用偏电压相反的两个平板电极的做法.

静电换能器的换能效率比较低. 定义在发射情况下换能效率为输出声功率对可利用电功率之比，在接收情况下为入射声功率对输出电功率之比. 那么,可以理论上估计,即使在换能器与电源之间或与电负载之间加插匹配电感,并使换能器在谐振频率工作,对于铝样品,当频率为1.5MHz,分数带宽为0.1，直流偏压为300 V，两极间距离为 6μm 时，换能效率约为 3×10^{-5}. 这个值大体上得到实验验证.

静电换能器原理简单,又是非接触的,但它要求样品的表面非常平整,两个电极十分平行且相隔很近，整个装置相当稳固，因此它目前主要用于实验室内作精密测量. 下面我们将介绍另一种比较便于大量应用的非接触式可逆换能器.

电磁换能器 英文简称EMAT，是60年代中期偶然发现的,很快地得到广泛的研究和应用. 同ESAT类似，这种换能器也是在导电固体样品的上空平行放置一个平面体，但现在不是金属平板,而是平面金属线圈,通以交变电流,这样,作用在样品表面的是电磁场，而不是纯电场. 平面线圈和样品表面之间的间隙是毫米数量级，比ESAT的电极间间隙要大得多，平行度也就不要求那么高. 因此EMAT和ESAT一样有非接触的特点，但便于使用,能在工业上普及,例如,已用于炽热钢材. 另一方面,电磁换能器也需要一个直流磁场,但作用独特.

电磁辐射的实验原来是为液氦低温下单晶中研究螺旋子而设计的，1967年发现，这种电磁换能器在室温下也可以产生与螺旋子无关的超声波. 随后，理论上又只需用经典的电磁理论来加解释,而不必涉及螺旋子——声子耦合.

我们先讨论样品是导电的但不是铁磁的情况,比如样品为铝,假设样品有一个平面表面，在表面上空有一个通以交变电流 I 的线圈,于是在导电体表面上空有交变磁场,其强度设为 **H**，如图3.2.2所示. 为简单起见,设 **H** 只是 (z, t) 的函数,其方向沿 x 轴,**H** 会透入导电体,但由于趋肤效应，透入后会依指数减弱，以致透

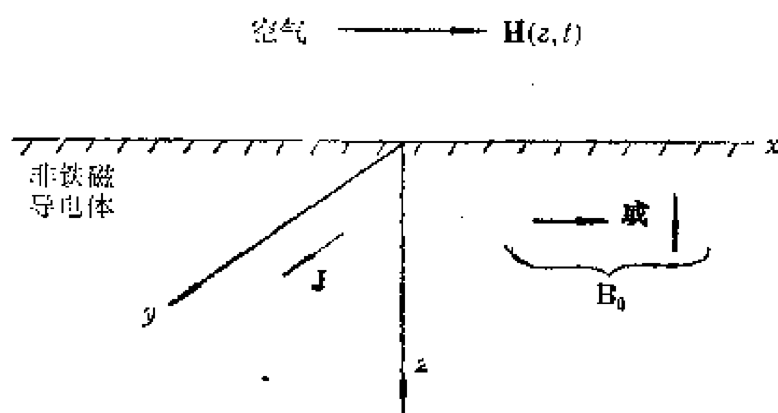


图 3.2.2 超声波的电磁法产生

入不深，透入厚度是

$$\delta=\frac{1}{\sqrt{\pi\sigma\mu f}},\tag{3.2.9}$$

这里 σ 是样品的导电率，μ 是它的磁导率，f 是交变磁场的交变频率. 在 **H** 能够透入的导电体区域，如果忽略位移电流，按安培定律，磁场将产生电涡流，其密度为

$$\mathbf{J}(z,t)=\nabla\times\mathbf{H}(z,t),\tag{3.2.10}$$

J 的方向沿 y 轴. 现设在电导体的表层，在交流磁场之外，另加一个静磁场，相应于静磁通量密度$\mathbf{B}_0$，则电流密度 **J** 会受到 Lorentz 力，其密度为

$$\mathbf{F}(z,t)=\mathbf{J}(z,t)\times\mathbf{B}_0.\tag{3.2.11}$$

这个交变的力直接作用于电子，又通过电子和晶格的碰撞，作用于晶格，使导电体的薄皮层受力，成为发射超声的声源. 所发射超声的频率等于 **H** 的频率，也就是悬空线圈内电流 I 的频率. 当激励线圈面积足够大，超声的传播方向将沿 z 轴指向样品的内部. 如果 $\mathbf{B}_0$ 的方向沿 x 轴，晶格所受力将沿 z 方向，产生的超声便是纵波；如果 $\mathbf{B}_0$ 的方向沿 z 轴，晶格所受力将沿 x 方向，那么将产生横波.

在相反情况，就是当样品表面有超声自内部投射，而样品上空只有空线圈时，设射来超声的质点位移为 **u**，则带有正电荷的晶格阵点具有速度 $\dot{\mathbf{u}}$. 由于 $\mathbf{B}_0$ 的作用，晶格将受力 $\dot{\mathbf{u}}\times\mathbf{B}_0$，从而产生电

流密度 J. 交变 J 将导致样品的表面层出现交变磁场 H,这个交变磁场将漏出导电体,按法拉第定律在样品上空的线圈内感生电动势,这样,电磁换能器同样可用来检测样品内的超声.

在作为超声接收器时,直流 B_0 是不可缺的,但作为超声发生器时,直流 B_0 原则上可用可不用,因为 $B_0=0$ 时,上空线圈所产生的交流磁场 H,也将对 J 产生 Lorentz 力,这个力总是沿着一个方向,总使线圈与导电体相互排斥,不过这时超声频率是线圈内电流频率的两倍. 为得到足够强的超声,需要很强的交变 H,即很强的交变电流.

电磁换能器的能量转换效率也是不高的,以发射为例,进入导电体的电磁能量,大部分消耗为发热,只一小部转换为声能,能量转换效率和 B_0、f 以及样品的材料有关. 对上述理想情况,可以证明,单位表面面积所产生平均声功率对进入单位表面面积的电磁功率之比是

$$\eta = B_0^2/\pi\mu_0\rho c f\delta\left[1+\left(\frac{2\pi f\delta}{c}\right)^2\Big/2\right], \qquad (3.2.12)$$

式中 μ_0 是真空的磁导率,ρ 是导电体的密度,c 是导电体内的声相速. 从上式可以看出,所产生超声的振幅和 B_0 成正比. 对于铝金属和纵波,当 $f=10\text{MHz}$,则在室温下

$$\eta = 5.56\times10^{-5}B_0^2,$$

式中 B_0 的单位是特斯拉. 作为参考,可以指出,铝铁钴 5 的剩余磁感应强度约为 1.2T.如果采用电磁铁,可以产生高得多的 B_0.

利用 Lorentz 力的作用,不仅能产生体声波,也能产生表面声波和導导声波(2.4.3 节).

下面举几个实际电磁换能器的线圈实例. 图 3.2.3 是一个长方形线圈,图 3.2.4 是一个扁平螺旋(薄饼)线圈,图 3.2.5 是一个曲折(蛇形)线圈. 这几个图中都画出了相应涡流的近似分布,但没有画出产生 B_0 的磁铁. 线圈和样品间的距离显然夸大了. 曲折线圈具有相位匹配的换能作用,是常用的表面声波或 Lamb

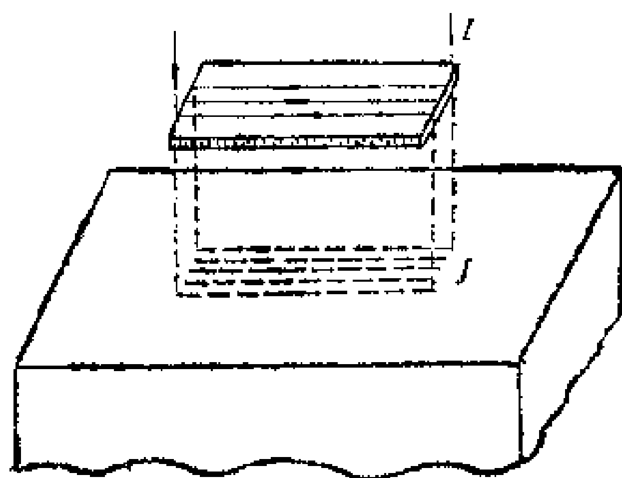


图 3.2.3　长方形线圈

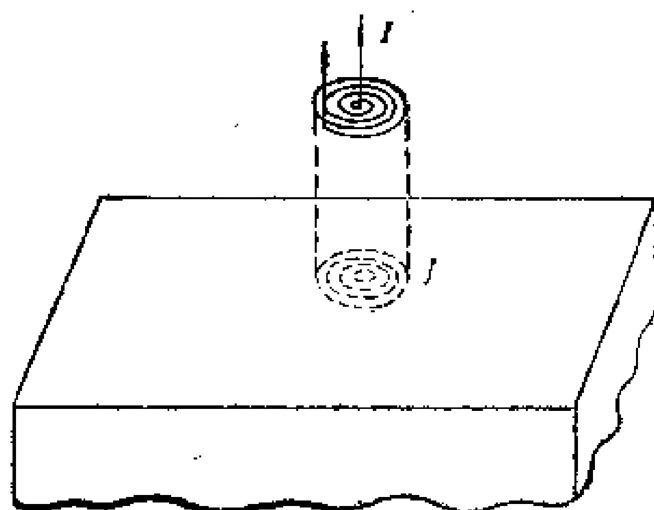


图3.2.4　扁平螺旋线圈

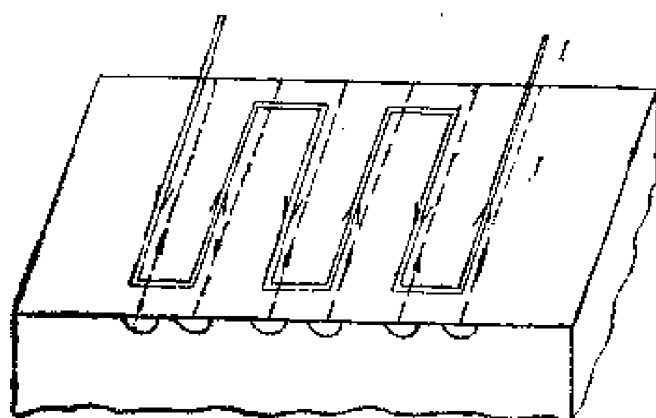


图 3.2.5　曲折(蛇形)线圈

波的兆赫级换能器。这种换能器也能用来产生体声波，并因为具

有相位匹配作用，还可以进行频率操纵，即依靠改变激励电流的频率来操纵辐射声束的方向．图3.2.6显示的换能结构，可以发射方向随电流频率变化的SV波和P波．电磁波的波长远大于同频率声波的波长，电磁波的波数因此可忽略．于是，曲折线圈的空间周期 $2b$ 沿声波传播方向的投影等于声波波长的奇数倍；即

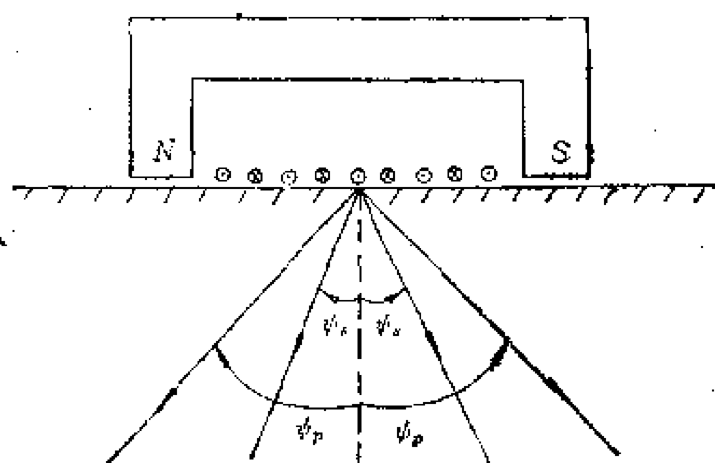


图 3.2.6　用曲折线圈产生可变方向的体声波

$$\sin\psi=\frac{n\lambda}{2b}, n=1,3,5,\cdots\cdots,$$

$$\psi=\sin^{-1}\left(\frac{nc}{2bf}\right). \tag{3.2.13}$$

Ψ 是声波传播方向和样品表面法线的夹角，c 是样品内声速，f 是线圈内交变电流的频率，也是声频率．对于基频 $n=1$，有实验证明，假设 f 足够大，以致 $f=\frac{c_s}{2b}$（c_s 是 SV 横波波速），就会出现 $\psi_s=\pi/2$ 的 SV 横波．继续增大频率，横波的 ψ_s 将逐渐减小，而当 $f=\frac{c_d}{2b}$，便同时出现 $\psi_p=\frac{\pi}{2}$ 的 P 波．再增大频率，两个声波的 ψ 角都将减小．

图 3.2.6 标出，体声波实际上是向左右两侧同时发射的，如果要减弱其中一侧的发射，需要采取措施，例如把线圈分组，而对不同组的电流取不同的相位．

在以上讨论中，导电样品假设是非铁磁性的．如果导电体同时是铁磁体，包括亚铁磁体，则电磁换能器又会通过另一个机理产生或接收超声，这个机理是前面提过的正、反磁致伸缩效应．下面着重分析超声的发射．Lorentz 力在强 B_0 下才产生较强的超声，

但实验表明，在铁磁体里，在较窄的 B_0 变化范围，B_0 很弱时也可以产生强度可比拟的超声. 例如，对于热轧铁 Armco，在 $B_0 \simeq 0.03\text{T}$ 附近，可以产生超声，其幅度与 B_0 大到 1T (磁化强度接近饱和)时相当. 在 $B_0 \simeq 0.03\text{T}$ 和 $B_0 \simeq 1\text{T}$ 之间，超声幅度先迅速下降，然后随 B_0 的增加而接近线性地增长. 在上述 $B_0 \simeq 0.03\text{T}$ 附近，Lorentz 作用力很小，但磁致伸缩作用力很强，对后一效应，从铁的静态应变随 H_0 的变化曲线可以作一定程度的估计. 不过，这个估计是很粗糙的；因为，对于电磁换能器，起作用的不是静态的而是动态的磁致伸缩系数，所以，应当作动态分析. 和 Lorentz 力相对应，铁磁体所受的磁致伸缩有效体力可以大致如下导出. 假设对铁磁体外加交变磁场，或同时叠加直流磁场，则由于其磁性、磁致伸缩性，以及一般的弹性，铁磁体将磁化并出现应力，其磁通量密度 B_i 和应力分量 T_I 满足式

$$B_i = \frac{\partial B_i}{\partial S_J} S_J + \mu_{ij} H_j, \quad i, j = 1, 2, 3 \tag{3.2.14a}$$

$$T_I = c_{IJ} S_J + \frac{\partial T_I}{\partial H_j} H_j, \quad I, J = 1, 2, \cdots 6 \tag{3.2.14b}$$

式中 H_i 是外加交变磁场的强度，S_J 是应变，c_{IJ} 是弹性系数. 这里，对 T，S 和 c 都用了缩写下标(见 2.2.3 节). $\dfrac{\partial B_i}{\partial S_J}$ 标志逆磁致伸缩效应，$\dfrac{\partial T_I}{\partial H_j}$ 则标志正磁致伸缩效应，称磁致伸缩应力系数. 如果不存在磁致伸缩效应，这两个系数为零，则式(3.2.14)退化为普通的关系式 $B_i = \mu_{ij} H_j$ 和 $T_I = c_{IJ} S_J$. 由式(3.2.14)可以算出应力分量；以 T 表示应力张量(见 §2.3.1)，则样品单位体积受力为

$$\mathbf{F}_M = \nabla \cdot \boldsymbol{T}, \tag{3.2.15}$$

这和 Lorentz 力 $\mathbf{F} = \mathbf{J} \times \mathbf{B}_0$ 是对应的.

实际上，作用在铁磁体单位体积的力不止上式的 $\mathbf{F}_M$，$\mathbf{F}_M$ 是种"局部力"，在此之外，在外磁场作用下，在磁性材料中还会同时出现"非局部力"：

$$\mathbf{F}'_M = \mu_0(\mathbf{M}\cdot\nabla)\mathbf{H}_T, \qquad (3.2.16)$$

$\mathbf{H}_T$ 是外加总磁场，$\mathbf{M}$ 是磁化强度．但是，在目前出现的磁致伸缩峰的情况，对于常见的一些铁磁体，$\mathbf{F}'_M$ 比起 $\mathbf{F}_M$ 可以忽略不计．

3.2.2 非可逆的一些产生方法

非可逆产生方法，是指这些方法只能产生超声而不能在条件基本不变的情况下用来接收超声．在 §3.1 概述中提到的机械产生方法，便是这样一类方法，其中声哨是目前仍在使用的换能器，后面第七章将详细介绍，本节便不多谈．但机械产生方法不仅限于用在流体介质的声哨；对于固体样品，也有用冲击、断裂这些机械方法来产生超声的，在目前，后两种方法主要是为模拟"声发射"的声源．利用冲击现象时，让快速运行的单个粒子或粒子群，或者气流，冲击固体样品表面的一个微小区，由此在固体内部产生球面纵波和横波．气流产生超声的例子有：通过一个毛细管的高压下的氦气．利用断裂现象时，把玻璃毛细管或者铅笔芯压在固体表面的一点准静态地加压，直到毛细管或笔芯断裂，以产生瞬态超声波．

另一类不可逆地产生超声的方法是采用聚焦激光、电子束、离子束或电弧等．下面只讨论激光方法，这是近20年发展起来的，可以用于液体，也可以用于固体．当前，较多的研究集中在固体内产生超声，主要是为了在超声检测的应用中做无（机械）接触的超声源．

对于固体，一般使用以低频重复的短脉冲激光；重复频率从几赫到几十赫，脉冲延续时间从约十到几十纳秒．曾试用过更短的、时间只有皮可秒级的激光脉冲，这时产生出脉宽仅几微秒的超声纵波，在剃胡刀片内可以分辨出多次反射．也有试用过高重复频率的短脉冲激光，再选用高次谐波，得到几千兆赫的超声纵波．光波长从紫外到近红外．至于脉冲能量，早期用得很大，例如约1J，个别的甚至达到500J．近来在探索减小能量，以便于实际运用．发现能量小到几十个微焦时，经过聚焦，也可以产生可测出的

超声．例如，脉冲能量约 $20\mu J$，聚焦使功率密度约达10MW/cm时，可以用一般的压电换能器测到超声产生，这是目前的结果，发展工作仍在继续中．

如果改变样品的自由表面状态，产生超声的效率可以提高几倍或几十倍，特别是产生超声纵波的效率．在样品表面粘上透光的固体薄层，比如 1mm 厚的显微镜玻璃片，或者只在表面上加一层轻油或水，都是一些可行的改变自由表面状态的办法，这些办法同时改变了所产生超声的指向性．

用激光产生超声的机理，随激光功率密度的大小而分为两类．对小的功率密度（对固体样品，大致小于MW/cm^2 的数量级），产生超声的原因是，被吸收的光能转换为热能，这时激光脉冲起着瞬态的小区域热源的作用，导致样品表面下的小区域发生热膨胀，从而产生热弹应变和应力，成为超声纵波、横波以至表面波的声源．这个声源可以近似为一组平行于样品表面的偶极子应力．显然，不同的材料有不同的热膨胀系数、热导系数等，因而不同材料的样品产生超声的效率是不一样的．另一方面，当激光的功率密度大，例如大于 $10MW/cm^2$ 时，则出现另一种情况，这时样品表面局部熔化，以至沸腾，出现材料烧蚀．对金属样品，一旦出现烧蚀，在金属表面及其上空，将形成金属等离子体，其综合效果可以看作是：由于从表面移走了动量，对表面便产生了一个法向的脉冲反冲力，因此会在固体样品内产生超声，象 Lamb 问题所讨论的．

早有人在理论上预计过，如果样品的表面受到箝制，即使激光的强度在热弹范围而没有达到烧蚀值，产生超声的效率会有显著的提高．当样品表面覆盖了一薄层流体，如前面提到的轻油，这时虽然固体表面没有受烧蚀，覆盖流体却会蒸发，同固体表面烧蚀有类似的效果，就是说，蒸发中油粒子从样品带走动量，加强了声源．

3.2.3 非可逆的一些接收方法

3.2.1 节提到了几种可逆的接收超声的方法，依据不同的基

本物理现象，还有众多的不同类型的非可逆接收（察觉、测量、显示）方法．这些方法中，有些主要测量超声的位移，有些主要测量超声的强度，有些又主要测量超声的功率；有些相当粗糙，有些则比较精确；有些适用于流体内的超声，有些更适用于固体内部或其表面上的超声；还有些直接显示出超声场的图像．

力学方法 前面(§3.1) 曾提到粉末散布法．一个有重要用途的力学方法是利用伴随超声的辐射压力．声波的应力（更常叫声压），是交变的，但声波所携带的辐射压力却是单向的，是“直流”力，它起源于声波和载波介质的非线性效应．实际上，有两类辐射压力，一类叫瑞利辐射压力，存在于有声波传播的装有固定质量流体的封闭容器之内．这时，容器内不直接处于声场中的流体，只通过流体密度和压强为保持平衡所产生的变化，而和声场相互作用．另一类辐射压力叫 Langevin 辐射压力，作用于开放容器内的流体中，这时流体的表面是自由的．人们常用的、根据辐射压力以测量超声功率的方法就属于这种情况．辐射压力常称辐射压强，实际上是压力而不是压强，只是由于历史原因才保持了压强的名称．

辐射压力只在不同阻抗介质的交界面，或在吸声介质的内部，才起着作用．对于平面波途中有障碍物的情况，仔细的分析证明，沿着入射方向的 Langevin 辐射压力F是

$$F = D \cdot SE_0, \tag{3.2.17}$$

式中 E_0 是声波的能量密度，S 是障碍物截挡声波的面积，D叫拽力系数，依赖于障碍物的声反射程度以及障碍物表面和声束相交的角度，如表 3.2.1 所示．对于平面声波，$E_0 = \frac{I}{c}$，I 是声强，c 是声速，因此，测量F便可确定声强I．

为测定辐射压力，一种简单的装置是在液体中能够悬浮的浮沉子，如图3.2.7所示．浮沉子上段伸出液面的杆用以指示浮沉子平衡时的悬浮深浅，这个杆可用一根细玻璃管制作．液体中的气泡可以通过浮沉子中部的小孔和玻璃管逸出．有超声照射时，浮

表 3.2.1 平面行波辐射压力表示式(3.2.17)中的系数D

障碍物(ρ_2, c_2)的状态	交界面的能量密度	D
完全吸收体；S和声束垂直	障碍物前面：$E=E_0$ 障碍物后面：$E=0$	1
完全反射体；S和声束垂直	前面：$E=2E_0$ 后面：$E=0$	2
完全反射体；S 和声束相交 θ角	前面：$E=2E_0$ 后面：$E=0$	$2\cos^2\theta$
部分反射界面；S 和声束垂直	前面：$E=2E_0\dfrac{\gamma^2+1}{(\gamma+1)^2}\equiv E_1$ 后面：$E=E_0\dfrac{4\gamma}{(\gamma+1)^2}\equiv E_2$ $\gamma=\rho_2c_2/\rho_1c_1\neq 1$	$2\dfrac{(\gamma-1)^2}{(\gamma+1)^2}=\dfrac{E_1-E_2}{E_0}$
刚性小重球，半径a		$1.2(ka)^4$ (如果在驻波场内，$2.7ka$)

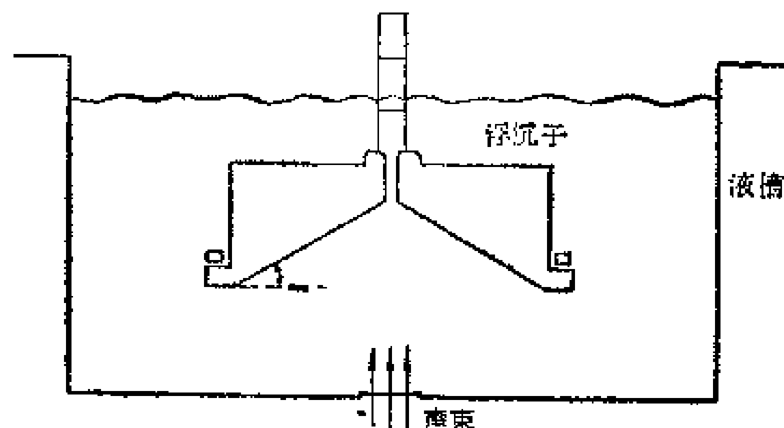


图 3.2.7 测量辐射压力的浮沉子

沉子受辐射力上升，直到新的平衡位置. 为了校准辐射力的大小，可以把一些已知质量的轻环套在杆上，同时观察浮沉子的相应升降. 为了保证浮沉子稳定地上下移动，应当用轻材料制作浮沉子的主体，而在主体底部另套加较重的沉环. 为了维持浮沉子不横向漂浮，把浮沉子的底面做成全反射的，并和水平方向倾斜一定的角度(以 30° 为宜)，这样，利用辐射力的水平分量驱使浮沉子的中心线和声束的中心线保持一致.

更精确地测量辐射压力的办法是利用天平，有许多不同的具体结构，一种精密的装置见图 3.2.8. 电子天平备有光束检测偏

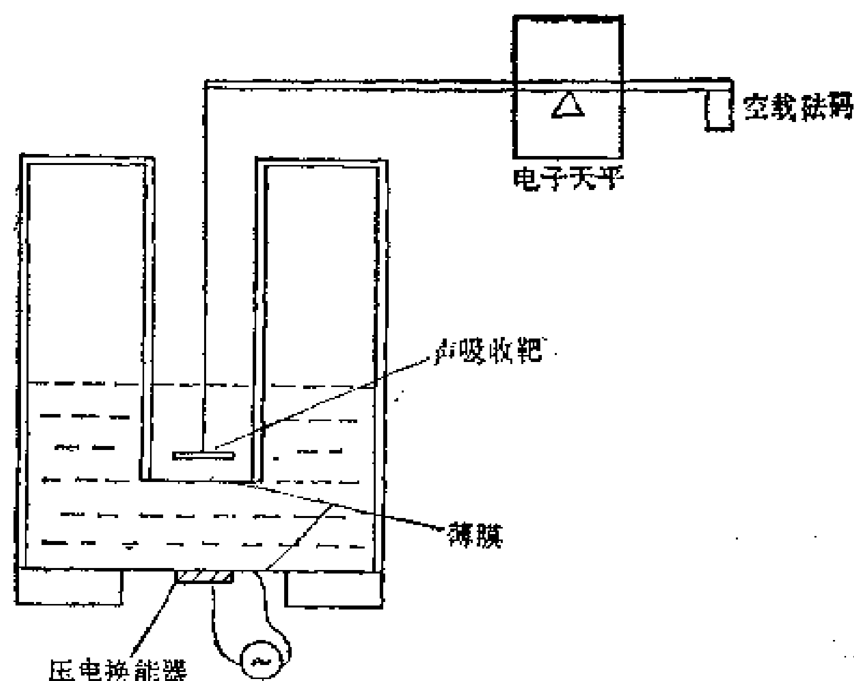


图 3.2.8 用电子天平精密测量辐射压力的系统

转的设备以及磁反馈系统，能使声吸收靶虽受辐射压力的作用却仍保持在原来的位置. 反馈系统中需用的反馈电压则由记录器记下，从而标出辐射压力的大小. 这样做的好处是让吸收靶的悬挂丝不移动，从而避免液体表面张力所引起的变动. 在容器内另安装了一个隔离的小容器，以免除声波所引起的冲流对声吸收靶的影响. 图 3.2.8 的装置可用于 1 到 10MHz 的声波，要注意的是，辐射压力法只适用于连续波. 本装置中，压电换能器上电压改变 1 V，吸收靶重量约改变 0.7×10^{-5}g.

在辐射压力法中，还可以采用可移动的微小障碍物，例如小钢球，使悬在载波液体中，测量其在不同位置所受的辐射压力，便可测定液体中声场的声强分布，这种装置有时叫辐射压力计.

热学方法 有的使用由微小温差电偶或热敏电阻、外裹声吸收薄层而构成的探头来吸收声波能量，导致热敏元件升温. 在一定条件下，热敏元件的平衡温升，或者它的初始温度上升率正比于声波的强度，由此从探头的升温可以测量声场中不同点的声强.

温度的变化由热敏元件的输出电压来确定，这种方法可用于兆赫级频率的连续声波.

一种原理类似，但结构不同的器件叫做电阻测辐射热计，可在液氦低温下测量吉赫级以至太赫级频率的连续声波或脉冲声波. 这种器件用掺杂半导体材料制作而成，它的温度的细致变化由流通电流的变化来指示.

量热器法是另一种热学方法，它可以测量超声源的输出总功率输出. 其原理是让超声换能器单位时间内所发射声能全部转换为热能，然后测量这个热能. 量热器可以有种种结构，关键在于保证声能全部转换为热能，而且保证换能器因内部损耗而直接产生的热能不去掺杂和混淆声能所转换的热能. 当然，量热器还有一般的与外界热隔离的问题. 图 3.2.9 是量热器法的一种结构示意图，这里采用了双容器方式. 左面超声换能器辐射的声能加热左侧容器内的声吸收体，右面则由通有受控电流的电阻丝加热这一

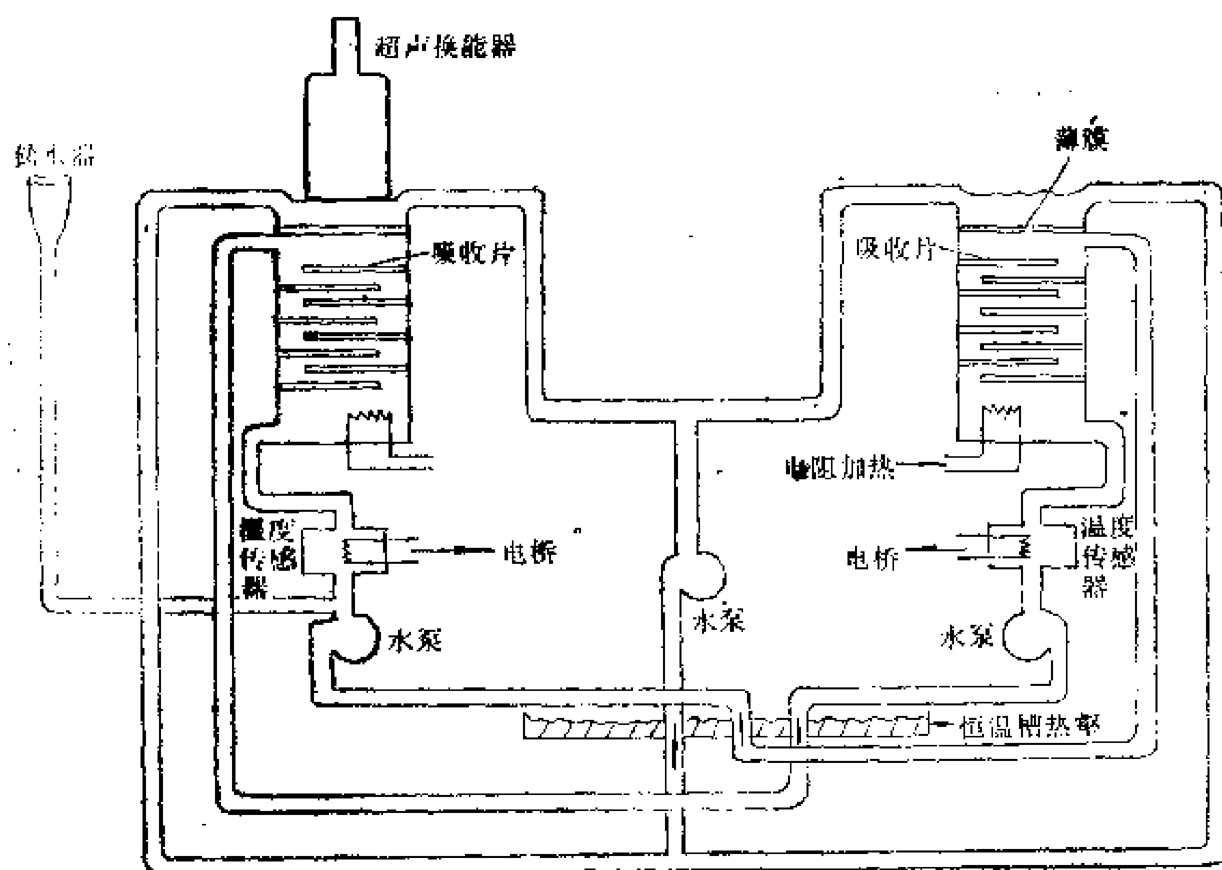


图 3.2.9 测量超声换能器发射功率用的双容器式量热器

侧容器内的声吸收体．每个容器的声吸收体都是两组固定的吸收片和一种吸收液体的组合，吸收液体由各自的泵抽吸而各自循环，在长管道内流动时和恒温槽交换热量，以保证进入各自的容器时温度十分相同．流过各自的容器后，吸收液因吸收声能或直接的热能而温度升高，其温度值由各自的温度传感器监视．如果两个传感器测出的温度有差异，反馈系统便调整通过右侧加热电阻的电流，在几分钟内迫使右侧容器内的电功率消耗非常接近于左侧容器内声功率的热转换，就是使两个传感器的温差非常接近零值．这时，左面超声换能器的声功率便等于右面加热电阻的电功率，乘上几个可确定的修正因子．左、右两个容器是同结构的，超声换能器也可以移到右面，向右面的容器辐射声能．另有第三个循环管道（其中循环液是水），它的功能是带走换能器因内部损耗直接发出的热．图 3.2.9 的装置能够用以测量 1 — 15MHz 的超声功率，误差据称小于 ±(7% + 0.2mW)．

光学方法　用这一类方法，可以较精密地测量超声振动元件的表面位移，或内部超声传到介质表面时表面所具有的位移；也可以测量或显示透明材料（流体或固体）内部的超声场．

作为表面测量，一种近年来得到较多发展的设备是光学干涉仪．用一般的装置可测得数量级为 0.1 Å 的位移，更精确的据称可以测到 10^{-4} Å，但后者限于观察连续超声波或重复的长脉冲超声信号．和接收用压电换能器相比，光学干涉仪的灵敏度一般要低一两个数量级，但光学方法是非接触式的，又没有自身固有振动的干扰．

有多种不同结构的干涉仪，这里仅举两个例子．图3.2.10绘出一种称为稳定光程干涉仪的示意图，这主要是个伺服机构控制的变型迈克耳逊干涉仪．要测量例如 0.5 Å 的位移，需要读出约万分之一条纹的条纹移动，而为此首先需要光程不受外界的扰动．机械振动、样品移动、建筑物摇摆、大气气压起伏（噪声、温度局部变化等）之类都会产生低频、大幅度的干扰．因此，稳定光程，主要是消除所测得信号低频分量的扰动，例如，0—1kHz频率范围内的

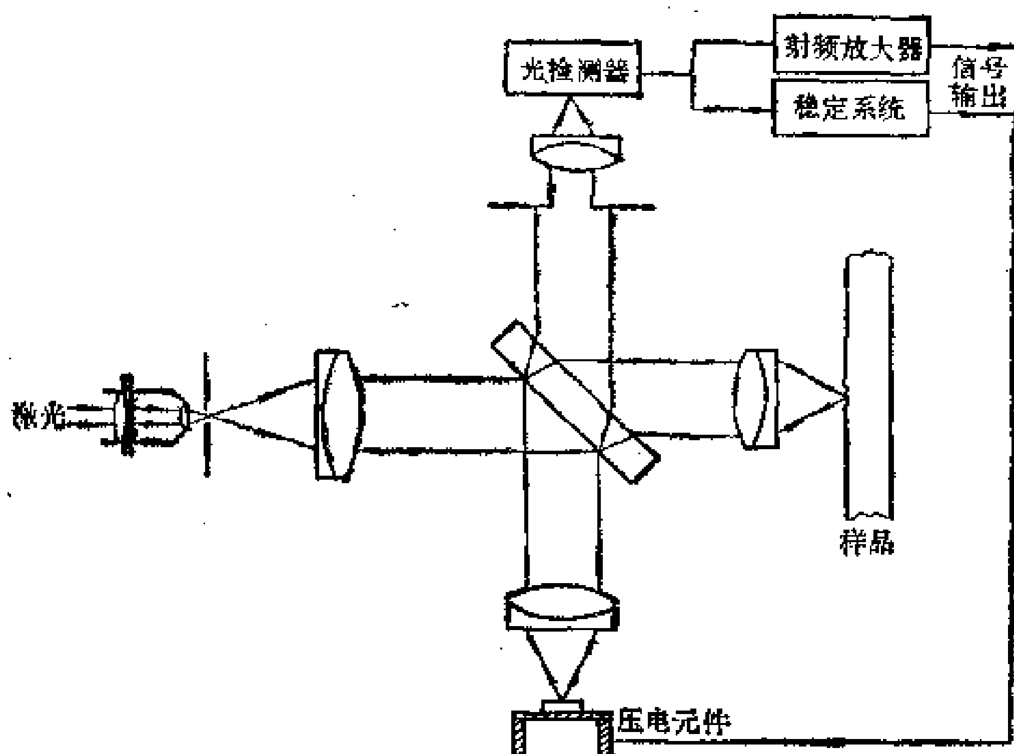


图 3.2.10　稳定光程干涉仪

扰动．在本装置里，采用了反馈办法，让光检测器所接收到的光电流的低频成分激励一个稳定系统，由稳定系统伸缩一个压电元件，这个压电元件承载着干涉仪的参考反射镜，由此参考反射镜会相应地移动，以保持静光程差常等于$\frac{\pi}{2}\pm 2\pi N$，N 是整数．光电流信号的高频成分，例如 10kHz 以上的成分，则被输出、放大、观察和记录．这种稳定光程干涉仪可以测出 0.5Å 的位移，达到约 10MHz 的带宽，样品表面上的聚焦光束，直径约为 10μm．

图 3.2.11 绘出称为微分干涉仪的一种装置．激光器发射的激光受到斩光器的方波调制，由显微物镜 L_1 和准直透镜 L_2 扩展到约 1 cm 直径．这个光束射到光束分裂器 H 分裂成谱，又被透镜 L_3 聚焦到空间滤波器，只有 +1 和 −1 级的光才能通过．这两束光经透镜 L_4 再准直，通过玻璃片 M 后由变焦距透镜组聚焦到样品表面上两个分离点 P 和 Q，P 和 Q 沿表面的距离是半个声波波长．两束光波随后又被反射回到玻璃片 M，再被 M 的镀银面反射

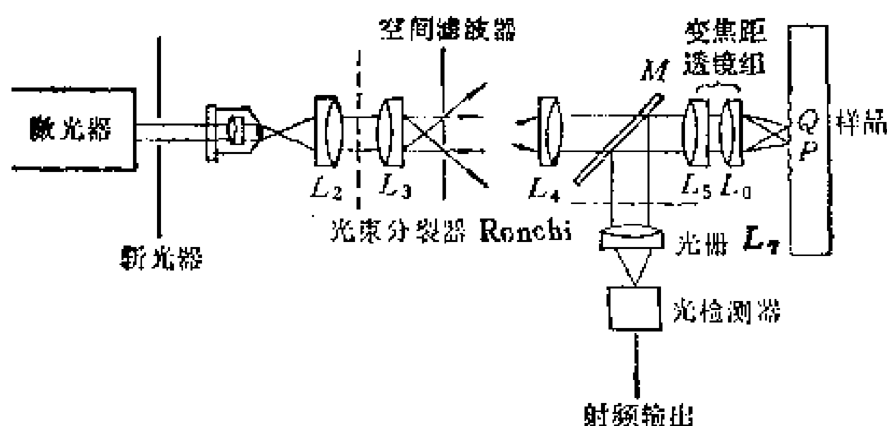


图 3.2.11 微分干涉仪

到一个 Ronchi 光栅，透过部分被透镜 L_7 聚焦到光检测器，部分转换为射频电信号．可以证明，如果样品表面 P、Q 两点处质点法向位移之差甚小于光波波长，则光检测器的输频输出正比于这个位移差．微分干涉仪的灵敏度相当高，有报道最小可在玻璃上测出 0.003 Å 的位移．

用光学方法还可以看出透明体内部的声场．称为阴影法的光学装置多年来用于显示流体中声场的图像．早在 1866 年，Toepler 就用它直接观察空气中的超声脉冲．装置的示意图见图 3.2.12．透镜 L_2 使狭缝 S 的光像在 B 点形成，但在这里有一小块挡

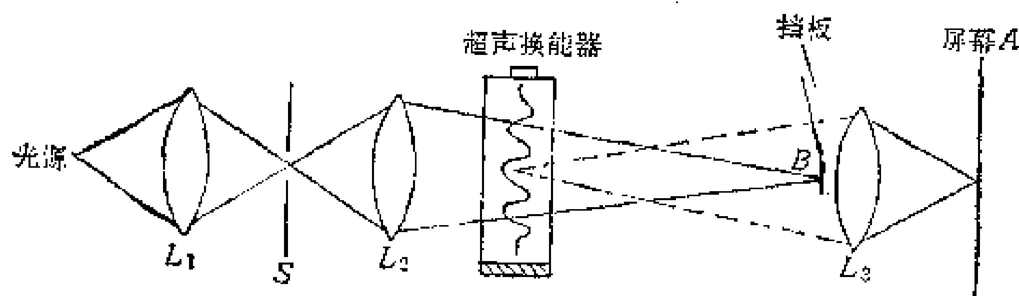


图 3.2.12 阴影法显示透明流体中声场的装置

板遮住了这个直达像．当介质区域内有声波传播时，光波受到衍射，衍射光波会绕过 B 点的挡板，通过透镜 L_3 在屏幕 A 上显出声场的图像．如果介质内的声波是驻波，会看到声压的波腹和波节明暗相间．如果声波是行波，则只能看到一片均匀的明亮；这时要观察声波的各波前，需要采用频闪光源．至于阴影法的灵敏度，

有人计算，在水里最小可显值为 7×10^{-4} W.

用阴影法也可以看到透明固体里的声场，但对于固体，更合适的显示声场的方法是光弹法. 用光弹原理观察透明固体受静力时体内应力的分布，是力学中的熟知技术. 超声波也在固体内部的局部产生应力，因此也可以用这个方法显示，所不同的是超声波所产生的应力一般是运动的，特别是当要观察的是超声行波的传播行为，包括反射、折射、模式变换、散射等等行为，这时需要频闪光源，而光弹法也从力学中的静态的方式变成动态的. 一种光弹法显示玻璃内声场的装置见图 3.2.13. 图中用了 YAG 脉冲激光

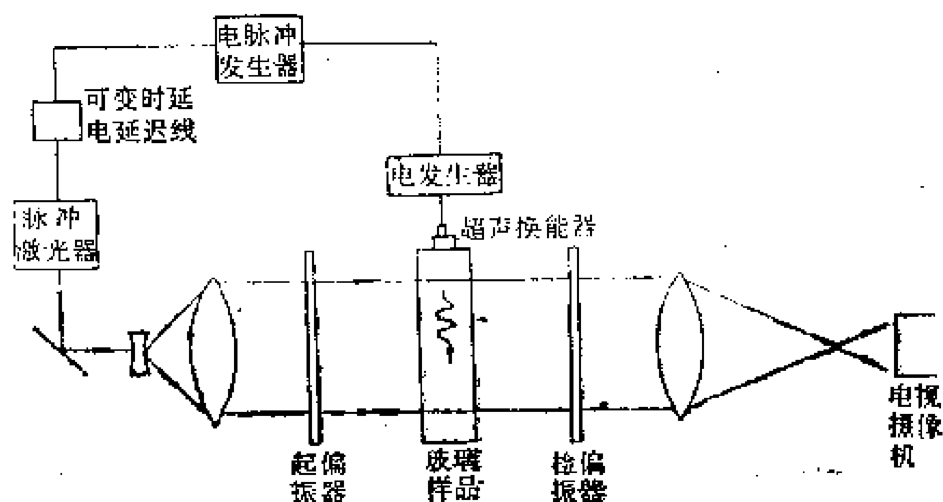


图 3.2.13 光弹性显示透明固体中声场的一种装置

器，光脉冲宽度约 10ns. 电延迟线是为了控制激光器辐射脉冲的时间，使在超声脉冲发射后某个时刻照明玻璃样品，由此通过光弹效应得到样品中超声波传到某个相应距离的图像. 依次改变这个延迟时间，可以得到一系列超声传播的动态图像. 前面第二章中几张光弹法显示声场的相片，便是用这个装置拍摄的.

上面对接收(察觉、测量或显示)超声方法的介绍并不全面，例如在光学法中便没有介绍可以用来计量声强的布喇格衍射法和新发展的光纤水听器. 更主要的是，也没有涉及少数大类别的方法，象前面曾提起的比较定性的化学法和照相法. 不过本章大体包括了一些常用的、较重要的方法.

§3.3 压电换能器

§3.1概述中提到，可逆超声换能器是目前产生和接收超声的通用元件，而压电超声换能器是其中最常用的．到目前为止，在高频表面声波器件中，压电换能器几乎是唯一的产生和接收器件．压电换能器的优点是制作和使用都比较简便，发射和接收的灵敏度高，可用频率范围宽等等．它所用的压电材料品种众多，而且不断在扩大．为此，本节将对压电换能器作专门的介绍．实际上，后面有些章节还将零星地作更详细的讨论．

3.3.1 超声换能器所用压电材料和它们的特征常数

超声换能器用压电材料包括压电单晶体以及多晶的压电陶瓷．早在1880年，法国的Jacques和Pierre Curie兄弟，在理论预见的基础上实验证实，某些晶类的单晶沿一些特殊方向受压时会在它们的表面产生电荷．随后不到一年，Lippmann预言了逆压电效应，而Curie兄弟又很快地加以实验证实．石英单晶是最熟知的压电单晶之一，铌酸锂单晶则可算较新压电单晶的代表．

如果材料是多晶的，由于各个压电小晶取向不同，材料的平均压电效应为零，但有些压电的铁电材料，在多晶情况下，也能在高温时接收外加强电场的影响，排顺它们的电畴，从而使整体材料在一定的低温范围内表现压电性．这些就是目前大量使用的各种压电陶瓷．压电陶瓷的压电性能可以很强，而作为陶瓷，比起单晶来，生产和机械加工方便甚多．锆钛酸铅(PZT)是它们目前的代表．这种外加强电场以排顺电畴的步骤，叫做“极化”，一般在高于室温的温度进行．不同的压电单晶，包括陶瓷里的小晶粒，都有各自的阈值温度，超过这个温度，便失去其压电性能，这个温度习称居里温度．石英单晶的居里温度是576℃，PZT的居里温度随它的配方而稍异，约为摄氏300多度．陶瓷的极化温度，便不超过它的居里温度．极化了的压电陶瓷可以看作是(6mm)的晶类，极化

方向就是晶体的主晶轴.

近年来找到了一些高分子材料，它们也是多晶体，目前只能制成较薄的膜. 经过特殊的极化手续，它们同样呈现一定的压电效应，而且比起压电陶瓷，还有一些有利的电学特性和力学特性. 聚偏二氯乙烯（PVDF 或 PVF_2）是目前的代表材料，做成超声换能器，有它的一些特色，特别是用来接收. 现在还在寻找性能更为理想的高分子材料.

对压电单晶和压电陶瓷，新材料的探索工作也在不断前进. 不仅在探索新的成分、新的配方，而且在探索新的原理、新的工艺、新的结构. 蒸发或溅射薄膜式单晶，已经是比较成熟的技术，例如近年来初步找到了对入射声波的相位不那么敏感的接收用单晶换能材料，象压电半导体单晶及其声电效应. 在陶瓷方面，找出了把压电材料和非压电材料相互混合的所谓复合材料，为改进陶瓷换能器的一些性能提供了强有力的手段.

现在我们来看一看，压电材料的性能一般是怎样评价、计量的. 对于压电材料，和第二章所讨论的一般弹性材料不一样，不只考虑它的力学性质，还要考虑它的电学性质，而且要进一步考虑电学和力学相互耦合的性质. 这些分别涉及弹性常数、介电常数和独特的压电常数.

先谈弹性常数和介电常数. 对一般的介质，独立的弹性常数，弹性顺度 s_{ij} 或弹性劲度 c_{ij}($i,j=1,2,\cdots 6$)，可多达 21 个；独立的介电常数，电容率 ε_{mk} 或介电不渗透系数 β_{mk}($m,k=1,2,3$)，可多达 6 个，具体数目随介质的晶类（32 类）而异. 对压电介质（32 晶类中无对称中心的 20 类）却有稍许复杂的情况，即其独立的弹性常数和独立的介电常数还各有两组不同的值. 对力学量的弹性常数，因电环境的不同而分取两组值，以顺度 s_{ij} 为例，有电场 E 为恒值（一般是零值）时的 s^E_{ij}，和电位移 D 为恒值（零值）时的 s^D_{ij}；对电学量的介电常数，则因力学环境的不同而分取两组值，以电容率 E_{mk} 为例，有应力为恒值时的 ε^T_{mk} 和应变为恒值时的 ε^S_{mk}.

在压电介质里，声场和电场是耦合的，表现这个耦合现象的常

数是压电常数．压电常数按一些独立变量的选取而分为相互有联系的四类．这些独立变量是力学量T或S以及电学量D或E．其实，另有磁学量和热学量也可以独立变化，但在一般情况，介质里的磁场变化可以忽略，而对声波来讲，热学条件可以假设为绝热的，因此一般只设力学量和电学量为独立变量．在适当方向力的作用下，压电介质会产生表面电荷，但这些电荷是束缚的，而不是自由的，它们是介质内部产生了电偶极矩的表现，电学量D正是与此有关的量．实验中外表看会出现电流，即可移动的电荷，实际上这些自由电荷来源于介质的外界，即来源于外界电荷受介质表面束缚电荷的吸引，它们与束缚电荷同数量而符号相异，但并不是束缚电荷的本身．

压电常数的具体定义，可由描述线性范围内压电介质宏观特性的基本方程或本构方程得出，这个方程直称压电方程．压电方程随独立变量的不同选取而有四种不同的形式，压电常数随之也有四类形式．如果独立变量是T和E，线性的压电方程可写为

$$S_i = s_{ij}^E T_j + d_{mi} E_m, \tag{3.3.1 a}$$

$$D_m = d_{mi} T_i + \varepsilon_{mk}^T E_k. \tag{3.3.1 b}$$

如上述，$i,j=1,2,\cdots,6$；$m,k=1,2,3$．如果T和D是独立变量，压电方程为

$$S_i = s_{ij}^D T_j + g_{mi} D_m, \tag{3.3.2 a}$$

$$E_m = -g_{mi} T_i + \beta_{mk}^T D_k. \tag{3.3.2 b}$$

如果S和E是独立变量，有

$$T_i = c_{ij}^E S_j - e_{mi} E_m, \tag{3.3.3 a}$$

$$D_m = e_{mi} S_i + \varepsilon_{mk}^S E_k. \tag{3.3.3 b}$$

如果S和D是独立变量，则有

$$T_i = c_{ij}^D S_j - h_{mi} D_m, \tag{3.3.4 a}$$

$$E_m = -h_{mi} S_i + \beta_{mk}^S D_k. \tag{3.3.4 b}$$

在这四组不同形式的压电方程中出现四种形式不同的压电常数d、e、g和h，任一种形式的常数都标志压电介质的压电特性，特别是特性量的大小．随着介质所属晶类的不同，常数的独立数目

也不等，少的只有1个，多的可达18个．这些常数实际上是三阶张量，它们各自把二阶对称张量(T 或 S)同一阶张量(**D** 或 **E**)联系起来，因此这些常数的下标应当有三个．但上列式中对下标的其中两个采用了缩写法(见2.2.3节)；其所以可以这样做，是因为 $d_{mkl}=d_{mlk}$．以 d_{mi} 为例($m=1,2,3;i=1,2,\cdots\cdots,6$)，

$$d_{m1}=d_{m11},d_{m2}=d_{m22},d_{m3}=d_{m33},$$

$$d_{m4}=d_{m23},d_{m5}=d_{m13},d_{m6}=d_{m12}.$$

相应地，矩阵$[d_{mi}]$有三行、六列，它的转置矩阵则有六行、三列．

d_{mi} 和 g_{mi} 称为压电应变常数，e_{mi} 和 h_{mi} 称为压电应力常数．各压电常数的定义，可由上列压电方程写出，例如

$$d=\left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_T=\left(\frac{\partial D}{\partial T}\right)_E, \tag{3.3.5}$$

它们的单位分别是

$$d:\qquad \text{C/N 或 m/V}, \tag{3.3.6 a}$$

$$e:\qquad \text{C/m}^2\text{ 或 N/Vm}, \tag{3.3.6 b}$$

$$g:\qquad \text{Vm/N 或 m}^2\text{/C}, \tag{3.3.6 c}$$

$$h:\qquad \text{V/m 或 N/C}. \tag{3.3.6 d}$$

四种压电常数之间有关系为

$$d_{mi}=e_{mj}s^E_{ji}=\epsilon^T_{nm}g_{ni}, \tag{3.3.7}$$

$$e_{mi}=d_{mj}c^E_{ji}=\epsilon^S_{nm}h_{ni}, \tag{3.3.8}$$

$$g_{mi}=h_{mj}s^D_{ji}=\beta^T_{nm}d_{ni}, \tag{3.3.9}$$

$$h_{mi}=g_{mj}c^D_{ji}=\beta^S_{nm}e_{ni}. \tag{3.3.10}$$

顺便指出，β_{mk} 和 ϵ_{mk} 的关系是

$$\beta_{mk}=\frac{(-1)^{m+k}\Delta_{mk}}{\Delta_\epsilon},m,k=1,2,3, \tag{3.3.11}$$

式中 Δ_ϵ 是 ϵ_{mk} 矩阵的行列式，Δ_{mk} 则是这个行列式的子式．实际上，除去三斜和单斜两个晶类外，对所有其它晶类，$\beta_{mk}=1/\epsilon_{mk}$．由式(2.2.47)，还可指出，$s_{ij}$ 和 c_{ij} 之间有类似式(3.3.11)的关系，即

$$c_{ij}=\frac{(-1)^{i+j}\Delta_{ij}}{\Delta_s}, i, j=1,2,\cdots,6, \tag{3.3.12}$$

这里 Δ_s 是 s_{ij} 矩阵的行列式.

四种形式的压电方程(3.3.1)——(3.3.4)都分别表示了正压电效应和逆压电效应. 以式(3.3.1)为例,式(b)阐述,除了电场会产生电位移外,介质内的应力场 T 也会产生电极化,这是正压电效应. 式(a)则表示逆压电效应,就是说,除应力会导致应变外,电场也会导致应变. 四种形式的压电方程中,式(3.3.1)是最常用的,因为电场 E 和应力 T 是较易实现的独立变量,式(3.3.4)则用得最少.

在四种压电常数中,粗略说,d 或 e 主要决定发射用换能器的性能,g 或 h 则主要决定接收用换能器的性能. 这些提法有一定的根据,但却有条件. 对于压电换能器的发射效率和接收效率,有一些不同的优值式,有的式不止包含上述这些常数之一,而且包含下面即将谈到的另一类系数.

这另一类系数,以不同的方式,把压电常数、介电常数和弹性常数组合起来,更适于表征用作超声换能器时压电材料的性能,称为压电耦合系数. 它们是一类系数,而不是一个,具体值随换能器的振动方式或模式(见 3.3.2 节)而异. 通常以字母 k, 加上不同的上、下标,来代表这类系数,它们的共同定义是

$$k=\left(\frac{W_1}{W_1+W_2}\right)^{1/2}, \tag{3.3.13}$$

式中 W_1+W_2 是力源(或电源)在对介质作用时所储蓄的总能量,W_1 是这个总能量中在理想情况下转化为电(或力)功的部分,W_2 则是未能转化的部分.

显见,k 和压电材料的换能更直接有关。如果可以证明,力源作用时的 k 等于电源作用时的k, 那么压电换能器有可逆性;从介质压电效应的正、逆现象,以及在一定程度内的线性特征,这一点是可预计的.

我们现在具体分析一个较常见的具体情形,作为计算 k 值的

例子. 假设将压电陶瓷材料制成一个横向尺寸远大于厚度的薄片,在片上下两个宽面上镀上电极,并对它沿厚度极化. 设取坐标轴如图 3.3.1 所示,并设薄片是横向受箝制的,即$S_1=S_2=0$. 对

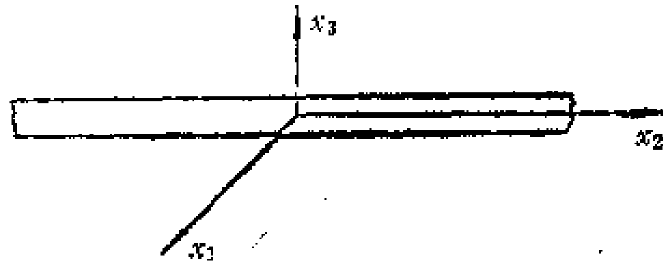


图 3.3.1 压电薄片和坐标系

这个薄片,现在顺序进行下列操作: (i)将两个电极短路,然后在两个面施加压强,由0增到 $-T_{3M}$. 这个薄片只作厚度变化,设这时产生的应变由0增到 $-S_{3M}$. 压电片单位体积内储存能量为

$$W_1+W_2=\sum_i\int T_i dS_i=\int_0^{-S_{3M}}T_3 dS_3,$$

式(3.3.3 a)现在是

$$T_3=c_{33}^E S_3-e_{33}E_3,$$

而这时 $E_3=0$,因此

$$S_3=\frac{1}{c_{33}^E}T_3,$$

于是

$$W_1+W_2=\int_0^{-T_{3M}}\frac{T_3}{c_{33}^E}dT_3=\frac{1}{2}\frac{1}{c_{33}^E}T_{3M}^2.$$

(ii)断开电路,再逐步移去所加应力,S_3 相应改变,但由于现在的电学条件不是 $E_3=0$,而是 D_3 为恒值,按式(3.3.4 a),在这个操作过程中

$$S_3=\frac{1}{c_{33}^D}T_3,$$

且应变并不回复到零,而是如图 3.3.2 所示减为 $-S_{3N}$. 在这过程中,返回力源的能量为

$$-W_2=\int_{-T_{3M}}^{0}\frac{T_3}{c_{33}^D}dT_3=-\frac{1}{2}\frac{1}{c_{33}^D}T_{3M}^2.$$

(iii)在两极间接上一个电负载，压电片两面上的电荷便将通过这个电负载而消失，同时 S_3 回复到零. 这样，整个操作步骤完成一个循环，压电片的状态复元. 在操作(iii)中，对电负载所作的功是

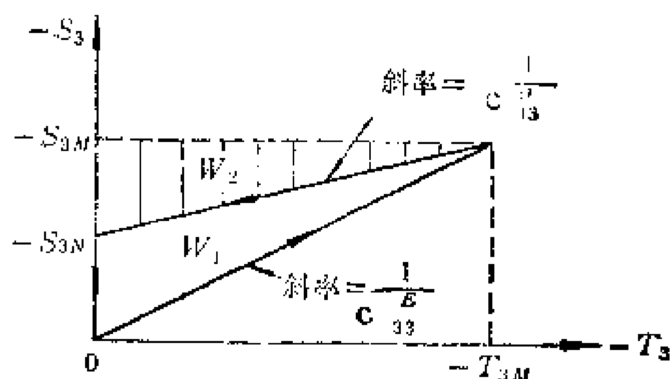


图 3.3.2 压电片接力源的循环过程中能量的转变

$$(W_1+W_2)-W_2=W_1=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{c_{33}^E}-\frac{1}{c_{33}^D}\right)T_{3M}^2,$$

通常把这种特定换能情况 ($S_1=S_2=0, S_3\neq0$) 下的 k 写作 k_t (或 k_{33}^t). 按定义，

$$k_t^2=\frac{W_1}{W_2+W_2}$$

$$=\frac{1/c_{33}^E-1/c_{33}^D}{1/c_{33}^E}=\frac{c_{33}^D-c_{33}^E}{c_{33}^D},$$

c_{33}^D 是 $\left(\frac{T_3}{S_3}\right)_{D_3=0}$. 按式(3.3.3 a)，

$$T_3=c_{33}^E S_3-e_{33}E_3.$$

而当 $D_3=0$，按式(3.3.3 b)，

$$0=e_{33}S_3+\epsilon_{33}^S E_3,$$

即

$$E_3=-\frac{e_{33}}{\epsilon_{33}^S}S_3,$$

代入式(3.3.3 a)，有

$$T_3=\left(c_{33}^E+\frac{e_{33}^2}{\epsilon_{33}^S}\right)S_3.$$

因此，

$$c_{33}^D=\left(\frac{T_3}{S_3}\right)_{D_3=0}=c_{33}^E+\frac{e_{33}^2}{\epsilon_{33}^S},\tag{3.3.14}$$

$$k_t^2=\frac{e_{33}^2}{\epsilon_{33}^S c_{33}^D}.\tag{3.3.15}$$

在上述操作中，我们把力能部分地转化为电能，如果把压电片接上电源，我们同样地可以把电能部分地转化为力能。在保持 $S_1=S_2=0$ 的条件下，理想的操作步骤是(i)在压电片的两极加上逐步增高的直流电压，使片内电场强度由 0 增加到 E_{3M}；(ii)箝制片子这时的厚度，然后逐步退除电场；(iii)取消对厚度的箝制，而在两面间代以有限大的力负载。压电片所获得的总能量以及对力负载所作的功如图 3.3.3 所示。用类似上述推导方法，可以得出同一式(3.3.15)。

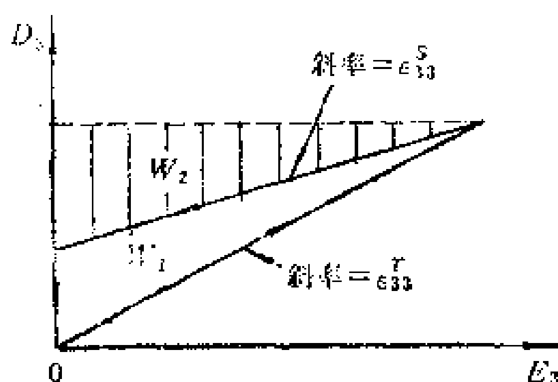


图 3.3.3 压电片接电源的循环过程中能量的转变

当压电元件的弹性边界条件有变化时，也就是当压电元件的动作方式改变时，压电片的 k 将不同于式(3.3.15)。例如，如果对于压电薄片，对它的侧面不加箝制，而任其自由，($S_1\neq0$，$S_2\neq0$，而 $T_1=T_2=0$)，这时压电片可以横向伸缩。用类似上面的推导方法，可以证明，相应的压电耦合系数是

$$(k_{33}^l)^2\equiv(k_{33})^2=\frac{d_{33}^2}{\epsilon_{33}^T s_{33}^E}.\tag{3.3.16}$$

随弹性边界条件的种种选择，也随压电元件形状的种种选择，有许多不同的压电耦合系数，如 k_{31}(或 k_{31}^l)，k_p 等等。

在上面的讨论中，没有考虑压电元件内部弹性波的空间分布。如果加以考虑，便有所谓有效耦合系数 k_{eff}。为区别起见，常把上

面所谈的 k 称为材料耦合系数；如果只提压电耦合系数，一般指的是 k.

几种较常用做超声换能器的压电材料的一些特征常数列在附录 3-1 中.

3.3.2 压电元件的振动模式

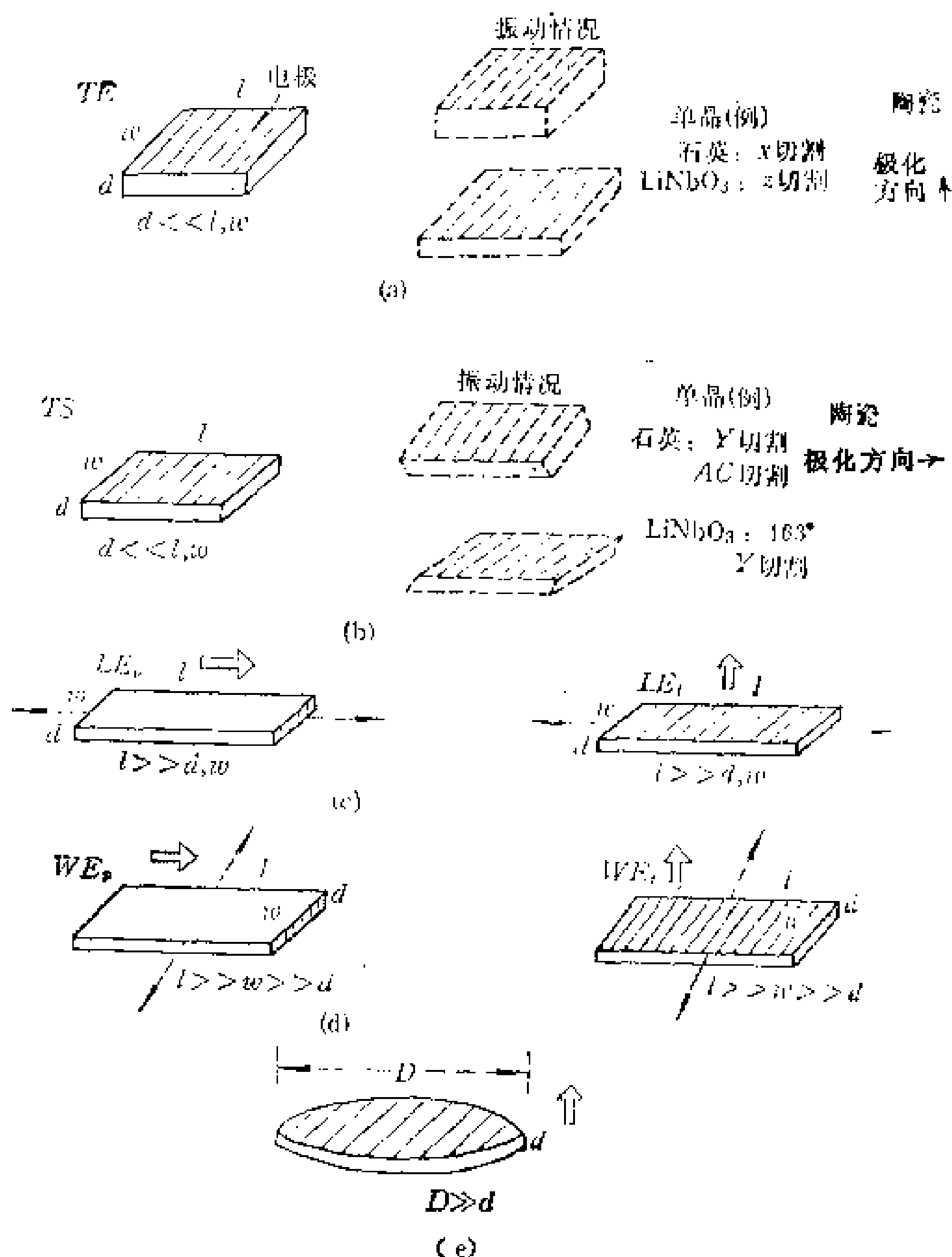


图 3.3.4 平板或长棒的几种常用振动模式

(a)厚度伸缩；(b)厚度切变；(c)长度伸缩；(d)宽度伸缩；(e)径向伸缩

压电元件常做成简单的形状，最常见的是平片，也有做成棒状、管状、球壳状等．在激发超声时，加在元件的电场，或者是时间谐振的，或者是短暂的．元件便随时间作尺度变化，也就是作稳态的或瞬态的振动．

压电元件的振动方式，或叫模式，不仅依赖元件的形状，而且依赖这个形状对晶轴的相对关系，以及电场的取向．振动模式可以由压电方程、运动方程等等基本式来预计(参看 3.3.3 节)．图 3.3.4 给出几种较常用的平板或长棒的振动模式；图中 TE，TS 等是模式的符号．图 3.3.5 给出陶瓷环或壳的几种常见振动模式．

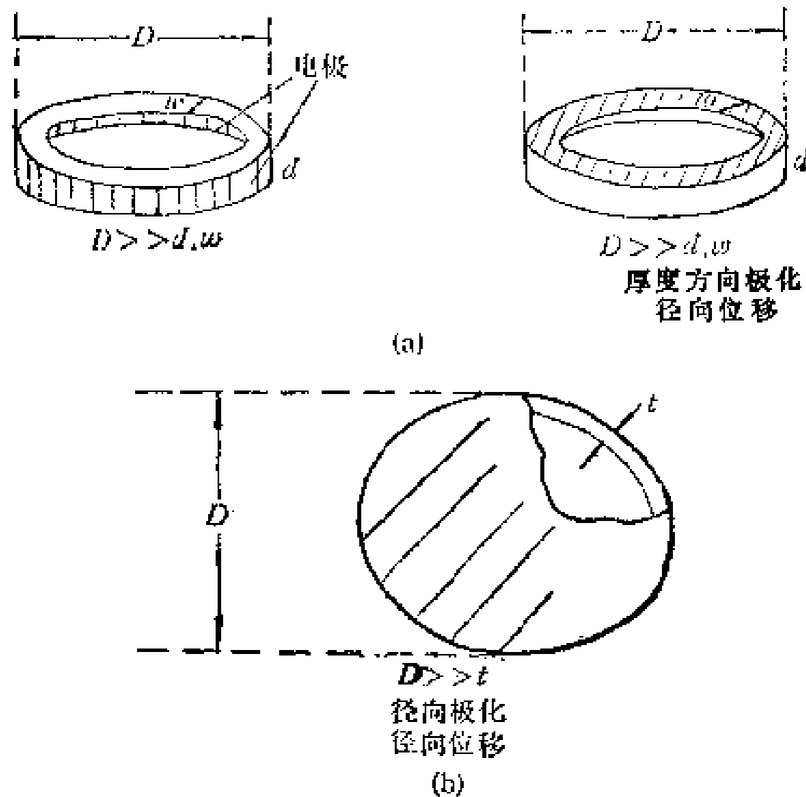


图 3.3.5　陶瓷环或球壳的几种常用振动模式
(a)环；(b)陶瓷薄球壳

不同形状压电元件以及它们的不同振动模式，可用来在流体或固体中激发或接收不同频率、不同类型、不同空间分布的超声波，有时也用来做不同频率的谐振器件．

3.3.3　压电换能器的等效电路

压电换能器以压电元件为主要部件，但一般还包括其它一些

部件．一种最常用来检测材料性能的超声换能器含有图3.3.4(a)所示作厚度伸缩的片状压电元件，另外配有一些其它部件，如图3.3.6所示，其中对换能器发射或接收性能影响最大的部分是压电圆片背后的声阻尼材料．图中压电圆片前面的保护膜片以及膜片所接触的载声介质也将影响整个换能器的发射或接收性能．

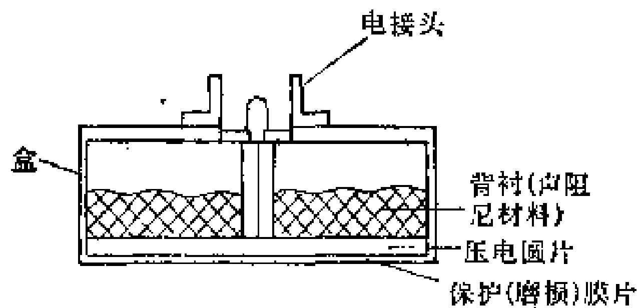


图3.3.6　垂直发射或接收的超声换能器

为了定量分析换能器的性能，需要重点分析它的主要部件——压电元件的性能，包括寻求这个元件的振动模式，所发射波形或对入射声波的响应等等．为此，需要利用压电元件的一些基本方程，包括压电元件的运动方程、元件介质的压电方程、描叙元件介质电学性质的方程，以及元件的具体力学边界条件和电学边界条件．这些边界条件是由压电元件以外换能器的其它组成部分、换能器所接触的载声介质(常称负载)、以及外加电压(或电流)或者射向换能器的超声波所决定的．因此，对压电元件的这种分析，实际上不仅包括了对整个换能器的分析，也包括了对一些外界影响的分析．

直接用数学方法处理上述一些基本方程，可以得到解析的或数值的解答．另一方面，长期以来人们习惯于把这里所涉及的力学和电学相互耦合的问题，转换为纯电路的形式，从而把压电换能器看作是比较熟知的电学器件，不再细究压电效应等等物理特征．这种电路的形式叫做等效电路．可以只写出压电元件的等效电路，而把换能器内其它部分和换能器外有关部分写作待定的边界条件．另一种办法是把换能器内外其它有关的部分也转换成各自的等效电路，一起加在压电元件的等效电路上，然后分析这个总的等效电路的特性．

换能器内外的其它有关部分一般不是压电的，它们的等效电

路比较熟知．因此这里的关键问题是求算压电元件的等效电路，我们下面将着重加以讨论．等效电路的形式不是唯一的，下面将描述其中两种重要的形式；一种已采用了40多年，另一种是十几年前才发展起来的，但已受到较普遍的重视．

不同形状的压电元件有不同的等效电路，这里将举厚度伸缩模式的压电薄片[见图 3.3.4(a)]为例．图 3.3.7 画了一片极化过

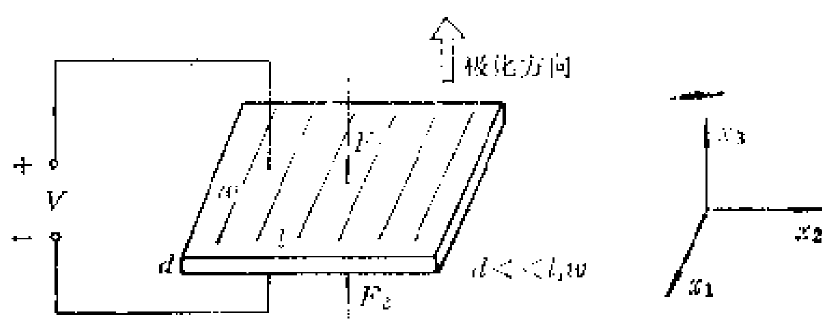


图 3.3.7　厚度伸缩的压电片

的压电陶瓷，片子可以是单晶材料，但那时切割面要适当．图 3.3.4(a)中曾举石英、铌酸锂的两个例子；如果切割面不适当，振动模式将比厚度伸缩复杂．图 3.3.7 中也画了座标轴 x_1、x_2 和 x_3．极化方向沿 x_3 轴，在垂直于 x_3 的两大端面镀上电极，为了施加外电压(发射时)或为了测量薄片的输出电压(接收时)．令作用于上下两端面的总压力分别为 F_1 和 F_2，它们或者是因施加了外电压，由逆压电效应产生的，或者就是外加的应力，将促使压电片因正压电效应而输出电压 V．在图 3.3.6 的换能器结构中，压电片的两个端面的一面接触着吸声的背衬，另一面通过保护膜片而接触换能器外面的负载，即载声介质．我们现在要寻求的，是以电路形式所表达、取决于压电片各参数的 F_1、F_2 和 V 之间的关系．

梅森等效电路　在40年代就由 W.P. Mason 提出，沿用至今，下面作简要的推导．片子的横向尺寸假设是足够大，片子几乎没有横向位移，近似于横向箝制．同时，横向电位移也近似为零，而对于绝缘的陶瓷材料，沿厚方向的电位移 D_3 则在空间是常数．

因此，在压电方程的诸变量（见 3.3.1 节）中，适于选取 S_l 和 D_m 作独立变量，而对压电方程本身，适于选取式(3.3.4)的形式．根据图 3.3.7 的特殊情况，式(3.3.4)简化为

$$T_3 = c_{33}^D S_3 - h_{33} D_3, \tag{3.3.17 a}$$

$$E_3 = -h_{33} S_3 + \beta_{33}^S D_3. \tag{3.3.17 b}$$

按牛顿方程，

$$\rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = \frac{\partial T_3}{\partial x_3}, \tag{3.3.18}$$

式中 u_3 是压电介质沿 x_3 的质点位移，ρ 是介质的密度．注意到压电片是电学上绝缘的，即片内没有自由电荷，因此，按式

$$div\mathbf{D}(\mathbf{x}, t) = 0, \tag{3.3.19}$$

以及上述 $D_1 = D_2 = 0$，有式

$$\frac{\partial}{\partial x_3} D_3(x_3, t) = 0,$$

即 D_3 在空间是常数．把式(3.3.17 a)和(3.3.19)代入式(3.3.17)并回顾定义 $S_3 = \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$，得

$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = \frac{c_{33}^D}{\rho} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2}. \tag{3.3.20}$$

这表明可有纵波在片内沿厚度方向以声速

$$v^D = \sqrt{\frac{c_{33}^D}{\rho}} \tag{3.3.21}$$

传播．如果质点在时间上作简谐振动，u_3 的解为

$$u_3(x_3, t) = \left(A \sin \frac{\omega x_3}{v^D} + B\cos \frac{\omega x_3}{v^D}\right) e^{j\omega t}, \tag{3.3.22}$$

其中 A 和 B 由边界条件确定．本式是图 3.3.4(a) 中所标明压电薄片只有厚度伸缩的依据．

在压电片的内部，质点位移和相应的应力是有空间分布的．我们却集中考虑压电片端面的一些参数值．设这两个端面是 $x_3 = 0$ 和 $x_3 = d$，d 是片厚．令

$$\dot{u}_3\big|_{x_3=0} \equiv U_1, \tag{3.3.23 a}$$

$$\dot{u}_3\big|_{x_3=d} \equiv -U_2 \tag{3.3.23 b}$$

分别表示两个端面的质点速度．由式(3.3.22)容易导出，

$$A = -\frac{1}{j\omega}\left(\frac{U_1}{\tan\frac{\omega d}{v^D}} + \frac{U_2}{\sin\frac{\omega d}{v^D}}\right)e^{-j\omega t}, \tag{3.3.24 a}$$

$$B = \frac{1}{j\omega}U_1 e^{-j\omega t}. \tag{3.3.24 b}$$

写

$$F_1 = -lwT_3\big|_{x_3=0}, \tag{3.3.25 a}$$

$$F_2 = -lwT_3\big|_{x_3=d}, \tag{3.3.25 b}$$

注意到

$$S_3\Big|_{x_3=0} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\Big|_{x_3=0} = \frac{\omega}{v^D}Ae^{j\omega t}, \tag{3.3.26 a}$$

$$S_3\Big|_{x_3=d} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\Big|_{x_3=d}$$

$$= \frac{\omega}{v^D}\left(A\cos\frac{\omega d}{v^D} - B\sin\frac{\omega d}{v^D}\right)e^{j\omega t}, \tag{3.3.26 b}$$

又设 I_3 表示通过压电片的总电流，则

$$I_3 = lw\dot{D}_3.$$

令 $D_3 = D_{30}e^{j\omega t}$，即有

$$I_3 = lw(j\omega D_3), \tag{3.3.27}$$

于是，把式(3.3.25)—(3.3.27)代入式(3.3.17 a)，有

$$F_1 = \frac{Z_0}{j\tan\theta}U_1 + \frac{Z_0}{j\sin\theta}U_2 + \frac{h_{33}}{j\omega}I_3, \tag{3.3.28 a}$$

$$F_2 = \frac{Z_0}{j\sin\theta}U_1 + \frac{Z_0}{j\tan\theta}U_2 + \frac{h_{33}}{j\omega}I_3. \tag{3.3.28 b}$$

式中

$$Z_0 \equiv lw(\rho v^D), \tag{3.3.29}$$

$$\theta \equiv \frac{\omega d}{v^D}, \tag{3.3.30}$$

Z_0 是全端面上的力阻抗。 式 (3.3.28) 给出诸端面参数之间的关系. 如果给定的电学量是外加电压V而不是 I_3，我们还需要将 I 代以V的表达式. 求积分

$$V = \int_0^d E_3 dx_3, \tag{3.3.31}$$

并引用式(3.3.17 b)和式(3.3.27)，可以证明

$$j\omega V = h_{33}(U_1 + U_2) + \frac{1}{C_0} I_3. \tag{3.3.32}$$

式中

$$C_0 \equiv \frac{lw}{\beta_{33}^S d} = \epsilon_{33}^S \frac{lw}{d} \tag{3.3.33}$$

是压电片的箝制电容；说是箝制的，是因为式中 ϵ_{33}^S 是恒应变下的电容率.

定义

$$N \equiv \left.\frac{F}{V}\right|_{U_1=0,\ U_2=0}, \tag{3.3.34}$$

即箝制状态下 F_1 或 F_2 对V之比，则从式(3.3.28)和式 (3.3.32)得

$$N = C_0 h_{33}. \tag{3.3.35}$$

由式(3.3.15)和(3.3.8)还可把N写作

$$N = \frac{lw}{d}\left(\frac{c_{33}^D}{\beta_{33}^S}\right)^{1/2} k_t, \tag{3.3.36}$$

N 可以看作是一个机电变压器的圈数比. 用N来表示，式 (3.3.28) 和式(3.3.32)可写为

$$F_1 = \frac{Z_0}{j\tan\theta} U_1 + \frac{Z_0}{j\sin\theta} U_2 + \frac{N}{j\omega C_0} I_3, \tag{3.3.37 a}$$

$$F_2 = \frac{Z_0}{j\sin\theta} U_1 + \frac{Z_0}{j\tan\theta} U_2 + \frac{N}{j\omega C} I_3. \tag{3.3.37 b}$$

$$I_3 = j\omega C_0 V - N(U_1 + U_2).\qquad(3.3.38)$$

利用式

$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sin\theta} - \frac{1}{\tan\theta},$$

可以把式(3.3.37)改写为

$$F_1 = jZ_0\tan\frac{\theta}{2}U_1 + \left[\frac{Z_0}{j\sin\theta} + \frac{1}{j\omega(-C_0/N^2)}\right](U_1 + U_2) + NV,\qquad(3.3.39\text{a})$$

$$F_2 = jZ_0\tan\frac{\theta}{2}U_2 + \left[\frac{Z_0}{j\sin\theta} + \frac{1}{j\omega(-C_0/N^2)}\right](U_1 + U_2) + NV.\qquad(3.3.39\text{b})$$

式(3.3.39)是我们所寻求的，它没有揭示压电片内部力学量和电学量的关系，但说明了压电片的表面上即端面上力学量和电学量之间的关系，从应用角度，这些表面参量正是人们所关心的．压电片作为发射元件时，式(3.3.39)给出片端面的质点速度和作用力；压电片作为接收元件时，这个式子则给出所输出的电压．有意义的还在于式(3.3.39)可以用Mason提出的图 3.3.8 所画电路来代表．这个电路有两个分支，一个含有电学量C_0，V等，另一个则其中所有元件都是力学量，因此前者称电学分支，后者称力学分支．力学分支通过圈数比为N的机电变压器而和电学分支在

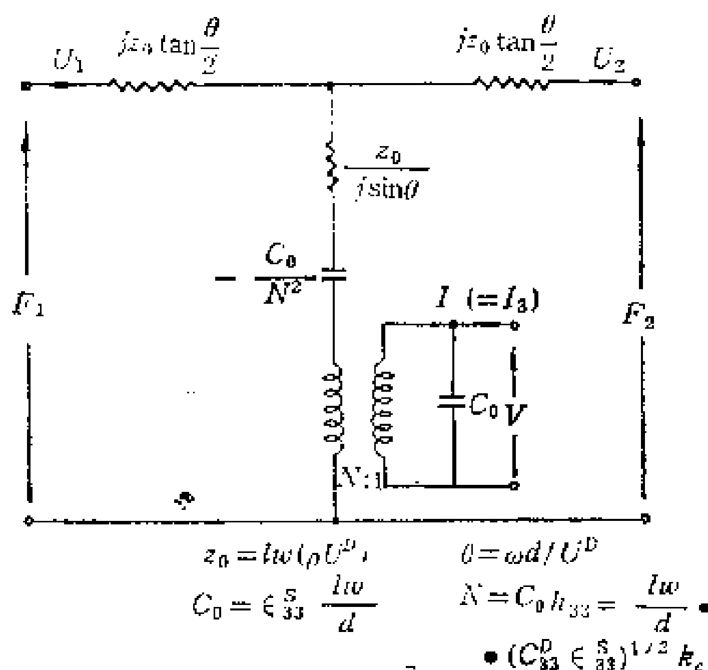


图 3.3.8 厚度模压电薄片的梅森等效电路

量纲上等同起来，F_1、F_2 便可以类比为电压，U_1、U_2 可以类比为电流.在力学分支中的一个特殊元件是负电容 $-C_0/N^2$，在实际中是不存在这样的元件的. 图中电路有三对端点，是三端对电路.

压电片实际上是有损耗的，包括电学损耗和力学损耗，图3.3.8没有计入这个因素.

图3.3.8所示是单个压电片的等效电路. 虽然它不是整个换能器的等效电路，但我们先就此作些讨论，因为不仅压电片可单独使用，而且即使将其用作换能器的组成部分，也需要单独对其进行了解. 孤立使用时，压电片的两个端面是自由的，以此 $F_1=F_2=0$，即两个力学端短路. 图3.3.8变为图3.3.9的诸形式.

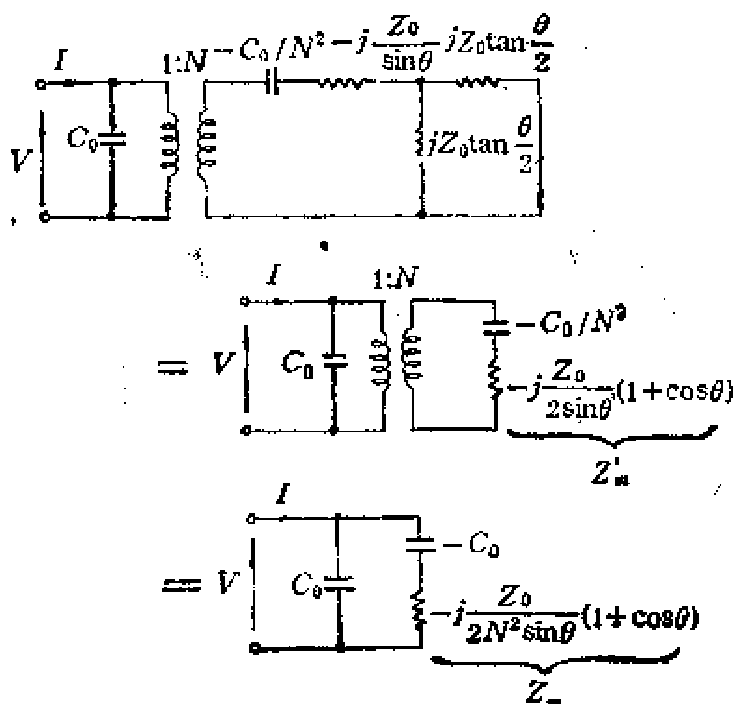


图3.3.9 自由压电片的等效电路，$\theta=\frac{\omega d}{v^D}$

设 $V=V_0e^{j\omega t}$，V_0 是常数，则图3.3.9内力学分支中的串联阻抗为

$$Z'_m=j\left(\frac{N^2}{\omega C_0}-Z_0\frac{1+\cos\theta}{2\sin\theta}\right)=jZ_0\left(\frac{k_t^2}{\theta}-\frac{1}{2}\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}\right),\quad(3.3.40)$$

经过变压器转换为电学量时，Z'_m 变为

$$Z_m = j\left(\frac{1}{\omega C_0} - \frac{Z_0}{N^2}\frac{1+\cos\theta}{2\sin\theta}\right) = -\frac{1}{j\omega C_0}\left(1 - \frac{\theta}{k_t^2}\frac{1+\cos\theta}{2\sin\theta}\right). \tag{3.3.41}$$

Z_m 称为动生阻抗，因为它来自逆压电效应所导致的振动. 如果片子不是压电的，从电学角度讲，片子只是一个普通的电容 C_0. 顺便指出，Z_m 不含阻，那只是因为在前面忽略了力学损耗和电学损耗. 实际上阻是存在的.

整个压电片的电阻抗是

$$Z = \frac{1}{j\omega C_0 + 1/Z_m}, \tag{3.3.42}$$

或者说，整个压电片的电导纳是

$$Y = \frac{1}{Z} = j\omega C_0 + \frac{1}{Z_m}$$
$$= j\omega C_0\left[1 - \left(1 - \frac{\theta}{k_t^2}\frac{1+\cos\theta}{2\sin\theta}\right)^{-1}\right]. \tag{3.3.43}$$

Z 或 Y 是 θ 的函数，而

$$\theta = \frac{\omega d}{v^D} = \frac{\pi f}{v^D/2d} = \frac{\pi f}{f_0}, \tag{3.3.44}$$

式中

$$f_0 = \frac{1}{2d/v^D} \tag{3.3.45}$$

是压电片的机械谐振基频. 当 f 改变，Z 或 Y 也随之变化，我们定义，动生导纳最大时的频率为动生谐振频率 f_s，总导纳的纳为零时的频率为反共振频率 f_a. 目前，在损耗被忽略的情况，由式(3.3.41)令 $Z_m = 0$，可以得到

$$f_s = \frac{\theta_s}{\pi} f_0, \tag{3.3.46 a}$$

其中

$$\frac{k_t^2}{\theta_s} = \frac{1+\cos\theta_s}{2\sin\theta_s}. \tag{3.3.46 b}$$

θ_s 的解是多值的，因此 f_s 有泛音，但泛音的频率不是基频的整数倍，基频则近似地为

$$f_{s0}\simeq f_0\sqrt{1-k_t^2}\,, \tag{3.3.47}$$

f_s 有时叫共振频率，并写作 f_r. 关于反共振频率 f_a，按式(3.3.43)，它由下式确定：

$$1-\left(1-\frac{\theta_a}{k_t^2}\frac{1+\cos\theta_a}{2\sin\theta_a}\right)^{-1}=0,$$

即

$$\theta_a=(2m-1)\pi \qquad m=1,2,3,\cdots\cdots,$$

或

$$f_a=(2m-1)f_0 \qquad m=1,2,3,\cdots\cdots. \tag{3.3.48}$$

f_a 的基频因此等于机械振动频率，而 f_a 的泛音是 f_0 的奇数倍.

现在我们来考查压电片作为换能器组成部分时的情况. 从图3.3.6看出，压电片这时一个端面接着背衬，另一个端面接着保护膜片，而保护膜片与传声介质相接. 所谓传声介质，是指换能器向其发射超声(发射时)，或有超声由它向换能器投射(接收时)的介质. 背衬、保护膜片和传声介质一般都不是压电的. 令背衬的力阻抗为 Z_2，保护膜片和传声介质的综合力阻抗为 Z_1'，则这时压电片的等效电路如图3.3.10所示，这个等效电路就是整个换能器的等效电路. 这里显然忽略了电引线等的微小影响.

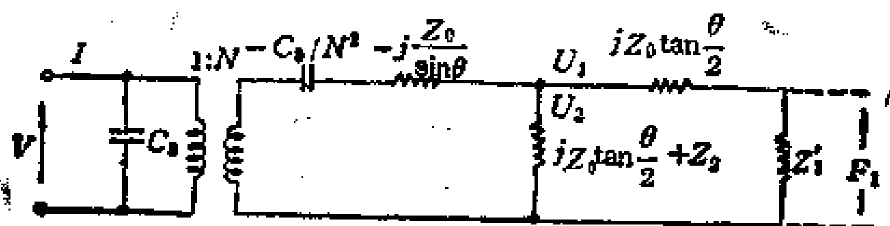


图3.3.10 压电晶片两端面加有力阻抗 Z_1', Z_2 时的等效电路

在换能器的制作中，背衬常是完全吸声的材料，因此通常

$$Z_2=l w\rho_B v_B, \tag{3.3.49}$$

ρ_B 和 v_B 分别是背衬材料的密度和声速. 保护膜片通常很薄,又是非压电的;传声介质一般比较大,在短时间内可以假设介质内还没有反射. 在这些情况下,Z_1' 可以写作图 3.3.11 的等效电路. 图中

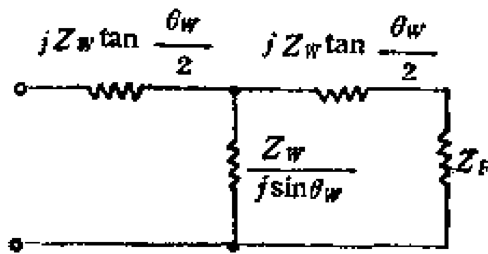


图 3.3.11 保护膜片和传声介质的综合等效电路

$$Z_w = lw\rho_w v_w, \qquad (3.3.50)$$

$$\theta_w = \frac{\omega d_w}{v_w}, \qquad (3.3.51)$$

$$Z_F = lw\rho_F v_F, \qquad (3.3.52)$$

下标 W 指保护膜片,下标 F 指传声介质.

图 3.3.10 中的 F_1 是作用于传声介质的作用力,是个有实际意义的量. 由图可以导出,

$$\frac{F_1}{NV} = Z_1' \times \left[Z_0(\cos\theta - 1) + jZ_2\sin\theta\right] \Big/ \left\{Z_0(Z_1'+Z_2)\left(\cos\theta - \frac{k_t^2}{\theta}\sin\theta\right) + j\left[(Z_0^2 + Z_1'Z_2)\sin\theta - 2Z_0^2 k_t^2 \frac{1-\cos\theta}{\theta}\right].\right\}$$

$$(3.3.53)$$

图 3.3.8 的等效电路以及随后的一些等效电路,都是在 $V(t)$ 或 $F(t)$ 是时间简谐的假设下推导出来的. 但如果采用富里叶变换,这些等效电路也可用来计算脉冲电声作用下的辐射声波或脉冲声波入射时的输出电压,下一章将对此有所讨论.

KLM 等效电路 1970 年 R. Krimholtz, D.A.Leedom 和 G.L.Matthaei 对压电换能元件提出了另一种等效电路,并逐渐被人采用,称作 KLM 等效电路. 对于厚度模压电片,KLM 等效电路如图 3.3.12 所示. 图中如前(分别见(3.3.29),(3.3.21),(3.3.33)式),

$$Z_0 = lw(\rho v^D),$$

$$v^D = \sqrt{\frac{c_{33}^D}{\rho}},$$

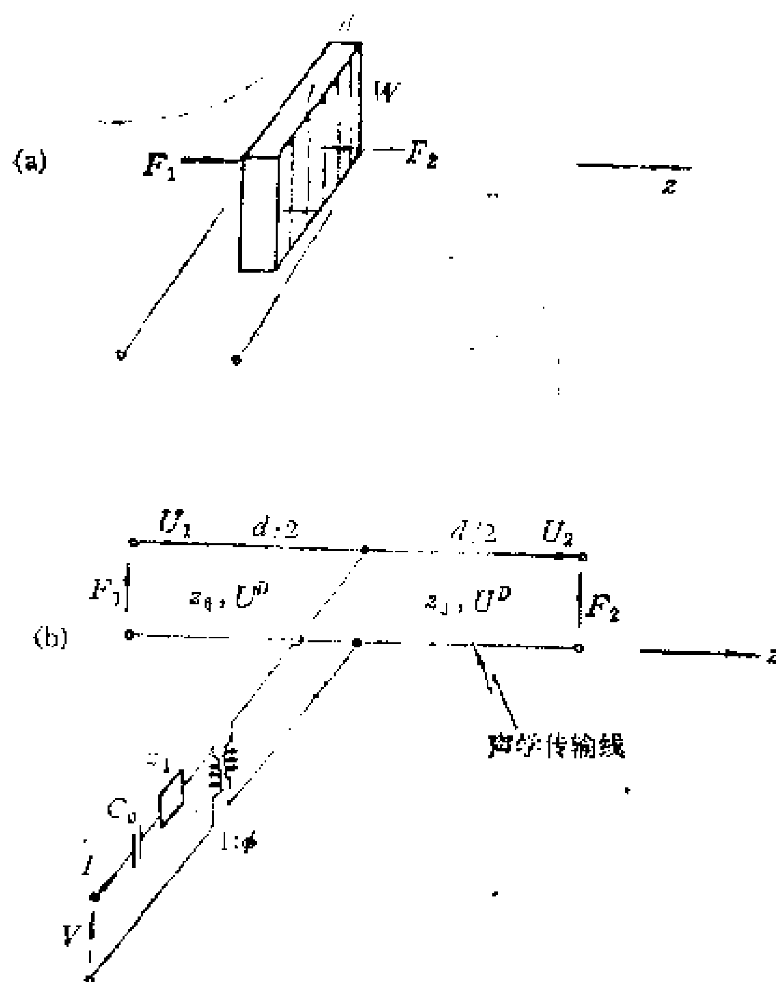


图 3.3.12 (a)厚度模压电片；(b)KLM等效电路

$$C_0 = \epsilon_{33}^{s} \frac{lw}{d}.$$

但机电变压器的圈数比 ϕ 是

$$\phi = \frac{\omega Z_0}{2h_{33}} \csc\frac{\theta}{2}, \tag{3.3.54}$$

即

$$\frac{1}{\phi} = \frac{2h_{33}}{\omega Z_0} \sin\frac{\theta}{2} = k_t \sqrt{\frac{\pi}{\omega_0 C_0 Z_0}} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega}{2\omega_0}\right), \tag{3.3.55}$$

式中

$$\theta = \frac{\omega d}{v^D} = \pi \frac{\omega}{\omega_0},$$

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \pi \frac{v^D}{d}, \qquad (3.3.56)$$

$$\mathrm{sinc}\, x = \frac{\sin \pi x}{\pi x}.$$

阻抗 Z_1 则是

$$Z_1 = jZ_0\left(\frac{h_{33}}{\omega Z_0}\right)^2 \sin\theta = jk_t^2 \frac{1}{\omega C_0} \mathrm{sinc}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right). \qquad (3.3.57)$$

KLM 等效电路的特点是把压电片明确地当作声学传输线,因此更突出了压电片内声学参量的空间分布性质. 当压电片两个端面上依次接有一些其它材料层,象电极层、背衬层、匹配层、传声层等时,这些层也可以作声学传输线,和压电片声学传输线顺序连接起来. 此外,KLM 等效电路避免了梅森等效电路中负电容这个客观上不存在的元件.

3.3.4 对压电换能器性能的控制

前几节介绍了压电材料,元件的一些基本性能,也简单介绍了厚度模压电换能器的组成和一般性能. 压电换能器有很多种类,为了检测材料,除上叙发射纵波的厚度模换能器外,还常需要能发射横波的切变模换能器,或者斜向发射纵波或横波的换能器. 为了超声加工、处理等应用,又需要发射频率较低、只几十千赫的超声. 为了产生高频(几十、几百或一两千兆赫)声表面波,通常的办法是在压电片上镀多指状电极,其它还有不少种类的压电换能器,如聚焦式的,阵列式的等等. 后面几章将简单地涉及其中一些类型,这些种类的换能器各具不同的性能.

对某一种类的压电换能器,它的具体性能也是多种多样的,因为影响它的具体性能的因素很多. 以图 3.3.6 所示厚度模换能器作例子,压电元件材料、背衬材料、保护膜片材料和厚度,所辐射的负荷介质,以及所加电压的波形(发射)或所接电阻抗的值(接收)都是可变的,从而导致换能器具体性能的变化. 这里首先要回答的问题是,换能器的具体性能有哪些? 反过来说,人们希望它有哪

些具体性能？

以检测材料用换能器或声表面波换能器为例，笼统些讲，人们大致会希望它：(i)频率响应满足指定的要求，(ii)作为发射器时发射效率高，(iii)作为接收时接收灵敏度高，(iv)动态范围宽，(v)电到声的相互转换是线性的，(iv)辐射声场的几何图案尽可能符合指定要求．这里要简单说明几点．一是关于第(i)和第(iv)两点中的"指定要求"，这要看用途而定．比如，就频率响应或波形来说，如果是声表面波滤波器中的换能器，所要求的频率响应应当和滤波指标相对应；如果是为检测材料内缺陷的换能器，则一般要求所发射的声波有高分辨率，反映到频率响应，一般相当于要求带宽大、同时频率响应曲线的形状和相位特性要适当．二是对第(iv)点中辐射声场的几何图案，在一定程度上是可以靠改变压电片的构造来控制的，特别是对于压电陶瓷片，可以用改变片子上的电极分布或对片子的极化方案等方法来控制，这牵涉到我们一直没有讨论的声源辐射问题．第三点要说明的是，除上列六点要求外，人们还可以对下列实际问题提出要求：在实际应用中，同样设计、同样方法制作的换能器，很难找到其中两个具有完全相同的具体性能．这是由于工艺很难完全一致，所以人们会要求各换能器间性能偏差不要太大．

前面提到，影响压电换能器具体性能的因素很多，反过来，在足够了解这些影响规律的前提下，我们可以靠控制这些因素来控制换能器的性能．前面几节的内容为此提供了一定的基础．试从压电材料的选择开始考虑．3.31 节曾提到，有许多种压电材料，各有它的一些特征常数，其实还另有一些 3.31 节未介绍到的材料特征常数，例如压电材料的特性阻抗(密度和声速的乘积)，表征压电材料内部损耗的力学 Q 值和电学 Q 值等等．我们从换能器的等效电路(3.3.3 节)已可大致看出，压电材料的选择至少会影响发射声波的幅度(发射时)或输出电压的幅度(接收时)．如果我们作些计算，就会发现，对于厚度模压电片，当工作频率小于谐振频率

时，发射效率正比于$\frac{k_t}{1-k_t^2}\sqrt{\varepsilon_{33}^S/c_{33}^D}$，而开路接收灵敏度正比于$k_t d_1/\sqrt{c_{33}^D\varepsilon_{33}^S}$，式中$d$是片子的厚度(当工作于谐振频率时，这两个式子也有参考价值). 所以，容易看出，就ε_{33}^S这个常数来说，发射时应当选择得高，接收时则应当选择得低.

压电换能器所用背衬材料也有选择性，以发射作为例子，要得到高的发射频率，是不应当加常用的吸收背衬的，其所以常加吸收背衬，是为了要控制换能器所发射声波的形状，但这样做牺牲了声波的幅度(关于换能器的瞬态响应，可参阅第四章.)

关于发射声波的波形问题，前面曾以频率响应的方式加以述说. 如果使用连续波，那就不存在波形问题，但实际上常使用脉冲波，这时波形是换能器的一个重要指标. 波形的含义包括脉冲宽度、波的起伏包络(例如可能是高斯形的)、波的最大幅度等. 应当要求怎样的波形，需要针对不同用途和不同情况作出考虑. 上述选择换能器背衬材料是控制换能器波形的一个手段，但还有其它一些类似手段.

我们注意到，除背衬外，在图 3.3.6 的换能器结构图中，在压电元件的另一面有保护膜片，膜片也会影响换能器所发射的波形. 膜片在某些情况是不必要的，但它给人们以启发、就是可以在压电片前面附加一层或多层薄片，其目的不是为了保护压电片，而是为了改变换能器的某些性能. 怎样选择这些"匹配"层的材料和厚度，可以借助于换能器的等效电路.

上面有关压电换能器所发射声波波形的讨论，是在指定输入电波形的前提下进行的. 问题便有：如果反过来，给定所要求的声波波形，那么在其它条件不变下，应当输入怎样的电压或电流波形？问题还有：除控制输入电波形之外，是否还可以外加什么电路，来控制声波波形，或者进一步来突出人们所要采集的材料内部的信息？有人在这些方面进行了一些努力，并取得一定的成就. 这种控制的方法是采用电子学手段，而不是象前面那样采用匹配层之类的声学手段. 为控制电源的波形，可在电源与换能器之间外加

"匹配"网络，对换能器的电输出进行信号处理. 例如，加用逆滤波器就是研究中的电子学手段之一.

附录 3-1　几种较常用压电材料的特征常数

PZT-4, PZT-8, PVF_2*

	ρ (10^3kg/m^3)	v (10^3m/s)		$\tan\delta_m=\frac{1}{Q_m}$	$\tan\delta_e=\frac{1}{Q_e}$	$\varepsilon_{33}^T/\varepsilon_0$
PZT-4	7.5	4.60	2.63	0.002	0.004	635
PZT-8	7.6	4.58	2.42	0.001	0.004	580
PVF_2	1.8	2.2	1.4	0.076 + 0.014sin(0.918 ln$f$)	0.236 + 0.076sin(0.86 ln$f$)	20.46 − 0.986 ln$f$ (f: 0.1-10^3MHz)

		S_{33}		S_{11}		S_{44}		S_{13}		
		S_{33}^E	S_{33}^D	S_{11}^E	S_{11}^D	S_{44}^E	S_{44}^D	S_{13}^E	S_{13}^D	$\times10^{-12}$
PZT-4		15.5	7.90	12.3	10.9	39.0	19.3	−5.31	−2.10	
PZT-8		13.5	8.0	11.5	10.0	31.9	22.6			m^2/N
PVF_2				~270						

		C_{33}		C_{11}		C_{44}		C_{13}		
		C_{33}^E	C_{33}^D	C_{11}^E	C_{11}^D	C_{44}^E	C_{44}^D	C_{13}^E	C_{13}^D	$\times10^{10}$
PZT-4		11.5	15.9	13.9	14.5	2.56	5.18	7.43	6.09	
PZT-8		13.7	14.0	12.3	16.1					N/m^2
PVF_2			0.87							

	Curie point (℃)	k_t	k_p	k_{31}		d_{33}	d_{31}	d_{15}	$\times10^{-12}$
PZT-4	328	0.51	−0.58	−0.33		289	−123	496	
PZT-8	300	0.48	−0.51	−0.28		225	−97	330	C/N
PVF_2		~0.2		~−0.10		~30	~−18		

PZT-4, PZT-8, PVF_2*

	e_{33}	e_{31}	e_{15}		g_{33}	g_{31}	g_{15}		h_{33}	h_{31}	h_{15}	
PZT-4	15.1	−5.2	12.7	C/m^2	25.1	−10.7	38.0	$\times 10^{-3}$ m^2/C	26.8	−9.2	19.7	$\times 10^8$ N/C
PZT-8	13.2	−4.0	10.4		25.4	−10.9	29.0					
PVF_2	~0.16					170−250						

* PVF_2数据来源甚杂，条件不一。

铌 酸 锂 单 晶*

S^E_{11}	S^E_{12}	S^E_{13}	S^E_{14}	S^E_{33}	S^E_{44}	S^E_{66}	S^D_{11}	S^D_{12}	S^D_{13}	S^D_{14}	S^D_{33}	S^D_{44}	S^D_{66}	$\times 10^{-12}$
5.55	−1.04	−1.3	−0.98	4.8	20.6	12.7	5.15	−0.53	−1.28	0.78	4.67	12.1	12.8	m^2/N

C^E_{11}	C^E_{12}	C^E_{13}	C^E_{14}	C^E_{33}	C^E_{44}	C^E_{66}	C^D_{11}	C^D_{12}	C^D_{13}	C^D_{14}	C^D_{33}	C^D_{44}	C^D_{66}	$\times 10^{11}$
2.06	0.52	0.74	0.088	2.45	0.60	0.77	2.19	0.37	0.74	−0.14	2.53	0.97	0.91	N/m^2

$k_t(0°z)$	$k_t(0°x)$	$k_t'(+35°y)$	$k_{15}(zx)$		$\varepsilon^S_{11}/\varepsilon_0$	$\varepsilon^T_{11}/\varepsilon_0$	$\varepsilon^S_{33}/\varepsilon_0$	$\varepsilon^T_{33}/\varepsilon_0$
0.17	0.67	0.49	0.038		43	84	29	30

d_{33}	d_{22}	d_{31}	d_{15}		e_{33}	e_{22}	e_{31}	e_{15}	
0.66	1.7	−0.13	7.7	$\times 10^{-11}$ C/N	1.36	2.3	0.14	3.7	C/m^2

g_{33}	g_{22}	g_{31}	g_{15}	$\times 10^{-2}$	h_{33}	h_{22}	h_{31}	h_{15}	$\times 10^9$
2.44	2.2	−0.56	10.6	m^2/C	5.9	6.1	0.55	9.2	N/C

* 刘鸿举等，声学学报，#2(1980)，134—144。

石 英 单 晶

ρ (10kg/m³)	v (10³m/s)			$\varepsilon^S_{11}/\varepsilon_0$	$\varepsilon^T_{11}/\varepsilon_0$	$\varepsilon^S_{11}/\varepsilon_0$	$\varepsilon^T_{33}/\varepsilon_0$
2.65	5.70	3.85		4.5	4.52	4.6	4.68

k_t		d_{11}	d_{14}	$\times 10^{-12}$ C/N	e_{11}	e_{14}	C/m²
0.10		−2.3	−0.67		0.171	−0.0436	

S^E_{11}	S^E_{33}	S^E_{44}	S^E_{12}	S^E_{13}	S^E_{14}	$\times 10^{-12}$ m²/N
12.77	9.60	20.04	−1.79	−1.22	−4.50	

C^E_{11}	C^E_{33}	C^E_{44}	C^E_{12}	C^E_{13}	C^E_{14}	$\times 10^{11}$ N/m²
8.67	10.72	5.79	0.70	1.19	−1.79	

参 考 书 目

[1] Wolfgang Sachse and Nelson N.Hsu, Ultrasonic Transducers for Materials Testing and Their Characterization, in Physical Acoustics, edited by W.P. Mason and R.N. Thurston, vol.XIV, P.277—406, Academic Press, Inc., New York (1979).

[2] O. E. Mattiat, Ed., Ultrasonic Transducer Materials, Plenum Press, New York-London (1971).

第四章　检 测 超 声

李　明　轩

§4.1　概　　述

超声检测技术是利用超声来进行各种检验和测量的技术．广义地讲，超声检测包括超声工业检测和超声医学诊断．本章所要讨论的是超声工业检测．

超声工业检测包括超声工业检验和超声工业测量两个方面．

超声工业检验是利用超声进行介质和部件内部缺陷的探测，其中包括金属与非金属原材料内部缺陷的探测，粘接或焊接缺陷的探测和地层缺陷的探测，通常称为超声无损探伤．

超声工业测量，是利用待测的与介质特性和状态有关的非声学量（如液体的密度、浓度、粘度、流量、液位和固体的致密度、晶粒度或球化率、弹性、硬度、粘接强度、厚度、应力以及温度等）与某些描述介质声学特性的超声量（如声速、衰减、声阻抗等）之间存在的关系，通过这些超声量的测定来分析介质的特性、评价介质质量和测出某些与工程有关的参量．

超声工业检测是超声应用极广泛的一门技术．广涉全部材料和机械制造业、石油化工、水文地质、矿山勘探和开采等各领域．超声工业检测在现代工业建设中不但可以保证质量、保障安全，而且也可以起到节约能源和资源、降低成本、提高成品率、获取显著经济效益的作用．它是发展现代工业不可忽视的、必不可少的技术．

研究超声检测技术中的声学问题，构成了今天超声学中的重要分支学科——检测超声．超声检测是诸检测技术中的一个，侧重于检测的方法和技术手段方面．检测超声侧重于检测的原理方面．检测超声主要讨论超声检测的理论基础，超声检测则涉及检测超声的具体应用．本章对超声检测不作全面介绍，只对检测超

声作些介绍.

总观超声检测技术，从检测超声角度可以分为两大类：一类是利用超声波在介质中的传播特性而发展起来的超声传播检测法；另一类是利用超声作用被检物体的振动特性而发展起来的振动检测法．在传播检测法中又可分为主动式和被动式两种．

主动式超声传播检测法是目前应用最广泛的一种．检测的过程是：

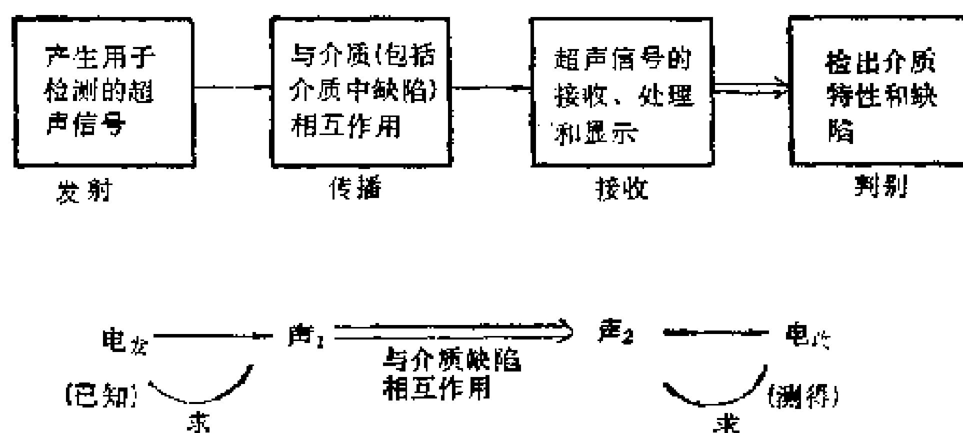


图4.1.1 主动式传播检测过程

在这个过程中，要求从电$_\text{发}$和电$_\text{收}$两个已知和测得的电信号求出声$_1$和声$_2$两个射入和射出介质的声信号，从声$_1$和声$_2$的对比中或从同一个声$_1$不同的声$_2$对比中去检出介质特性和缺陷特征．这个过程实际上是一个信号的传输检测过程．在这个过程中，由电$_\text{发}$和电$_\text{收}$去求声$_1$和声$_2$是检测换能器研究的问题，其中比较重要的是电声信号转换的瞬态特性和向介质辐射的声场特性．而如何从声$_1$与声$_2$或不同的声$_2$对比中去探测缺陷和分析介质特性，则是超声波在介质中的传播问题，其中主要的是传播的速度、衰减、界面上的反射和透射、缺陷的散射等特性．值得指出的是，上述这些声学问题又多处于脉冲和有界介质的条件，因而比经典连续波的换能器和传播理论要复杂一些，某些方面至今还不够成熟．

被动式超声传播检测法又称之为声发射技术．固体材料或构件在受外力或内力作用下产生形变或断裂时，以弹性波形式释放

出应变能的现象称为声发射．利用这种声发射特性发展起来的检测法叫作声发射检测技术．由于这种检测方法十分类似于水声中的被动声纳，我们这里称它为被动式超声传播检测法．它的检测过程是：

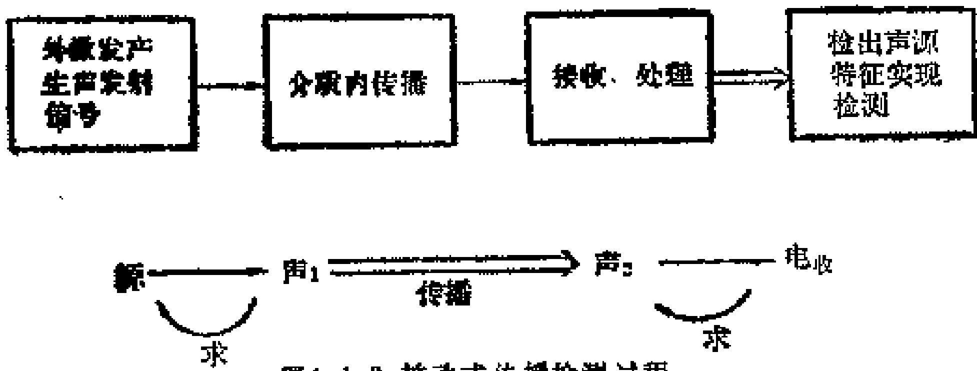


图4.1.2 被动式传播检测过程

在这个过程中，由测得的$电_{收}$根据换能器特性求出$声_2$，由$声_2$根据传播特性求出$声_1$，再由$声_1$根据各种声发射源特性判别声发射源的性质．由于一定条件下的声发射源的性质是与缺陷性质和材料特性有关，因而这种方法与主动式检测法一样，不仅可以用来探测缺陷，而且也可以用来研究材料特性．与主动式相比，这种方法不用主动注入一个声波，但需要外加一定的载荷，因而它可以实现某些产品运行中的动态检测．就检测方法的声学问题而言，除传播问题外，突出的是缺陷材料特性与声发射源的关系和如何排除噪声干扰对弱的声发射信号接收和处理的问题．

超声振动检测法是利用被检物体在外力作用下受激产生振动，通过对振动特性的测量来探测缺陷和物体（或介质）特性的方法．它的检测过程是：

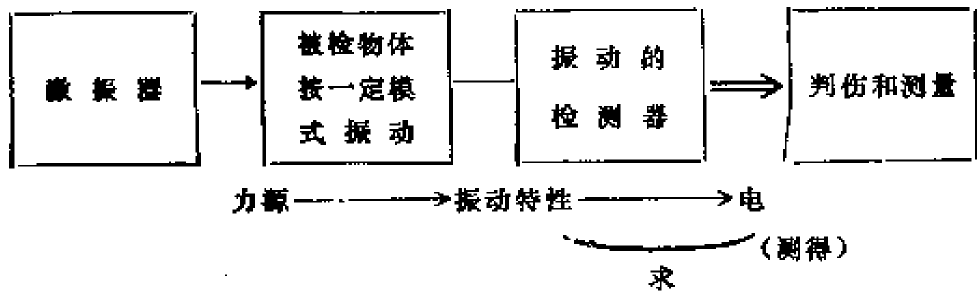


图4.1.3 振动检测法检测过程

在这个过程中，从测得的电信号特性求出被检物体的振动特性，再由物体的振动特性来实现缺陷的探测和某些测量．这种方法的声学问题．主要是如何激发物体振动，寻找物体振动特性与介质中缺陷、介质特性的关系，以及如何测量反映缺陷和介质特性的振动特性等问题．

在实际工作中，实现上述两大类三种检测方法的检测过程，可采取的具体技术和方法是多种多样的．根据检测对象和要求的不同，这些方法在不同的领域内又有各自特点的具体应用和发展．为了既着重讲述检测超声问题，又能照顾到从事实际工作读者的需要，本章将从应用角度出发，分别介绍检测超声换能器、超声无损探伤、介质声学量的测量和介质特性分析、超声工程量的测量．

§4.2 检测超声压电换能器

超声检测过程是信号的传输过程，有关检测超声信号的产生和接收是检测超声中比较重要的问题之一．检测超声换能器是实现产生和接收用于检测的超声信号的器件．随着无损探测技术的发展，对检测超声换能器的研究与制作，在国内外越来越受到普遍的重视．检测超声换能器主要是利用材料压电效应做成的压电换能器，人们常称它为探头．

探头是与探测的方法和方案紧密联系在一起的．由于超声检测的用途广泛，可选取的方法、方案较多，所以探头的种类也是多种多样的．用于主动式检测的探头有：按频谱分有宽带窄脉冲探头和窄带连续波探头，以及冲击波探头、特高频探头和特低频探头等；按工作波型分有直角纵波探头和斜角横波、板波、表面波和爬波探头等；按耦合方式分有直接接触探头和水（液）浸探头；按波束分有不聚焦的平探头和聚焦探头；按工作方式分有单探头、双斜（TR）探头，机械扫描和电子切换探头、电子束扫描相控阵列探头等；按工作的环境分有高温探头、微型探头、高压探头等等．超声测量探头有共振式测试探头、脉冲式测试探头、时差测试陡前沿探

头和动目标测量的多普勒探头等. 被动式工作声发射探头有多模探头、波型鉴别和定位探头、小频率窗口的窄带探头和大频率窗口的宽带探头等. 声学振动检测法探头有声阻法探头、声撞击探头、福克仪探头、硬度计探头、粘度计探头、加速度计探头、压力传感器探头等等. 此外还有科研用的一些特殊标准探头,比如声场测量的微型探头,脉响测试的宽带探头、灵敏度校准的标准探头等等.

超声检测换能器大都工作在暂态状态下,对探头暂态特性的讨论,无论对低频还是高频工作都是一项重要内容. 普遍关心的问题是探头在暂态下信号传输转换的特性,进而掌握和了解用于检测超声信号的特征. 本节我们着重在前一章的基础上,就其暂态特性作进一步的介绍.

探头的暂态特性分析,是讨论探头在已知电脉冲激励下,在负载中产生的超声波脉冲响应特性,或者在已知一个入射声波脉冲作用下,探头输出的电脉冲响应特性;或者在已知电脉冲激励下,探头在负载中产生的超声由界面反射回来后又被探头接收输出的电脉冲响应特性等. 也就是通常所说的发射、接收、又发又收特性. 探头的这些特性,不但与探头的结构(背衬、压电片、保护膜等)有关,而且还与激励源波形(发射时电压波形、接收时入射声波波形)有关,还与电发生器的内阻和接收器的输入阻抗等有关,所以完整的系统的探头暂态特性分析的内容是相当丰富的. 这里我们仅对一般的几个基本问题作些分析介绍.

4.2.1 暂态换能特性的讨论

压电体内在电场不连续处将产生应力,形成扰动源. 薄压电

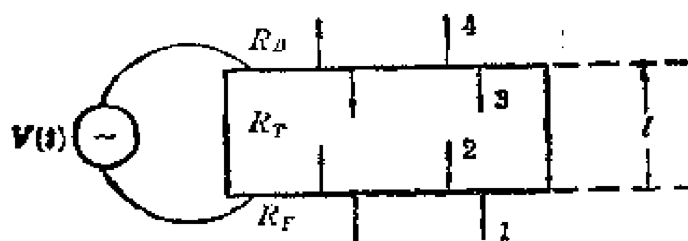


图4.2.1 表面换能示意图

片在厚度方向加电场时，由于表面处电场不连续，形成表面换能作双面辐射．如图 4.2.1 所示．图中 R_B、R_T、R_F 分别为背衬、压电片和负载的声阻抗率，表面换能可以用图 4.2.2 所示的传输网络来表示．

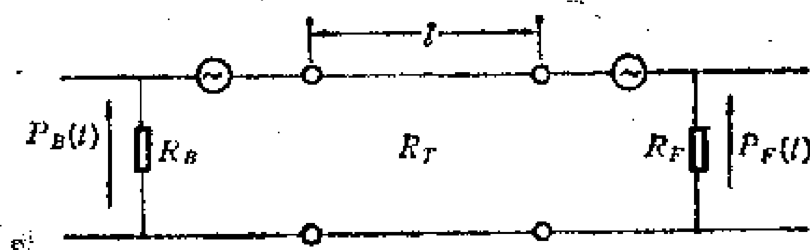


图4.2.2　表面换能等效传输网络

由图 4.2.1 可见，当在压电片上加一个电脉冲时，在压电片两个表面同时产生 4 个声脉冲，两个是由晶片表面向外辐射，两个是从表面向晶片内辐射．通常规定向晶片外辐射为正，向晶片内辐射为负．向内的两个声脉冲在晶片内传播到对面的表面时，还将产生反射和透射，这样就在晶片一方介质（比如负载或背衬）内，产生了有一定周期的声脉冲序列．在负载介质中有表面直接辐射的声脉冲 1，经过时间 $\tau=\dfrac{l}{v_T}$ 后有另一表面辐射声脉冲 3 在负载界面的透射声脉冲5，经过时间 2τ 又有负载表面脉冲2由背衬界面反射再经负载界面透射的声脉冲 6 等等，这个过程如图 4.2.3 所示．这里的时间 $\tau=\dfrac{l}{v_T}$ 为声波在压片内的传播时间，v_T 为压电片内的声速．激励电压为 δ 脉冲，图中脉冲1，$P_1=\dfrac{1}{2}nV_0t_{TF}$；脉

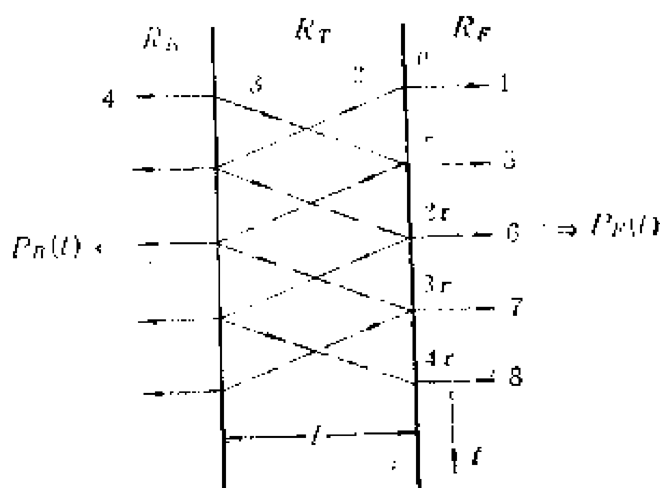


图4.2.3　表面换能辐射脉冲

冲 2，$P_2=\frac{1}{2}nV_0t_{FT}$；脉冲 3，$P_3=\frac{1}{2}nV_0t_{BT}$；脉冲 4，$P_4=\frac{1}{2}nV_0t_{TB}$；脉冲 5，$P_5=P_3t_{TF}$；脉冲 6，$P_6=P_2\cdot r_{TB}t_{TF}$；脉冲 7，$P_7=P_3r_{TF}\cdot r_{TB}\cdot t_{TF}$；脉冲8，$P_8=P_2\cdot r_{TB}\cdot r_{TF}\cdot r_{TB}\cdot t_{TF}$，…．其中 t，r分别为晶片界面的透射系数和反射系数．t_{ab} 和 r_{ab} 表示由 a 介质向 b 介质的透射和反射系数．它们为

$$t_{TF}=\frac{2R_F}{R_T+R_F},\quad t_{FT}=\frac{2R_T}{R_T+R_F},\quad t_{BT}=\frac{2R_T}{R_T+R_B},$$

$$r_{TF}=\frac{R_F-R_T}{R_F+R_T},\quad r_{FT}=\frac{R_T-R_F}{R_T+R_F},\quad r_{TB}=\frac{R_B-R_T}{R_B+R_T}.$$

n 为机电转换系数，可表示为 $n=C_0^*h_{33}=\frac{s}{e}e_{33}$，$C_0^*$ 为压电片箝制电容，h_{33} 和 e_{33} 为压电系数，s 为压电片面积．图 4.2.3中辐射到负载中的声脉冲 $P_F(t)$ 可用下述公式表示：

$$P_F(t)=\frac{1}{2}nV_0t_{TF}\left\{\delta(t)-\sum_{N=1}^{\infty}(r_{TB}\cdot r_{TF})^{N-1}\left[t_{BT}\delta\left(t+\frac{l}{v_T}-2N\frac{l}{v_T}\right)+t_{FT}r_{TB}\delta\left(t-2N\frac{l}{v_T}\right)\right]\right\}. \tag{4.2.1}$$

如果$V(t)=\begin{cases}1.0 & t=0\\ 0 & t\neq0\end{cases}$，背衬和负载均为水，压电片为石英，则

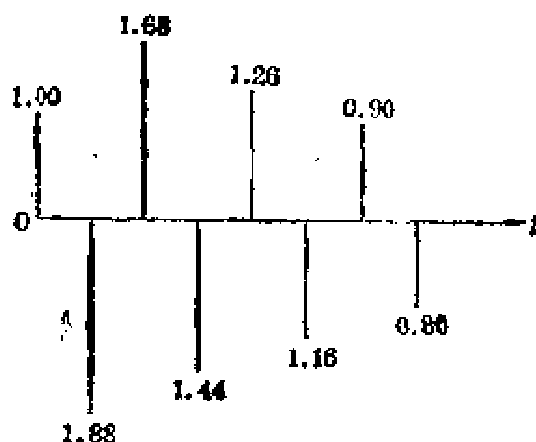


图4.2.4　水中辐射脉冲

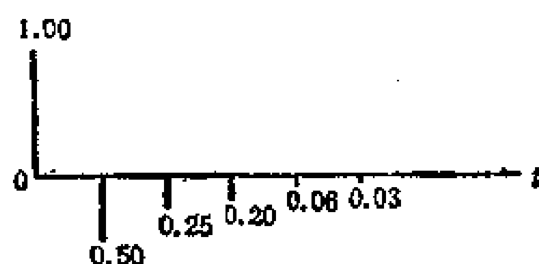


图4.2.5　钢中辐射脉冲

$R_B = R_F = 1.5\times10^6\text{kg/m}^2\cdot\text{s}$，$R_T = 15\times10^6\text{kg/m}^2\cdot\text{s}$，可得在水中辐射声脉冲如图4.2.4所示．当背衬和负载均为钢时，$R_B = R_F = 45\times10^6\text{kg/m}^2\cdot\text{s}$，则石英压电片向钢中辐射声脉冲如图4.2.5所示．

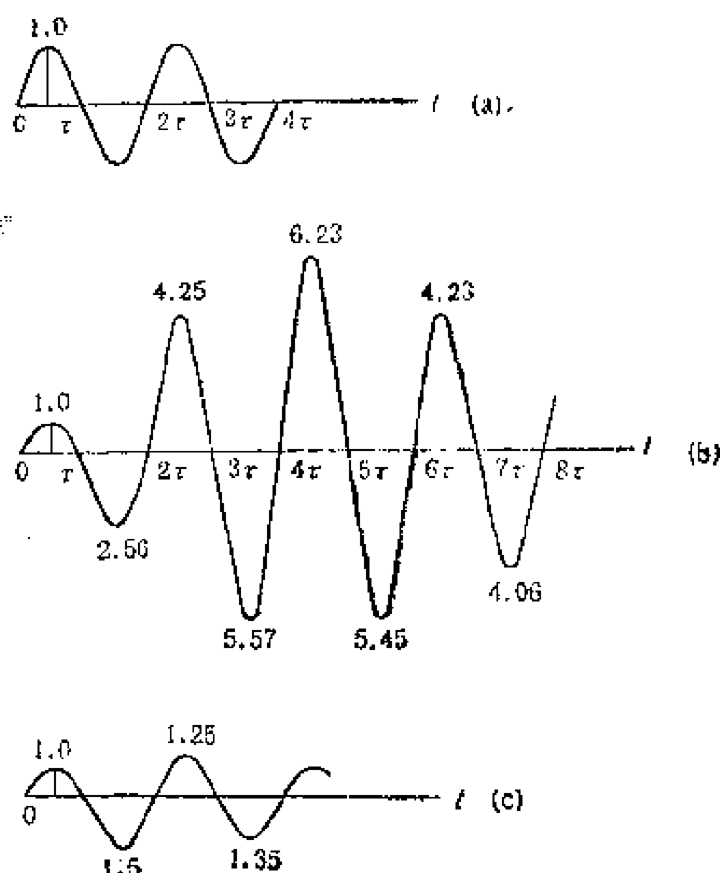


图4.2.6　正弦电压脉冲激励在水和钢中的辐射

(a)电激励脉冲；　(b)水中脉冲；　(c)钢中脉冲

如果取激励电压为正弦衰减脉冲 $V_{(t)} = V_0 e^{-\alpha t}\sin(\omega_0 t)$，则可得负载辐射声脉冲为

$$P_F(t) = \frac{1}{2}nV_0 t_{TF}\Big\{e^{-\alpha t}\sin(\omega_0 t) - \sum_{N=1}^{\infty}(r_{TB}\cdot r_{TF})^{N-1}$$

$$\times\Big[e^{-\alpha(t+\frac{l}{v_T}-2N\frac{l}{v_T})}\cdot t_{TB}\cdot\sin\omega_0\Big(t+\frac{l}{v_T}-2N\frac{l}{v_T}\Big)$$

$$+e^{-\sigma\left(t-2N\frac{l}{v_T}\right)}(t_{TF}\cdot t_{BF})\sin\omega_0\left(t-2N\frac{l}{v_T}\right)\Bigg]\Bigg\}.$$

(4.2.2)

对于其它形式的电脉冲激励，最新的研究成果表明，图 4.2.3 所示的每一个表面换能的声脉冲都与激励电压脉冲波形一致，它们的幅度也都如同 δ 脉冲激励一样乘上相应的透射和反射系数及转换系数．这样，对任何形式的电压脉冲激励，都可以在 δ 脉冲所得结果的基础上，利用图解法作波形叠加来求出辐射的声脉冲．比如，取如图4.2.6(a)、4.2.7(a)和4.2.8(a)所示的电压脉冲波形，石英压电片向对称水负载和对称钢负载辐射的声脉冲分别如图 4.2.6(b)、(c)，4.2.7(b)和4.2.8(b)、(c)所示．

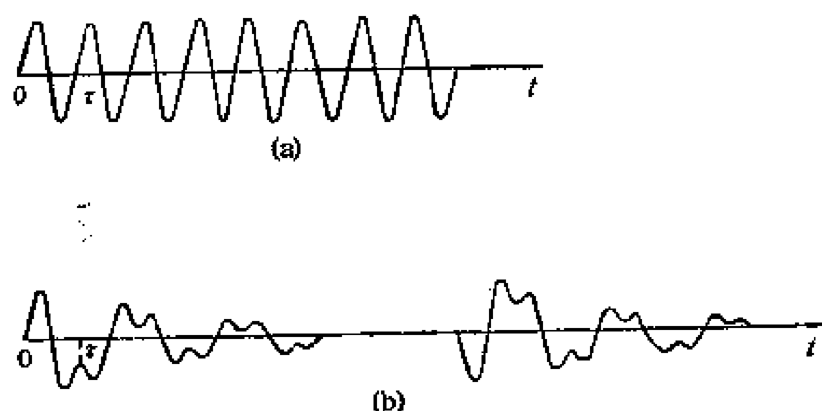


图4.2.7 二倍频正弦电脉冲激励在水中辐射脉冲

(a)电压脉冲波形；　(b)对称水负载辐射声脉冲

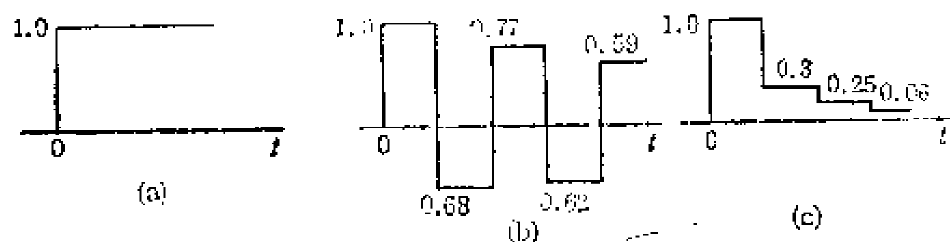


图4.2.8 阶跃电脉冲激励在水、钢中辐射脉冲

(a)电压波形；　(b)对称水负载声脉冲；　(c)对称钢负载声脉冲

为了讨论不同的背衬和负载条件对辐射声脉冲特性的影响，我们给出以单位 δ 脉冲电压为例所得的结果，如图4.2.9所示．

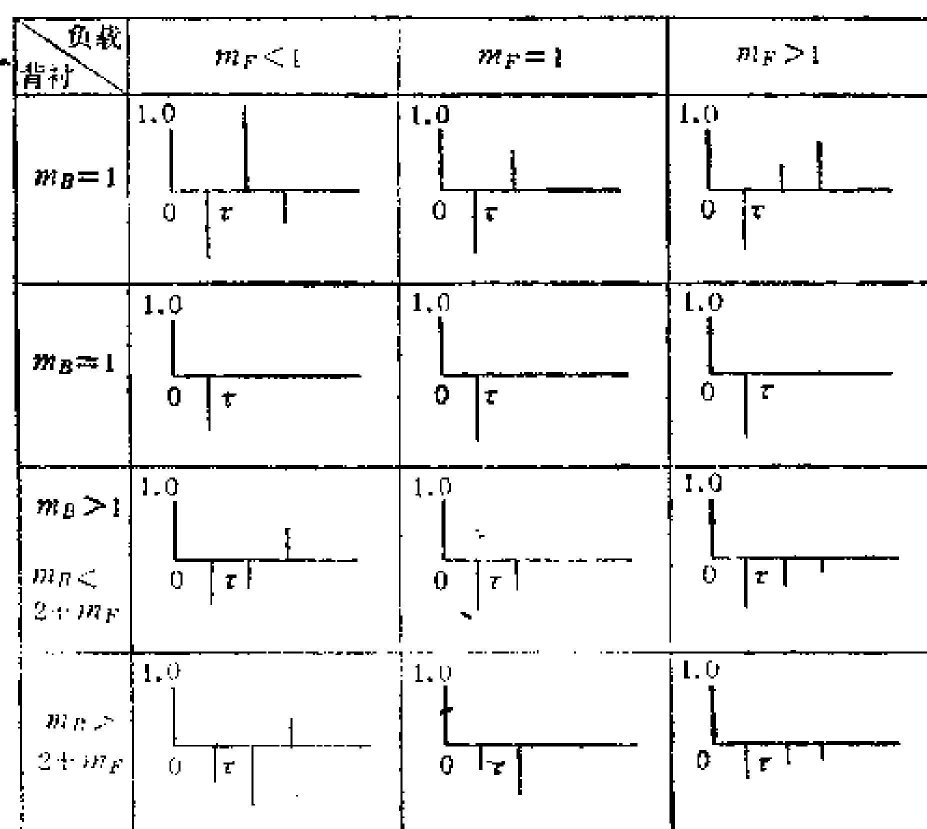


图4.2.9 不同背衬和负载下的辐射脉冲

图中 $m_F=\dfrac{R_F}{R_T}$，$m_B=\dfrac{R_B}{R_T}$. 由图可见，当 $m_B=1$，即背衬阻抗与压电阻抗相匹配时，可以获得最窄的声脉冲. 从这里可以得到，若想得到宽带窄脉冲，只有设法将探头背衬尽量作到与压电片阻抗匹配. 仅就这一点，在工艺上实现就比较困难. 目前利用钨粉加环氧树脂固化做成的背衬，虽然声吸收衰减可以满足背衬消声的要求，但做到阻抗与压电片(尤其高阻抗的 PZT、PT)相匹配还差得较远. 这主要是固化后的背衬不管钨粉的配比如何，声速始终接近于环氧树脂固化的声速，一般在 2000 m/s左右. 因此，即使密度可随配比提高，但阻抗率还是很难做得象 PZT 等一类压电片的那样大.

压电体作接收时，作为近似也可以看成是表面换能机电转换的过程. 接收的暂态特性也可以与发射作同样的讨论. 当入射声

脉冲为单位 δ 脉冲时，压电片输出的电脉冲，首先是声波与前表面相作用输出电脉冲，然后声波透射进晶体传播到后表面，再作一次换能给出第二个电脉冲，当背衬和负载与压电片不相匹配时，声波将在压电片内作多次反射，反复与前后两个表面作用，则给出一个一定周期的电脉冲信号序列．与发射时一样，当背衬与压电片匹配时，声将不会在压电片内作多次往返反射，这时只输出前后表面各作用一次的一正一负的短脉冲．如图 4.2.10 所示．

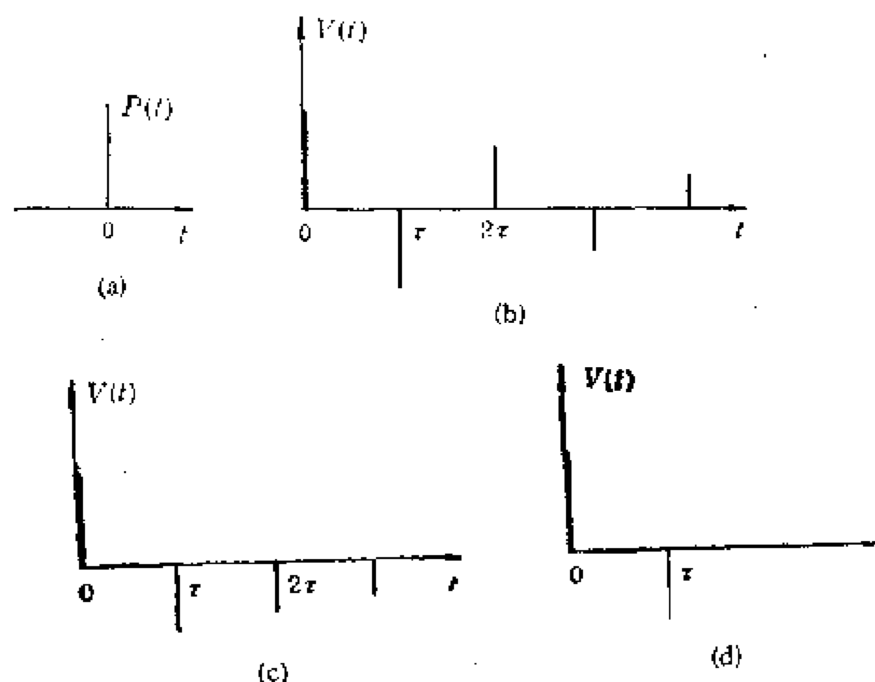


图4.2.10　δ 声脉冲入射表面换能接收电压脉冲

(a) 入射声脉冲；　(b) $R_F<R_T$，$R_B<R_T$；

(c) $R_F>R_T$，$R_B>R_T$；　(d) $R_B=R_T$

如果一个高频声脉冲被较厚的压电片所接收，可利用图解法给出输出电脉冲，如图 4.2.11 所示．如果 $R_B \neq R_T$，声波将在压电片内多次反射，直到衰减完为止．这时，还需要注意到每一个界面反射系数是正还是负．在压电片内向外作用的脉冲输出电脉冲总是反向．最后所得脉冲应为所有脉冲的叠加．图4.2.12和图4.2.13给出了一个背衬匹配的压电片，对一个周期声脉冲和正弦指数衰减的声脉冲由图解法得到的输出电脉冲波形，这里取入射声脉冲频率与压电片谐振频率相同．

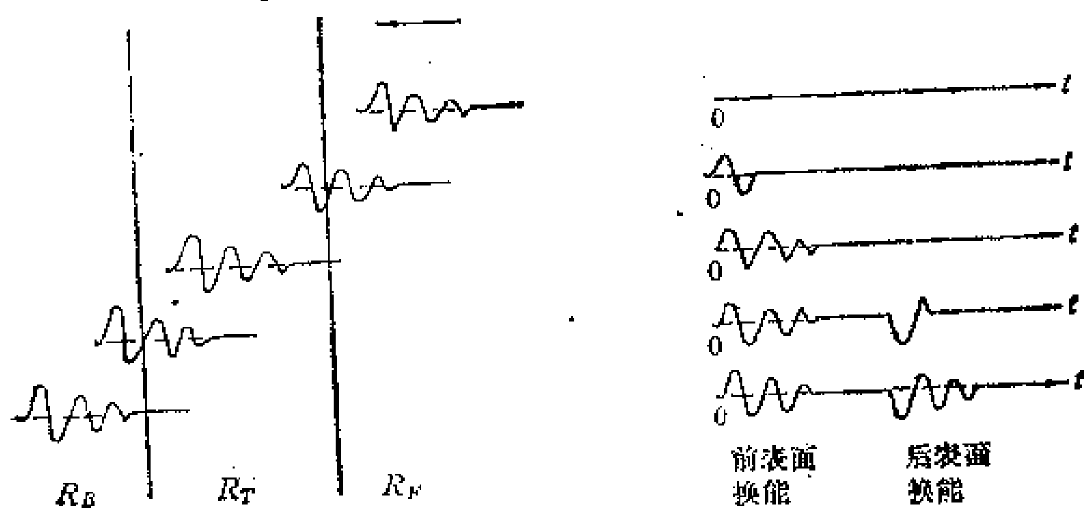


图4.2.11 厚片表面换能接收输出电压波形

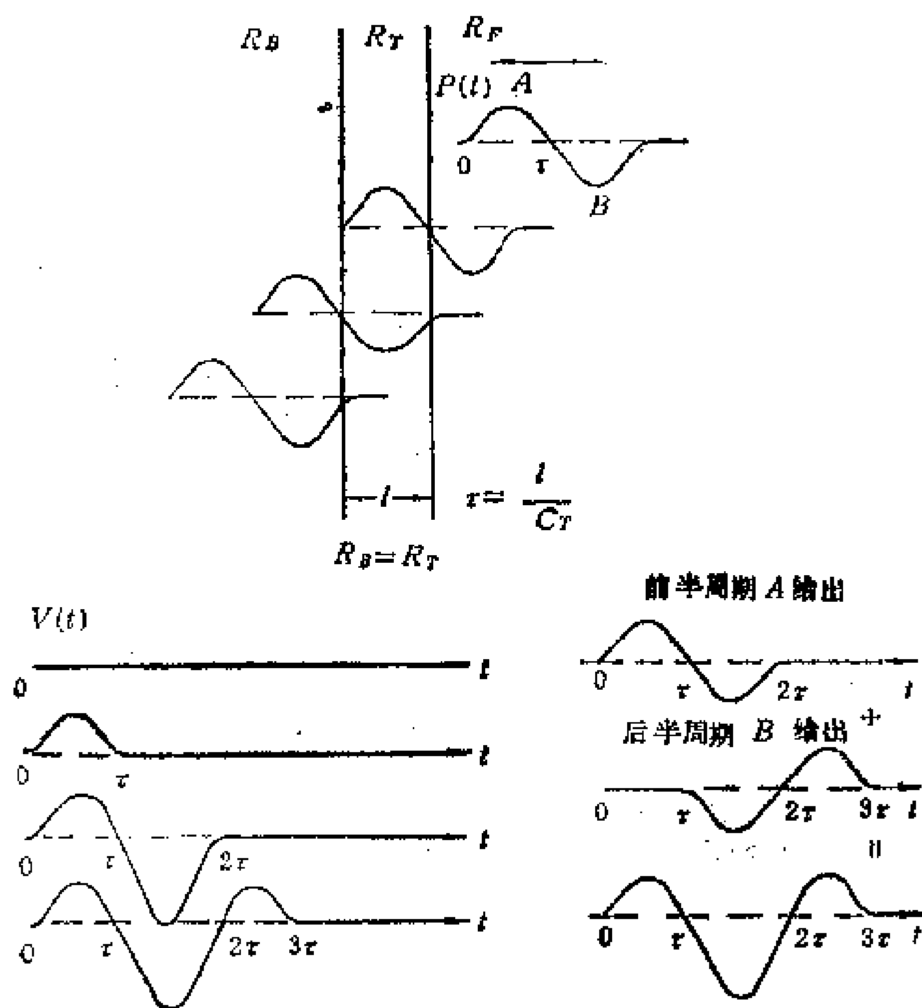


图4.2.12 单周期声波输入匹配换能的输出电脉冲

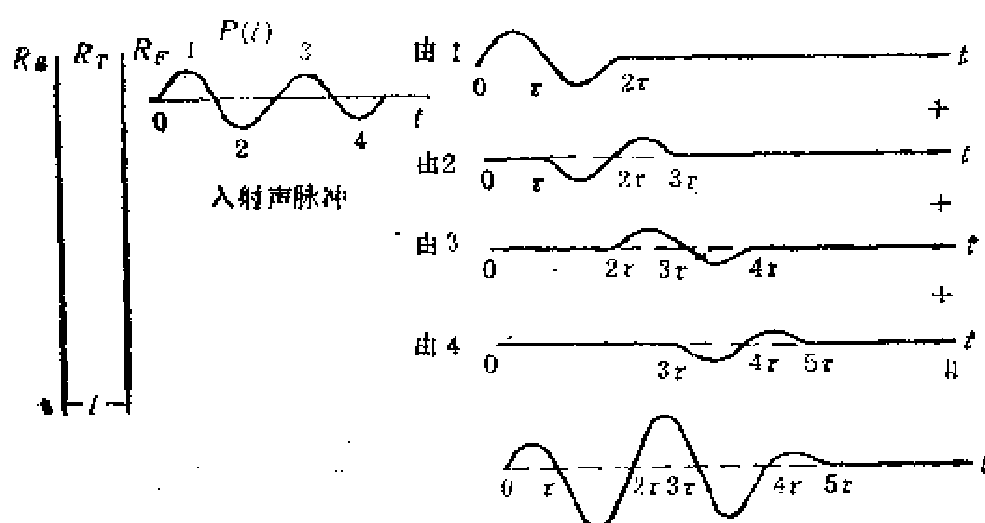


图4.2.13 正弦衰减脉冲输入匹配换能器接收输出中脉冲

换能器作开路接收时，输出电压可以表示为

$$V = h_{33}(\xi_0 - \xi_l),$$

式中 h_{33} 为压电系数，ξ_0 和 ξ_l 分别为压电片前后表面的质点位移。由于声压 P 正比于质点位移速度 $\frac{d\xi}{dt}$，所以输出的电压 V 对时间的微分才与入射声压波形相对应，这是接收与发射所不同的地方。

上述讨论的表面换能原理只适用于机电耦合系数小的弱耦合压电材料，而对于强耦合的压电片作成的换能器，需要在表面换能的基础上作进一步的讨论。

选取如图 4.2.14 所示的换能器结构和坐标，压电方程有

$$\begin{cases} T = c_{11}^E \dfrac{\partial \xi}{\partial x} - e_{11} E_1, \\ D = e_{11} \dfrac{\partial \xi}{\partial x} + \varepsilon_{11}^S E_1. \end{cases} \tag{4.2.3}$$

运动方程有 $\rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial T}{\partial x}$，力学边界条件为

$$\begin{cases} T|_{x=0} \cdot S = \dot{\xi}|_{x=0} \cdot Z_F, \\ -T|_{x=l} \cdot S = \dot{\xi}|_{x=l} \cdot Z_B, \end{cases} \tag{4.2.4}$$

其中 S 为面积，ξ 为质点位移。

电边条件为$\int_0^l E(xt)dx = V(t)$，压电片的绝缘条件为$\frac{\partial D}{\partial x}=0$. 由上述这些条件可以求出

$$E = \frac{V(t)}{l} - \frac{e_{11}}{\varepsilon_{11}^s}\frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{e_{11}}{\varepsilon_{11}^s l}(\xi|_{x=l} - \xi|_{x=0}), \tag{4.2.5}$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}，其中\ v^2 = (c_{11}^E + e_{11}^2/\varepsilon_{11}^s)/\rho = c_{11}^D/\rho. \tag{4.2.6}$$

利用拉氏变换可以推导出压电片内部的应力和位移，片上的电压，以及通过压电片的电流. 由于这些公式过于冗长，不便一一列出，这里只给出向负载辐射的声波的应力表达式：

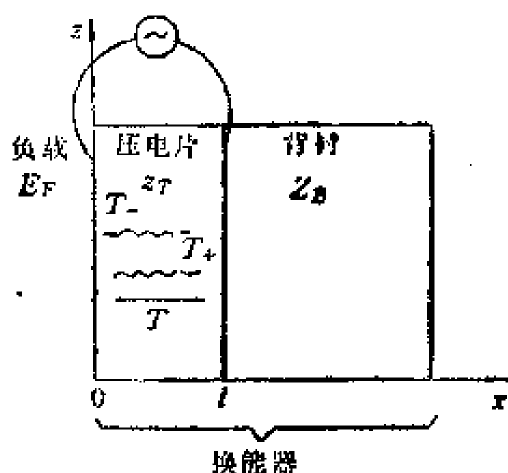


图4.2.14 换能器结构

$$P(t) = -T(ot)$$
$$= \frac{n}{s}\left[\sum_{i=0} g_{ijp}\delta(t - i\tau_0) + \sum_{i=0}\sum_{p=1}^{i}\sum_{j}\frac{g_{ijp}k_i^{2p}(t-i\tau_0)^{p-1}e^{a(t-i\tau_0)}H(t-i\tau_0)}{(p-1)!\ \tau_0^p}\right],$$

其中 $g_{ijp} = \frac{Z_p}{Z_T+Z_p}\left[f_{ijp} - \frac{Z_T}{Z_T+Z_B}f_{(i-1)jp} + \frac{Z_T - Z_B}{Z_p+Z_B}f_{(i-2)jp}\right]$,

$$f_{ijp} = \frac{(-1)^j C_{i-j}^j C_j^{p\ \ i+2j} 2^{p+i-2j} Z_T^{2p}(Z_T - Z_p)^{i-p-\cdots}}{(Z_T+Z_p)^{p+j}}$$
$$\times \frac{(Z_T - Z_B)^{i-p-j}(2Z_T^2 - Z_F^2 - Z_B^2)^{p-i+2j+1}}{(Z_T+Z_B)^{p+j}}$$
$$+ \frac{(-1)^i C_{i-j}^j C_j^{p-i+2j-1} 2^{p+i-2j-1} Z_T^{2p-1}}{(Z_T+Z_p)^{p+j}}$$
$$\times \frac{(Z_T - Z_p)^{i-p-j+1}(Z_T - Z_B)^{i-p-j+1}}{(Z_T+Z_B)^{p+j}}$$
$$\times (2Z_T^2 - Z_p^2 - Z_B^2)^{p-i+2j+1} \tag{4.2.7}$$

其中$\alpha=\frac{K_t^2\gamma}{\tau_0}$，$\tau_0=\frac{l}{v_T}$为声波在片内的传播时间，$K_t=(e_{11}^2/c_{11}^E\varepsilon_{11}^S)^{1/2}$为机电耦合系数．$\gamma=\frac{Z_T}{Z_T+Z_F}+\frac{Z_T}{Z_T+Z_B}$，$H(t)$是亥维赛函数，$H(t)=\begin{cases}0 & t<0\\1 & t>0\end{cases}$，$i,j,p$是整数，取值范围为$0\leqslant i\leqslant\frac{t}{\tau_0}+1$，$(i-P)/2\leqslant j\leqslant i-P$且$j\leqslant i/2$．$C_j^i$是组合数．

从上式可见，$P(t)$可以分为包含δ函数的许多项与不包含δ函数的许多项．包含δ函数的一些项是前面已讨论过的表面换能．不包含δ函数的一些项表征声电再生换能，它是由于压电片在电场作用下向外辐射声波的同时，片子本身改变厚度引起了电场变化．而电场变化又引起厚度改变这样一个反复声电相互作用的结果．声电再生的强弱主要由压电片机电耦合系数K_t、负载和背衬的匹配条件及时间长短以及在考虑源内阻时的内阻大小等因素所决定的．从这些结果我们不难看出，表面换能只是一种近似，是严格解的零级近似，对于强耦合的压电片除表面换能外，还必须加进声电

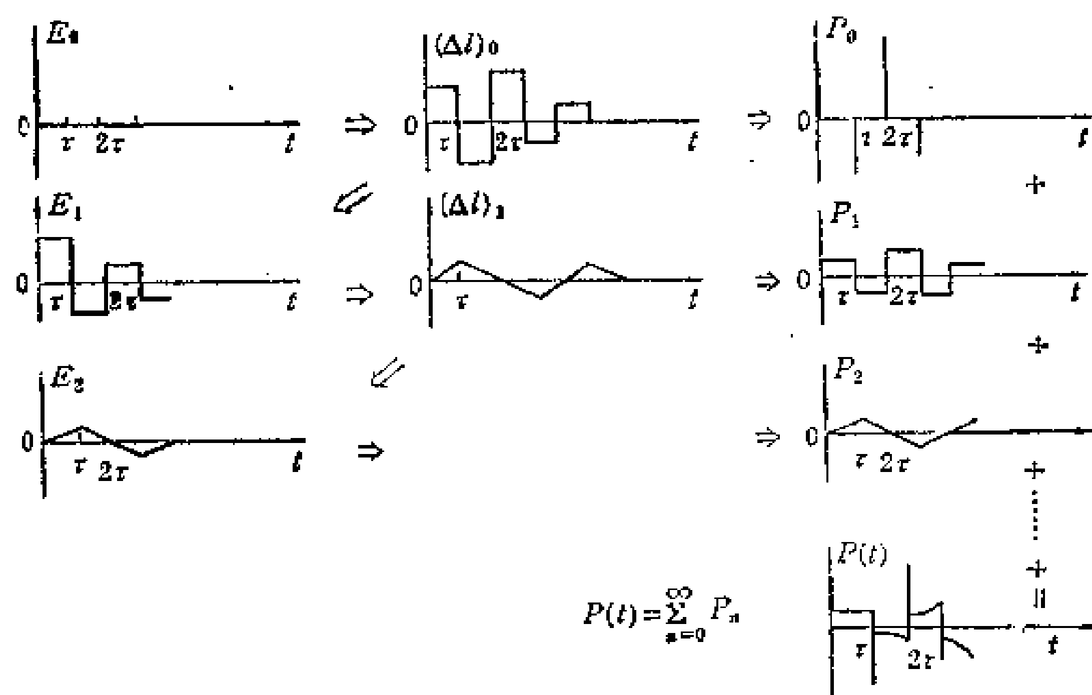


图4.2.15　换能过程示意图

再生的修定项．图4.2.15给出声电再生的示意图．

梅森等效电路(见前章)是严格精确的，其中负电容表征了声电再生的作用．在换能器暂态分析中，采用梅森等效电路利用计算机作数值计算是比较简便的方法，不但可以分析换能器结构参数、激励源和压电片等对发射、接收和又发又收暂态特性的影响，而且还可以进行换能器的计算机模拟设计．

选取如图4.2.16所示探头结构，其梅森等效电路如图4.2.17所示．图中 $Z_{ia}=\rho_i v_i S\,\mathrm{th}(k_i' l_i/2)$，$Z_{ib}=\rho_i v_i S/\mathrm{sh}(k_i' l_i)$ (其中 $i=2,3,4$)，$Z_1=\rho_1 v_1 S$，$Z_5=\rho_5 v_5\cdot S$．其中 S 为面积，ρ_i、v_i、l_i 分别为各层的密度、声速和厚度．$k_i'=k_i\left[j+\dfrac{1}{2Q_i}\right]$，$k_i=\dfrac{\omega}{v}$，$Q_i$ 为材料的机械 Q 值．如果取

$$\begin{cases}z_1=[n^2R_i/(1+j\omega c_0R_i)]-(n^2/j\omega c_0)+Z_{3b},\\ z_2=Z_{2a}+[Z_{2b}(Z_{2a}+Z_1)/(Z_{2b}+Z_{2a}+Z_1)]+Z_{3a}\\ z_3=Z_{3a}+Z_{4a},\quad z_4=Z_{4b},\quad z_5=Z_{4a}+Z_5,\end{cases}\tag{4.2.8}$$

则可得发射声波频响为

$$P(\omega)=nF[v_s(t)]\cdot Z_5/\{(1+j/\omega c_0R_i)[a_3z_2+(a_1+a_3)z_1]\cdot S\},\tag{4.2.9}$$

其中 $a_1=1+z_5/z_4$，$a_3=(a_1z_3+z_5)/z_2$，

$$P(t)=F^{-1}[P(\omega)].$$

换能器作接收时的等效电路如图4.2.18所示．

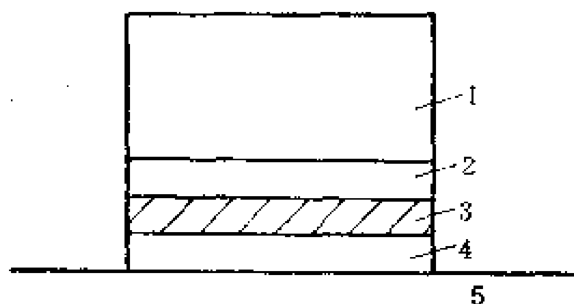


图4.2.16 换能器结构

(1——背衬吸收块；2——背衬匹配层；3——压电片；4——保护膜；5——负载)

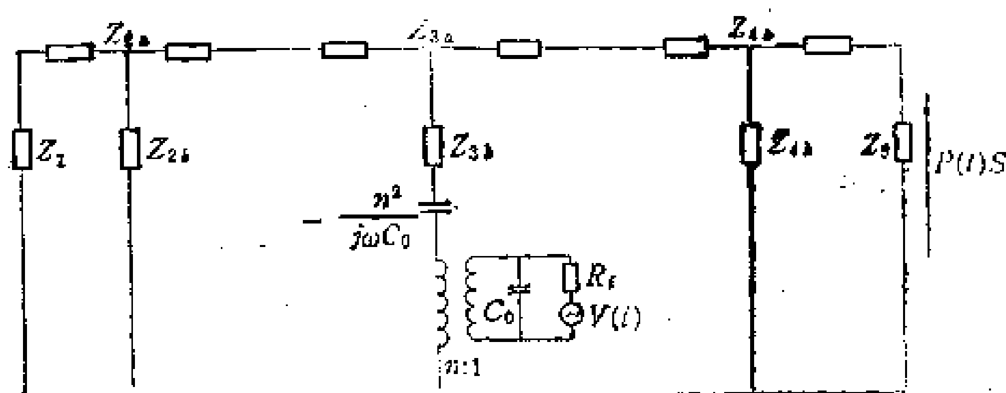


图4.2.17 发射等效电路

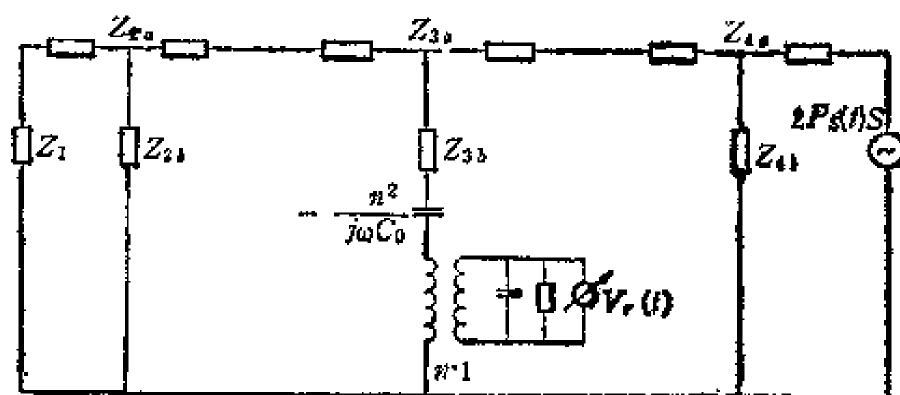


图4.2.18 接收等效电路

可以求得接收输出电压频响为

$$V_r(\omega) = 2nSR_i'F[P_s(t)]/\{(1+j\omega C_0R_i')\cdot[a_3'z_4+(a_1'+a_3')z_5']\}$$
(4.2.10)

其中 R_i' 为接收器的输入阻抗，$z_5'=z_5-Z_5=z_{4a}$，$a_1'=1+z_1/z_2$，$a_3'=(a_1'z_3+z_1)/z_4$，电压脉响为$V_r(t)=F^{-1}(V_r(\omega))$。如果选取如图4.2.19所示的又发又收的情况，可以求得输出电压为

$$V_{sr}(\omega)=\{2n^2Z_5\cdot re^{-2\beta l}\cdot R_i'\cdot F[V_s(t)]\}/\{(1+j\omega C_0R_i)$$
$$\times(1+j\omega C_0R_i')\cdot[a_3z_2+(a_1+a_3)z_1]\cdot[a_3'z_4$$
$$+(a_1'+a_3')]z_5']\},\tag{4.2.11}$$

$$V_{sr}(t)=F^{-1}[V_{sr}(\omega)].\tag{4.2.12}$$

其中 r 为底面的反射系数，β 为介质内的传播衰减系数。

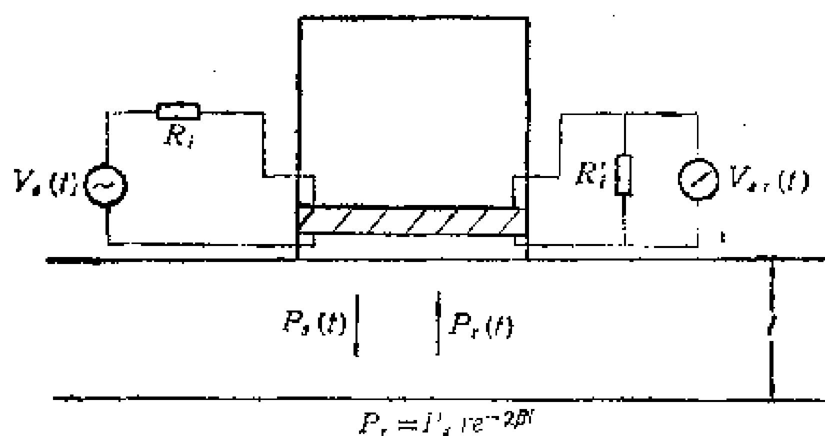


图4.2.19 又发又收示意图

在超声压电换能器的研究中，对于圆形压电片的振动，通常作为纯厚度模式振动或纯经向模式振动的一维问题来近似处理．上述所有的讨论结果也都只适用于纯厚度模一维振动的条件．当压电片的厚度和经向的机电耦合都比较强，片厚与直径比又不是足够小或足够大时，比如声发射探头和福克仪探头，这种一维近似就不再适用了．我们从运动方程、压电方程和自由电荷方程出发，取一定的近似后可推导出二维的等效电路，如图 4.2.20 所示．

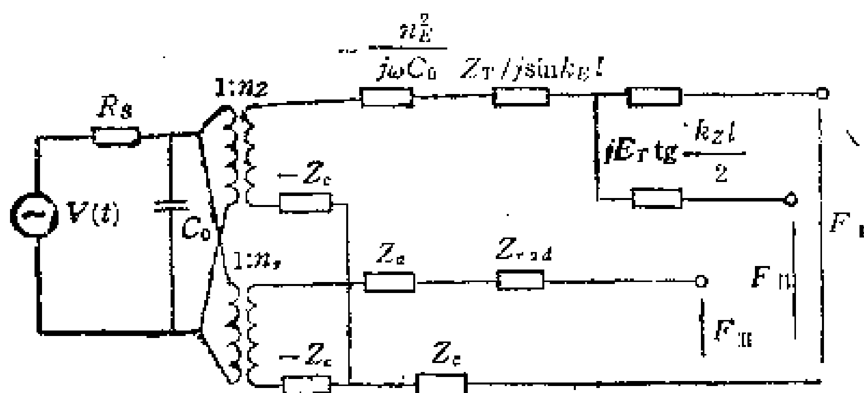


图4.2.20 两维等效电路

其中

$$
\begin{cases}
n_z = \dfrac{\pi R^2}{l}(\varepsilon_{33}^X c_{33}^D)^{1/2} k_t, \quad k_2 = \dfrac{\omega}{v_z}, \quad v_z = \left(\dfrac{c_{33}^D}{l}\right)^{1/2}, \\
n_r = 2\pi R\sqrt{\dfrac{\varepsilon_{33}^X (c_{11}^D + c_{12}^D)}{2}}\, k_P^X, \quad k_P^X = e_{31}\sqrt{\dfrac{2}{\varepsilon_{33}^x (c_{11}^D + c_{12}^D)}},
\end{cases}
\qquad (4.2.13)
$$

$$\begin{cases} Z_o = 2\pi R c_{13}^{E}/j\omega, Z_{rad} = Z_{Brad} + Z_{Frad} = \pi R^2 \rho_B V_{Bs} + \pi R^2 \rho_F v_{FS}, \\ Z_a = -jZ_B \dfrac{J_0(krR)}{J_1(k_r R)} - \dfrac{2\pi l}{j\omega}(c_{11}^{E} - c_{12}^{E}), \\ R_r = \omega / v_r, v_r = (c_{11}^{E}/\rho)^{1/2}. \end{cases}$$

式中R为直径，d为厚度，ρ_B、V_{BS}为背衬密度和横波声速，ρ_F、V_{FS}为负载密度和横波声速.

4.2.2 应电压和首次波幅度比

利用上述暂态特性分析的理论，可以对检测超声换能器进行多方面的分析和讨论. 这里不可能作全面的介绍，仅仅作为例子来讨论一下与检测盲区有关的应电压和与测量精度有关的首次波幅度比的问题.

应电压： 压电换能器用于脉冲反射法的超声检测时，通常是激励源和接收器与换能器并联工作，如图4.2.21所示.

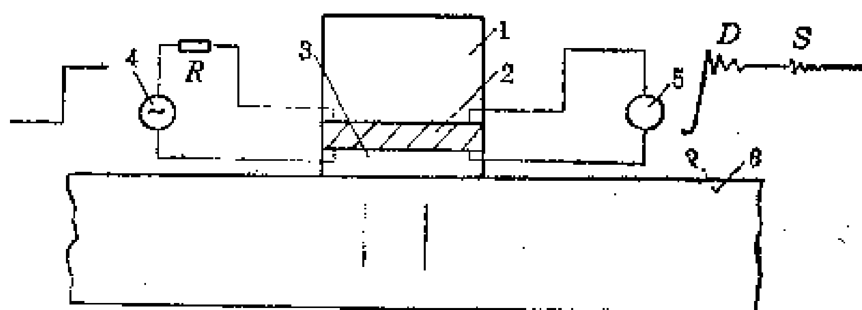


图4.2.21 应电压示意图

这时接收器接收显示的是换能器的端电压，这个端电压不仅包含试件反射回来的有用的回波信号，如图中的S波，也包含了换能器受电激励源作用而直接产生的一般起干扰作用的电信号，如图中的D波，我们称它为应电压.

应电压是由两部分贡献构成的. 其一，压电片作为一个电容，电脉冲源对它充电，产生充电电压. 其二，压电片受激振动而产生

形变的同时，由于压电效应产生电信号，这个信号是与压电片振动相对应的振荡信号. 经过检测仪器中的保护电路等，可以消除应电压的直流部分的影响，但由于应电压交变部分频率与声波频率大体相同，这个交变部分的信号是难以消除的. 检测时，应电压形成了接收信号的始脉冲，可以掩盖近距离内反射的回波，形成探测盲区. 图4.2.22所示为阶跃脉冲激励下测得的PT压电片端电压.

利用梅森等效电路，可以求出换能器端电压即应电压V对电源电压E的转移函数为

$$\frac{V(\omega)}{F[E(t)]}=\frac{1}{1+j\omega c_0R+R/Z_e}=\frac{1}{1+j\omega c_0R}-\frac{R}{(1+j\omega c_0R)(1+j\omega c_0R+R/Z_e)Z_e},\tag{4.2.14}$$

式中 Ze 为动生阻抗. 上式第一项代表了电源电压对箝制电容充电的直流部分，第二项代表了压电片受激振动声电再生的交变部分. 利用上式. 对直径为20mm、厚度为0.86mm的PT压电片在200V阶跃电压激励下，分别计算了空气背衬、水、钛和钢负载的应电压，并与实验作了比较，如图 4.2.23 所示.

采用上述方法，对应电压的大量计算结果表明：轻负载或轻背衬时，应电压振荡部分的幅度大，重负载或重背衬时，应电压振

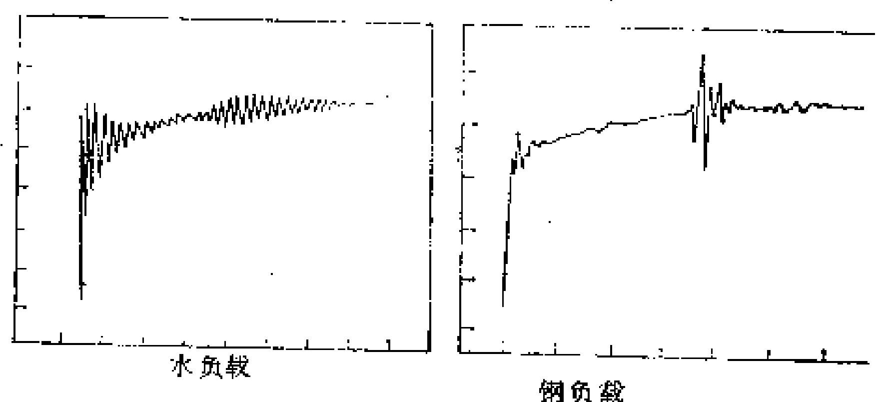


图4.2.22 应电压和回波波形

荡部分的幅度小;压电片的机械Q在不同的取值范围内,对应电压的影响不同,当 $Q<100$,降低Q值会减小应电压的振荡部分幅度,当 $Q>100$,Q 的变化对应电压影响不大;在轻负载条件下,保护膜使应电压的振荡部分幅度增大,保护膜越厚增大的越多.在重负载

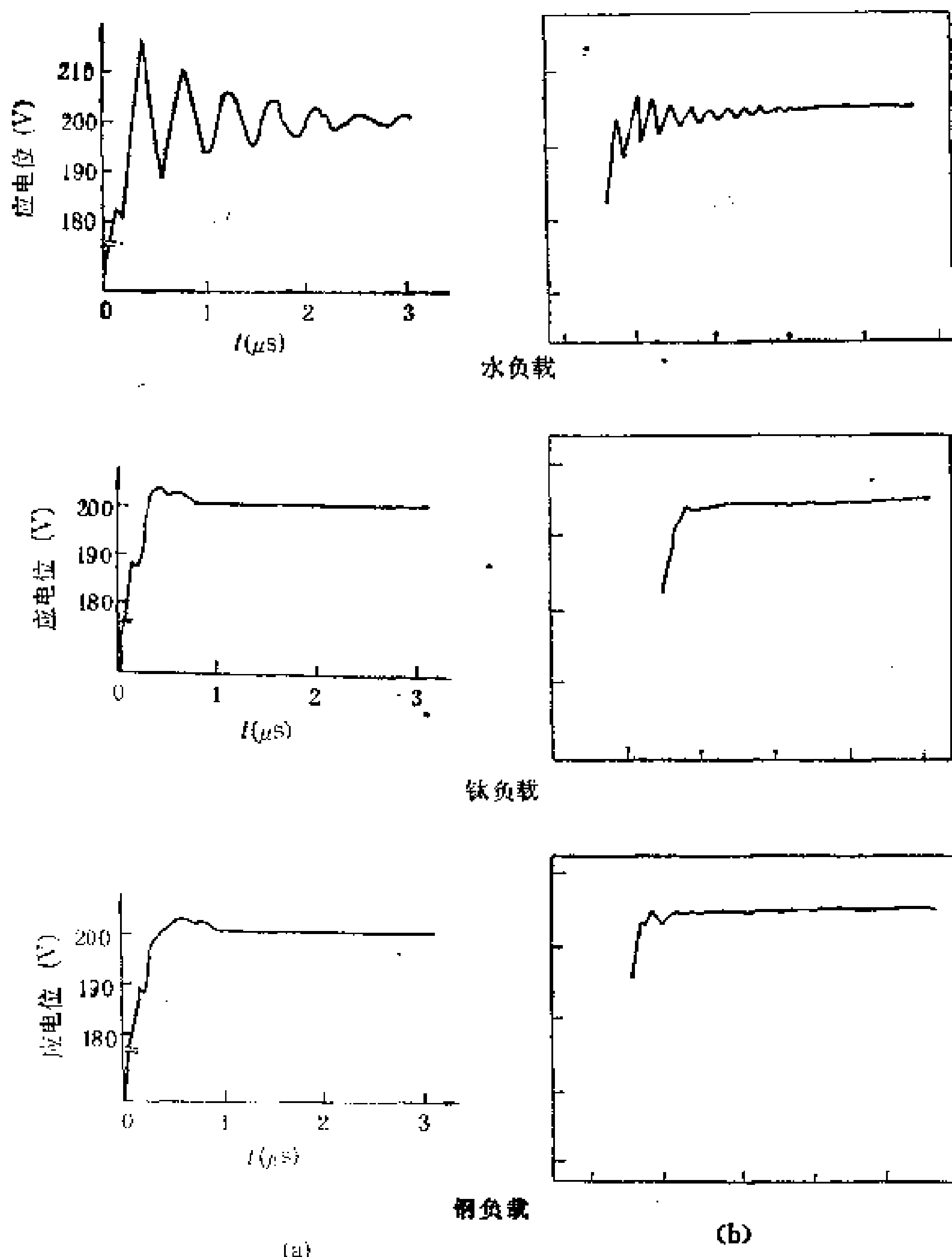
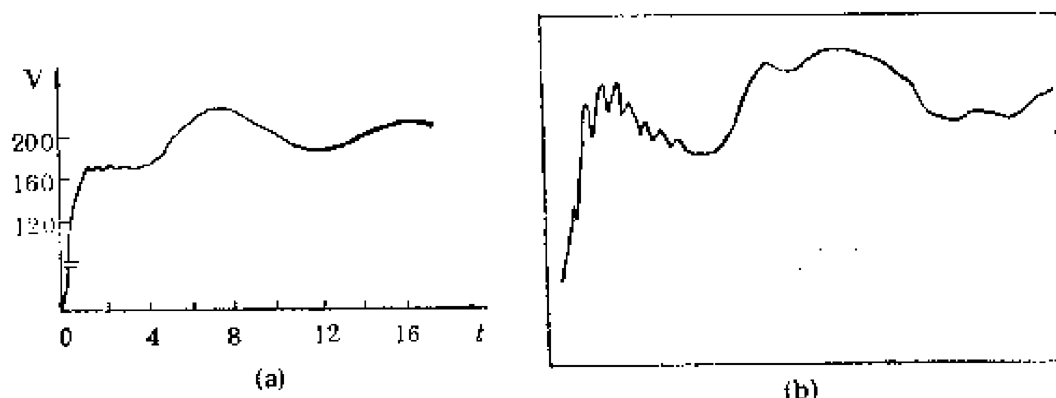


图4.2.23 空气背衬不同负载下的应电压理论和实验波形

(a)理论结果; (b)实验结果

下，保护膜对应电压影响不大.

PT压电片的径向机电耦合系数K_p非常小，我们用一维的梅森等效电路作理论分析取得了与实验符合很好的结果，但对大K_p的PZT-5压电片作分析时遇到了困难. 我们采用二维的等效电路重新作了应电压的分析，取得了理论与实验相符合的结果，如图4.2.24所示.



(a)　　　　(b)

图4.2.24　PZT压电圆片应电压理论和实验波形

(a)理论结果；　(b)实验结果

首次波幅度比　利用超声波在介质中传播时间的测量，可以得到材料工件和工程的某些参量，例如，弹性模量、工件厚度、流体流速、岩体受应力等，这些我们将在以后介绍. 但是，在这类测量中与换能器有关的一个重要问题是，换能器接收输出的电信号的第一波（首波）的幅度大小与下一个波（次波）的幅度大小之比（简称首次波幅度比）是影响测试精度的一个重要因素. 为了防止测量时漏测前一两个波，从而错估传播时间，一般希望这个幅度比偏大（最好大于1）. 利用前面有关换能器暂态特性理论，分析结果表明，改变换能器的背衬可以起到调节首次波幅度比的作用. 换能器在水负载中，接收一个正弦指数声脉冲后所输出的电脉冲的首次波幅度比与背衬的关系曲线如图4.2.25所示. 换能器在水负载中作又发又收，输出电脉冲的首次波幅度比与背衬的关系曲线如图4.2.26所示. 从这两个图可见，轻负载时，背衬越重首次波幅度比越大，当背衬重到一定时首次波幅度比可以由小于1而增大

到大于1．值得指出的是，对于发射探头，提高背衬的声阻抗，同样可以提高辐射声波的首次波幅度比．除此之外，电源电压波形和内阻也同样会影响发射声脉冲的首次波幅度比，不过要想获取最后测量电信号有大于1的首次波幅度比，测量声脉冲信号一定要首次波幅度比大于1，这一点对发射换能器来讲是容易满足的．

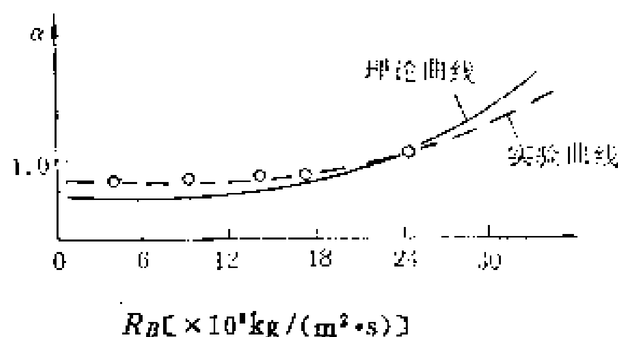


图4.2.25 正弦指数衰减声脉冲入射时，接收电信号首次波幅度比与换能器背衬声阻率的关系曲线．图中实线为理论曲线；虚线为实验曲线．水负载 $R_W=33\times10^4kg/(m^2\cdot s)$

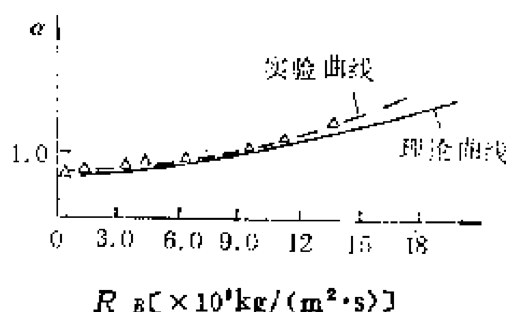


图4.2.26 电信号的首次波幅度比与换能器背衬声阻率的关系曲线．加到换能器的电压是阶跃电压，负载介质为水，$R_W=33\times10^4kg/(m^2\cdot s)$

4.2.3 换能器辐射声场特性的讨论

前面我们讨论了换能器的时间响应特性，下面我们来简略地讨论一下换能器辐射的空间响应特性，这是检测超声换能器研究中另一个比较重要的问题．这里的讨论同样只限于厚度模圆形平面换能器的辐射声场特性．

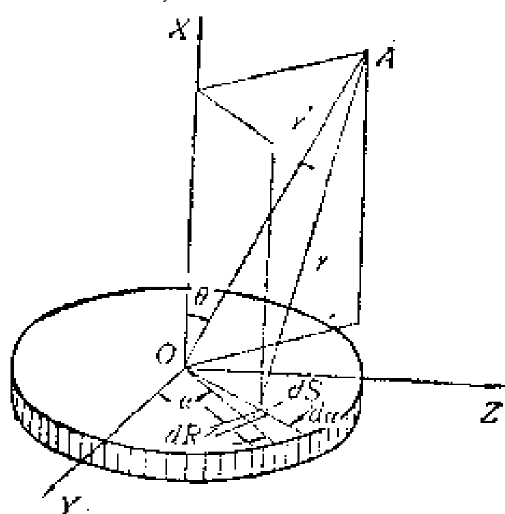


图4.2.27 活塞辐射坐标图

置于液体表面的一个厚度模圆形平面换能器的辐射，可以看作是一个带有障板的圆形活塞辐射．辐射面上的各点作等振幅等相位垂直表面振动，

只向半空间辐射，坐标选取如图 4.2.27 所示. 辐射面上面积元 ds 在声场 A 点所产生的声压可看作是一个点源辐射的球面波声压，有

$$dp = \frac{j\omega\rho U_0}{2\pi r} e^{j(\omega t - kr)}, \tag{4.2.15}$$

式中 ρ 为介质密度，U_0 为辐射面的速度势，面积 $ds = RdRd\alpha$. 整个辐射面在 A 点所产生的声压 p 是 R 由 0 到 a、α 由 0 到 2π 的辐射面上所有面积元所产生声压的叠加，则有

$$p = \int_0^a \int_0^{2\pi} \frac{j\omega\rho U_0}{2\pi r} e^{j(\omega t - kr)} RdRd\alpha. \tag{4.2.16}$$

当 A 点距离辐射面足够远时，可以取近似 $\frac{1}{r} \approx \frac{1}{r'}$，$r = r' + R\sin\theta\cos\alpha$，由上式不难求出

$$p = -\frac{j\omega\rho U_0}{2r'} a^2 e^{j(\omega t - kr')} \left[\frac{2J_1(ka\sin\theta)}{ka\sin\theta} \right], \tag{4.2.17}$$

式中 J_1 为 1 阶贝塞尔函数. 由上式可以看出，声场中的声压不但随距离 r'、时间 t 而变化，同时还随方向 θ 而变. 当 $\theta = 0°$ 时，声场的声压为最大，其振幅为 $p_{max}(0) = -\frac{j\omega\rho U_0 a^2}{2r'}$. 定义声场中指向性系数 G 为 θ 方向的声压振幅 $p_{max}(\theta)$ 与 θ 为 $0°$ 时的声压振幅之比，则有

$$G = \frac{p_{max}(\theta)}{p_{max}(0°)} = \frac{2J_1(ka\sin\theta)}{ka\sin\theta}. \tag{4.2.18}$$

不同的 $ka = \frac{2\pi a}{\lambda}$ 有不同的指向性，不同的 $\frac{a}{\lambda}$ 值时活塞辐射的指向性图案见图 4.2.29.

由式(4.2.16)不难求出对应活塞中心轴线上声场的声压 p 为

$$p = 2\rho V U_0 \sin\frac{k}{2}\left(\sqrt{a^2 + z^2} - z\right) e^{j[\omega t + \frac{\pi}{2} - \frac{k}{2}(\sqrt{a^2 + z^2} + z)]} \tag{4.2.19}$$

$$|p| = 2\rho V U_0\left|\sin\frac{k}{2}\left(\sqrt{a^2+z^2}-z\right)\right|, \qquad (4.2.20)$$

式中V为介质声速，$\rho V U_0 = p_0$ 表示辐射面表面的声压．由上式给出活塞中心轴线上声场声压随距离的变化曲线，如图4.2.28所示．

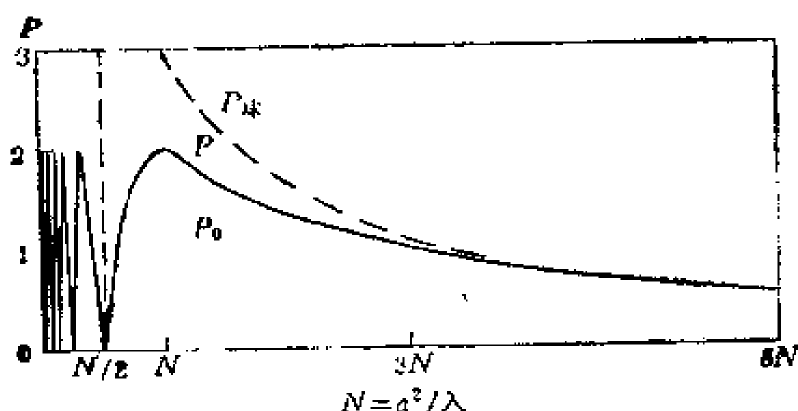


图4.2.28　圆盘源轴线上的声压

当 $z<a^2/\lambda$ 时，轴线上的声压随距离 z 的变化是振幅不变振荡形的，有许多极大值和极小值，通常称为近场．当$z=a^2/\lambda$ 时，出现最后一个极大值，a^2/λ 通常称为近场距离．当 $z>a^2/\lambda$ 时，声压随距离单调衰减，当$z\geqslant 6a^2/\lambda$ 时，声压的衰减与点源辐射球面波衰减相当．前面讨论的指向性是远场的特性．活塞声源在近场轴线处声压有极值出现，在远场有一定的指向性，在物理上，这是由于活塞声源上各个点分别在近场轴线上和远场空间上干涉叠加的结果．近场轴线声压极值数目与远场指向性一样与$\frac{a}{\lambda}$大小有关，极小值个数为小于$\frac{a}{\lambda}$的正整数．

厚度模圆形平面换能器置于固体介质表面向固体介质辐射，同样可以看作是一个带有障板的活塞辐射，不过与液体介质相比，辐射声场特性要变得复杂得多．在固体介质中不但有纵波，还有横波和表面波．对于纵波，轴线上声压在近场同样有极值出现，在远场有指向性，与液体中情形相当．所以在超声检测固体材料中，工

程技术人员常常利用上述适用于液体的结果,用来分析讨论探头的辐射纵波声场特性.对于辐射的横波声场特性,在远场同样具有指向性,但是在轴线上都为零,不同的 a/λ 的辐射指向性如图 4.2.29所示.

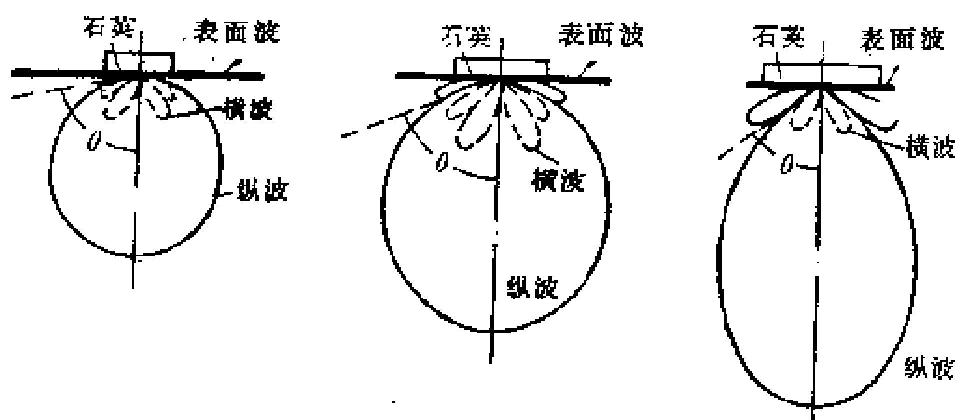


图4.2.29 固体负载辐射指向性图

上面我们讨论了换能器稳态辐射声场特性,但由于超声检测多是在暂态条件下工作的,换能器暂态辐射声场特性,是从事超声检测的人们更为关心的问题. 我们最新的研究结果表明,一个圆形纵波换能器向固体介质辐射的暂态声场,是由直达波、边缘纵波、边缘横波、头波及表面波等部分组成,如图 4.2.30 所示.

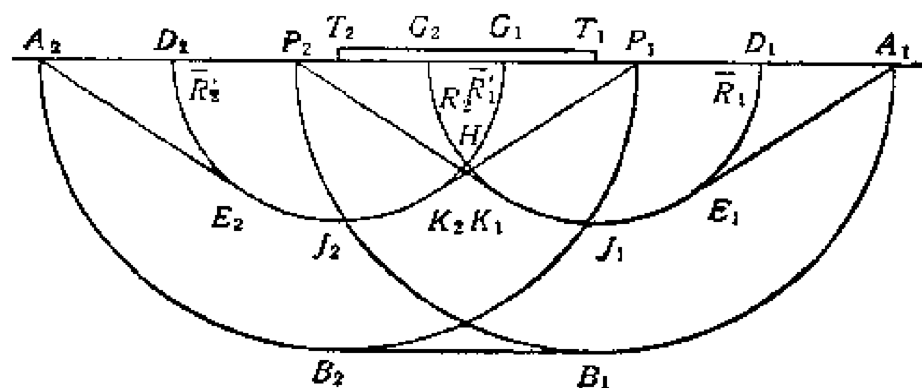


图4.2.30 暂态圆源激励的声场

图中$\overline{B_1B_2}$为直达波,$A_1B_1P_2$、$A_2B_2P_1$为边缘纵波,$D_1J_1G_2$、$D_2J_2G_1$为边缘横波,A_1E_1、A_2E_2、P_1K_2、P_2K_1为头波,$\bar{R}_1$、$\bar{R}_2$、$\bar{R}_1'$、$\bar{R}_2'$为表面波,这些都只表示波前,用光弹法测得的声场如图4.2.31所示. 虽然,

暂态声场是由许多波组成，但是这些波的强弱是不一样的．这些波在超声检测中带来的影响尚在讨论之中．不过有一点似乎可以肯定，那就是由于边缘波的存在，大大降低了检测时的纵向分辨率．对于窄脉冲有时会带来假信号，即一个缺陷反射回来几个相靠近的脉冲信号，因而有人开始在探索研制消除或减弱边缘波的换能器．

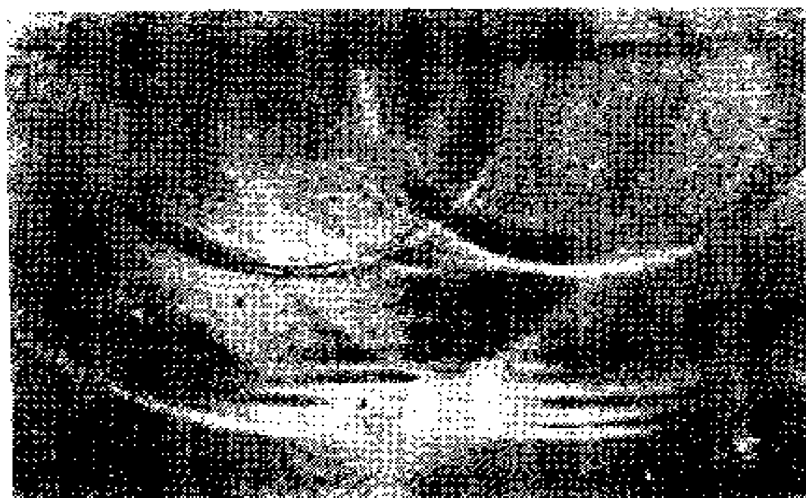


图4.2.31　圆片换能器辐射声场的光弹实验

4.2.4　换能器的特性测量

检测超声换能器的性能测量，主要包括发射和接收的暂态脉响（或频响）特性、负载中辐射暂态声场特性和等效电阻抗特性等三个方面．近年来，我们提出一种用厚压电片作表面换能测量的方法，测量了换能器在固体负载中辐射脉冲响应．测试的方框图如图 4.2.32 所示．用此法测得的结果与光弹法的结果作了比较，如图 4.2.33 所示，此外，还可以作与脉响相关的频谱测量．

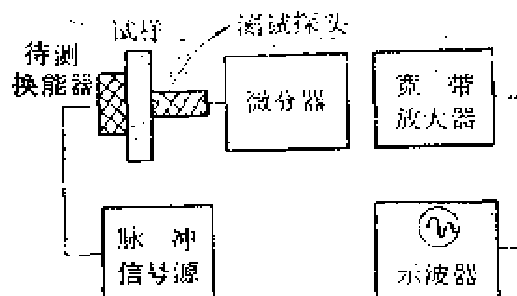


图4.2.32　厚片法测脉响方框图

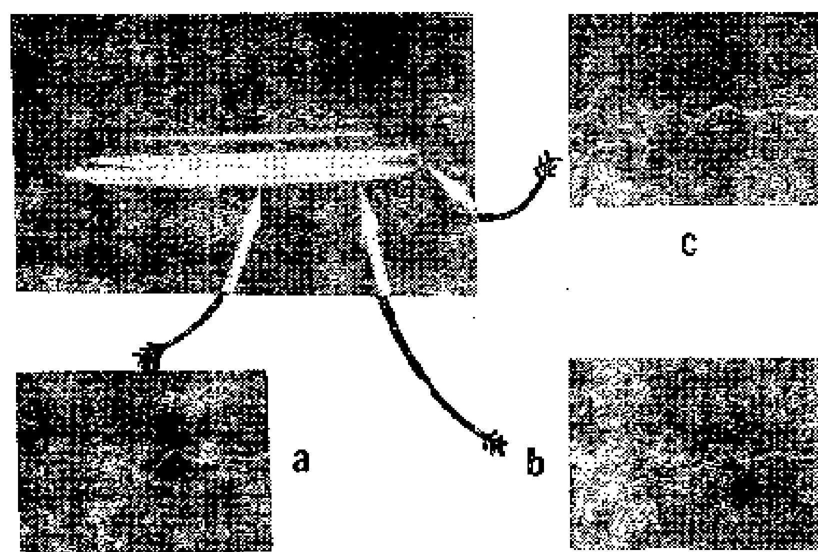


图4.2.33 电测厚片法与光弹法的比较

换能器辐射声场的测量，主要有水中光衍射法(即施利伦法)，和固体中光弹法两种．此外，还有用微型探头、反射小球、和组合半圆试块等一些方法．这里就不作介绍了．

换能器的等效电阻抗特性的测量，可以把换能器作为一个电学的器件，测出其等效电阻抗．不过，压电片的箝制电容对其电阻抗特性起到较大的影响．

§4.3 超声无损探伤

4.3.1 引言

超声无损探伤是以超声作为采集信息的手段，在不损坏被检对象的情况下，探测其内部的缺陷．检测超声的二类三种方法都可用来进行无损探伤．

近年来，随着工业发展的需要，超声无损探伤形成了三个主要研究发展方向：可探性研究、准确性研究和高速性研究．

可探性研究，是指对于一些采用常规方法和现有技术还不能进行探伤的严重不均匀材料和异形结构特殊部件等新的探伤方法和技术的研究．比如粗晶材料的探伤，由于晶粒散射带来了相当

大的结构噪声和严重的声衰减，为了减少散射结构噪声，可用聚焦探头、TR 双斜探头、窄脉冲探头等方法减少散射的时空区域，或用信号处理技术(比如空间平均，频率平均等)抑制噪声.

准确性研究，是指对于现有常规的探伤方法和技术可以进行探伤的材料和工件，不但要求探出有无缺陷，还要求能给出缺陷大小、形状、位置和性质而开展的测伤技术的研究. 这实际上是探伤技术向测伤技术由定性向定量的一个重要发展. 在生产实践中，不是所有存在缺陷的材料和部件都是绝对不能使用的，如果在确切地了解了缺陷的大小、形状、位置和性质之后，根据使用的要求，结合断裂力学的计算，是可以给出一些有伤材料能否使用及如何使用的判断，从中可以获取一定的经济效益. 为了解决测伤问题，近年来发展了各种聚焦扫描成像技术、窄脉冲和频谱检测技术、各种缺陷的散射和逆散射理论及利用计算机进行脉冲应答自适应技术等.

高速性研究，是指由手操作向机械化、自动化的发展研究. 在现代化生产中，为了适应生产自动化和现代化的需要，要求有效地提高生产检测速度，最好能把自动检测纳入整个生产线上，若能同时起到一定的质量控制作用，那就更为理想. 在自动化检测的研究中，除了在静态探测已解决了的技术方法之外，还特别需要解决如何控制检测条件稳定一致的机械传动装置的设计与制造问题，以及多通道检测信号的采集、处理与探伤结果的分析、判断和控制等问题. 为了提高超声自动检测系统的稳定可靠性、智能水平和控制能力，微型计算机在自动化检测中将起到十分重要的作用.

4.3.2 主动式超声波探伤

超声波之所以可以实现其主动式探伤的目的，主要是由于：其一，超声波与其它波动一样，具有一般波动的物理共性. 比如穿透性、不均匀界面的反射与透射(或斜入射时的折射)、迭加和干涉、吸收和衰减以及一定的辐射指向性等等. 其二，超声波是一种弹性波，它具有不同于其它波动的个性，比如不受透明与不透明、导

电与不导电等限制，对所有介质，超声波都是"透明"的．由于它是一种机械弹性波，所以其传播特性与材料的弹性机械性能有关．正因为超声波具有上述两个特点，用于材料的检测上，它更加优越于其它波动．这就是超声波用于主动式无损检测的最基本的物理基础．

超声波最基本的一些声学特性，在主动式超声检测中都有不同程度的具体应用．例如：超声波的穿透性，超声波可在一般固体介质中，以 2000 m/s ——6000 m/s的速度传播很远，几兆赫超声波可在一般材料中传播几米以上，几千赫的超声波可在岩层传播几十米以上．一般材料探伤中，采用一兆至百兆赫频率，波长一般为几到零点零几毫米，因而它可以对材料较小的缺陷进行探测．利用超声波在介质界面的反射，可进行反射探伤和测厚．利用超声波在介质界面的透射，可以实现水浸法探伤和加延迟块，隔热块等探伤．利用超声波通过薄层的透射，可以在探头上加保护膜，探伤中加耦合剂以及对薄壳体蕊体介质探伤和管道内的液体检测．利用斜入射的反射，可以对板管进行二次三次回波法探伤以及 TR 双斜探头探伤．利用斜入射的折射，可以进行斜探头的波型转换，实现其横波、表面波、爬波、板波探伤以及作成声透镜进行聚焦探伤等．利用超声波在介质内的传播散射衰减，可以直接测缺陷散射信号探伤，以及通过测穿透散射衰减进行穿透法探伤与晶粒度或球化率的测量等．超声波具有干涉特性，使换能器辐射声场具有一定的指向性，还可用以进行相控声束扫描探伤等．利用超声波的衍射特性，可以进行拐角阴影区的探伤．此外，还可以利用超声波在介质中的吸收衰减的测量，进行材质检测和评价，以及利用多普勒效应，进行动目标的检测等等．

以上这些仅仅是声学基础常识在超声检测中运用的例子，实际检测中遇到的声学问题要复杂得多．比如实际检测中常常碰到的问题是脉冲波的传播而不是连续波的传播；有时候是声波在有界介质中的传播而不是在无限大介质中的传播；有时需要讨论的是缺陷的散射特性而不仅仅是缺陷的反射；有时是介质非常不均

匀和严重各向异性，而不是均匀各向同性的介质等等．值得指出的是，这些深入一点的问题，现有的理论有些早已成熟，只是如何在检测中要加以具体深化和运用，有些还不够成熟，尚需作进一步探讨，目前还不能直接用到实际问题的分析上．换言之，目前不是所有检测中所得的结果和现象，都能给出严格精确的理论分析，检测超声的理论发展与超声检测技术的实际使用之间还存在一定的距离．

（一）超声波与障碍物的相互作用

试验物体中的缺陷，对声束来讲是个障碍．主动式传播检测法，就是通过超声波与这些障碍物的相互作用来获取这些缺陷的信息，从而达到缺陷探测的目的．下面我们在前面有关传播特性介绍的基础上，再作些补充讨论．这些讨论包括平面波在液态平面层上的反射和透射及几种简单形状障碍物的反射．有关障碍物的影响，我们仅给出液体中刚性体的反射结果，但不作详细的推导．虽然这些结果对于固体中缺陷检测并不适用，从严格的散射理论出发，这些结果也是非常近似的，但在工程技术上还是有相当的参考意义．

平面波在液态平面层上的反射和透射：选取如图 4.3.1 所示的坐标．

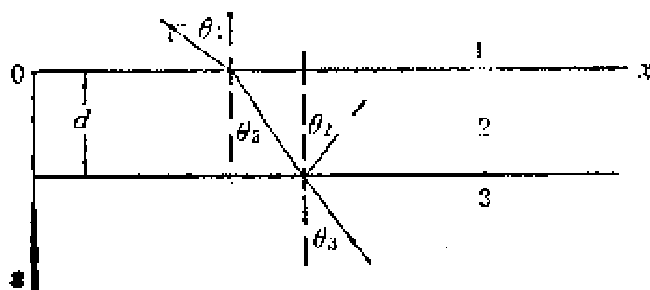


图4.3.1 液态平面薄层反射与透射

可以证明平面层表面法向声阻抗率为 $z_i=\dfrac{\rho_i c_i}{\cos\theta_i}$．省略时间因子，介质层 2 中声压为

$$P_2=(Ae^{jk_2z\cos\theta_2}+Be^{-jk_2z\cos\theta_2})e^{-jk_2x\sin\theta_2}\,. \tag{4.3.1}$$

质点速度为

$$v_{2z}=\frac{1}{z_2}(Ae^{jk_2z\cos\theta_2}-Be^{-jk_2z\cos\theta_2})e^{-jk_2x\sin\theta_2}. \quad (4.3.2)$$

在 $z=0$，介质 1 与介质 2 界面法向阻抗连续，可以求得

$$z_2\frac{A+B}{A-B}=z_1, \qquad 即\frac{B}{A}=\frac{z_1-z_2}{z_2+z_1} \quad (4.3.3)$$

在 $z=d$，介质 2 的法向阻抗(即输入阻抗)为

$$z_{输入}=\left(\frac{p_2}{v_{2z}}\right)_{z=d}=\frac{Ae^{jk_2d\cos\theta_2}+Be^{-jk_2d\cos\theta_2}}{Ae^{jk_2d\cos\theta_2}-Be^{-jk_2d\cos\theta_2}}z_2,$$

将式(4.3.3)代入上式，可得

$$z_{输入}=\frac{z_1+jz_2\mathrm{tg}(k_2d\cos\theta_2)}{z_2+jz_1\mathrm{tg}(k_2d\cos\theta_2)}. \quad (4.3.4)$$

在介质 3 有

$$P_3=[Ce^{jk_3(z-d)\cos\theta_3}+De^{-jk_3(z-d)\cos\theta_3}]e^{-jk_3x\sin\theta_3},$$

同上，考虑界面上法向阻抗连续，有

$$\left(\frac{P_3}{V_{3z}}\right)_{z=d}=z_3\frac{C+D}{C-D}z_{输入}, \quad (4.3.5)$$

层的反射系数

$$r=\frac{D}{C}=\frac{z_{输入}-z_3}{z_{输入}+z_3}. \quad (4.3.6)$$

将式(4.3.4)代入，可得

$$r=\frac{(z_1+z_2)(z_2-z_3)e^{jk_2d\cos\theta_2}+(z_1-z_2)(z_2-z_3)e^{-jk_2d\cos\theta_2}}{(z_1+z_2)(z_2+z_3)e^{jk_2d\cos\theta_2}+(z_1-z_2)(z_2-z_3)e^{-jk_2d\cos\theta_2}}. \quad (4.3.7)$$

层的透射系数

$$T=\frac{4z_1z_2}{(z_1+z_2)(z_3+z_2)e^{jk_2d\cos\theta_2}+(z_1-z_2)(z_2-z_3)e^{-jk_2d\cos\theta_2}}. \quad (4.3.8)$$

如果用 $r_{1,2}=\frac{z_1-z_2}{z_2+z_1}$，$r_{2,3}=\frac{z_2-z_3}{z_3+z_2}$ 分别代表在介质1、2界面和介质

2、3界面的反射系数，则式(4.3.7)和式(4.3.8)可以简化为

$$
\begin{cases}
r = \dfrac{r_{2,3} + r_{1,2}e^{-j2k_2d\cos\theta_2}}{1 + r_{2,3}\cdot r_{1,2}e^{-j2k_2d\cos\theta_2}}, \\[2ex]
T = \dfrac{4z_1z_2}{(z_1+z_2)(z_2+z_3)} \dfrac{1}{e^{jk_2d\cos\theta_2} + r_{1,2}\cdot r_{2,3}e^{-jk_2d\cos\theta_2}}.
\end{cases} \tag{4.3.9}
$$

如果介质1、3是相同的，则上式为

$$
\begin{cases}
r = \dfrac{z_2^2 - z_1^2}{z_1^2 + z_2^2 - j^2z_1z_2\mathrm{ctg}(k_2d\cos\theta_2)}, \\[2ex]
T = \dfrac{2z_1z_2}{j(z_1^2+z_2^2)\sin(k_2d\cos\theta_2) + 2z_1z_2\cos(k_2d\cos\theta_2)}.
\end{cases} \tag{4.3.10}
$$

如果是正入射，$\theta_2 = 0$，上式(4.3.9)简化为

$$
\begin{cases}
r = \dfrac{r_{2,3} + r_{1,2}e^{-j2k_2d}}{1 + r_{1,2}\cdot r_{2,3}e^{-j2k_2d}}, \\[2ex]
T = \dfrac{4z_1z_2}{(z_1+z_2)(z_2+z_3)} \dfrac{1}{e^{jk_2d} + r_{1,2}\cdot r_{2,3}e^{-jk_2d}}
\end{cases} \tag{4.3.11}
$$

当层厚为半波长整数倍时，$d = m\dfrac{\lambda}{2}$，$2k_2d = 2\pi m\ (m = 1, 2, 3\cdots)$．由式(4.3.11)，可得 $r = \dfrac{r_{2,3} + r_{1,2}}{1 + r_{2,3}\cdot r_{1,2}} = \dfrac{z_1 - z_3}{z_1 + z_3} = r_{1,3}$ 为全透射层．当层厚为四分之一波长整数倍时，$d = m\dfrac{\lambda}{4}$，由式(4.3.11)可得 $z_2 = \sqrt{z_1z_3}$ 时，$r = 0$，即发生全透射．

流体中刚性圆盘的反射： 为了检测技术上的方便，通常定义障碍物反射至声源的声压与同样距离上无限大界面完全反射至声源的声压之比为障碍物的反射系数 r，即

$$
r = \left|\frac{p}{p_\infty}\right|. \tag{4.3.12}
$$

在实际检测中遇到的大多是相当于活塞声源在远场的球面波．下面主要讨论球面波的反射情况．

坐标选取如图4.3.2所示，如果球面波正入射于半径为 R 的圆

盘上，则圆盘平面上一点 y 的速度势 U_i 为

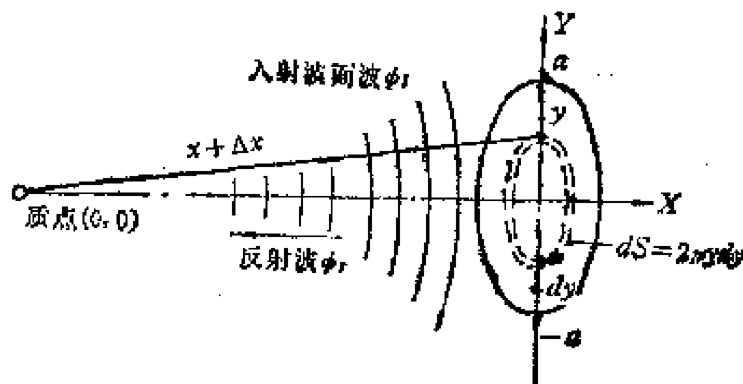


图4.3.2　点源球面波在圆盘上的反射

$$U_i=\frac{A}{4\pi(x+\Delta x)}e^{jk(x+\Delta x)}. \tag{4.3.13}$$

y 点入射波质点速度 v_i 为

$$v_i=\frac{\partial u_i}{\partial x}=\frac{-A[jk(x+\Delta x)-1]}{4\pi(x+\Delta x)}e^{jk(x+\Delta x)}$$

$$\underset{kx\gg1}{\approx}\frac{-jkA}{4\pi(x+\Delta x)}e^{jk(x+\Delta x)}. \tag{4.3.14}$$

设 y 点反射波质点速度为 v_r，由于圆盘是刚体，$v_i+v_r=0$，于原点反射波速度势 U_r 按瑞利公式有

$$U_r=\frac{1}{2\pi}\iint\frac{v_r}{x+\Delta x}e^{jk(x+\Delta x)}dS.$$

将 $U_r=-U_i$ 代入上式并考虑 $\Delta x=\sqrt{x^2+y^2}-x\approx y^2/2x$ 及 $ds=2dxdy$，则可得

$$U_r\approx\frac{jAe^{jk\left(2x+\frac{R^2}{2x}\right)}}{4\pi x}\sin\frac{kR^2}{2x}. \tag{4.3.15}$$

量值为 $\frac{A}{4\pi x}$ 的球面波，完全反射返回原点处的速度势为

$$U_{2i}=\frac{A}{4\pi(2x)}e^{jk2x}. \tag{4.3.16}$$

由反射系数定义可得

$$r_1=\left|\frac{p}{R_\infty}\right|=\left|\frac{U_r}{U_{2i}}\right|=2\sin\frac{\pi R^2}{\lambda x},\qquad(4.3.17)$$

上式要求 $2R\geqslant0.7\lambda$. 当 $0.7\lambda\leqslant2R\leqslant\sqrt{\lambda x}$ 时，还可以进一步简化为

$$r_1=\frac{2\pi R^2}{\lambda x}=\frac{2S}{\lambda x},\qquad(4.3.18)$$

表明小圆盘的反射系数与其面积 S 成正比.

液体中矩形刚体的反射：在上述讨论的情况下，如果障碍物不是刚性圆盘，而是一个 $2a\times2b$ 的矩形平面刚体，则当 $2a\geqslant0.7\lambda$，$2b\geqslant0.7\lambda$ 时，反射系数 r_2 为

$$r_2=2\sqrt{[s^2(a')+c^2(a')][s^2(b')+c^2(b')]},\qquad(4.3.19)$$

式中

$$a'=\frac{2a}{\sqrt{\lambda x}},\qquad b'=\frac{2b}{\sqrt{\lambda x}},\qquad(4.3.20)$$

$s(a')$，$c(a')$，$s(b')$，$c(b')$ 为菲涅尔积分. 当 $0.7\lambda\leqslant2a\leqslant0.8\sqrt{\lambda x}$，$2b\geqslant4\sqrt{\lambda x}$ 时，

$$r_2\approx2a\sqrt{\frac{2}{\lambda x}}.\qquad(4.3.21)$$

当 $0.7\lambda\leqslant2a\leqslant0.8\sqrt{\lambda x}$，$0.7\lambda\leqslant2b\leqslant0.8\sqrt{\lambda x}$ 时，

$$r_2\approx\frac{2s}{\lambda x}.$$

与小圆盘完全相同，小方形板的反射系数与其面积 S 成正比. 当 $2a\geqslant4\sqrt{\lambda x}$，$2b\geqslant4\sqrt{\lambda x}$ 时，$r_2\simeq1$，相当于无限大平面反射.

液体中球形刚体的反射：如果液体中障碍物是一个半径为 R 的刚性球体，则反射系数为

$$r_3=\frac{2R}{x}|z|,\qquad(4.3.22)$$

式中 z 为斯坦泽尔反射系数. 当 $kR\geqslant0.7$，即障碍物比较大时，

$$r_3 \simeq \frac{R}{x}. \tag{4.3.23}$$

当 $kR < 0.7$，即障碍物比较小时，

$$r_3 \approx 66\frac{R^3}{\lambda^2 x} \tag{4.3.24}$$

液体中圆柱形刚体的反射：如果液体中障碍物是一个半径为 a、长度为 $2b$ 的圆柱形刚体，则当 $2a \geqslant 0.7\lambda$，$2b \geqslant 0.7\lambda$ 时，反射系数为

$$r_4 \approx \sqrt{\frac{2a}{a+x}}\sqrt{s^2(b') + c^2(b')}, \tag{4.3.25}$$

式中 $s(b')$，$c(b')$ 为菲涅尔积分，$b' = \frac{2b}{\sqrt{\lambda x}}$. 当 $2a \geqslant 0.7\lambda$，$2b \geqslant 4\sqrt{\lambda x}$ 长柱时，

$$r_4 \approx \sqrt{\frac{a}{a+x}}. \tag{4.3.26}$$

当 $2a \geqslant 0.7\lambda$，$0.8\sqrt{\lambda x} \geqslant 2b \geqslant 0.7\lambda$ 短柱时，

$$r_4 \approx 2\sqrt{2}\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{(a+x)\lambda x}}. \tag{4.3.27}$$

当 $2a < 0.2\lambda$，$2b \geqslant \sqrt{4\lambda x}$ 细长柱时，

$$r_4 \approx \frac{42a^2}{\sqrt{\lambda^3 x}}, \tag{4.3.28}$$

这时反射系数与圆柱截面积成正比.

在结束本节之前，对一些工程技术书中提到的"AVG当量法"再作些说明. 对于上述几种障碍物反射的讨论，若声源是圆形活塞，在 $(x \gg a^2/\lambda)$ 远场反射时，式(4.3.12)中的 p_∞ 可以表示为

$$p_\infty = p_0\frac{\pi a^2}{2\lambda x}. \tag{4.3.29}$$

声源处接收到的反射声压 p 可以表示为

$$p = p_0\frac{\pi a^2}{2\lambda x}r. \tag{4.3.30}$$

对于圆盘，反射系数取 $r_1=\frac{2S}{\lambda x}$，则有

$$\frac{p}{p_0}=\frac{S_0S}{\lambda^2x^2}, \tag{4.3.31}$$

式中 $S_0=\pi a^2$ 为活塞声源辐射面积，$S=\pi R^2$ 为圆盘障碍物的面积．在检测技术中，有一种利用此公式确定缺陷尺寸的当量检测法．在已知的 S_0 和 λ 情况下，作出距离 x、反射回波幅度 p 和缺陷面 S 的关系曲线，然后根据缺陷反射回波幅度 p 和距离 x 来确定缺陷的面积 S．这种曲线通常称为A（相当于 x）V（相当于 p）G（相当于 S）曲线．我们说这种方法是不够严谨的，因为理论公式是从活塞声源在液体中连续波辐射，以及在液体中圆盘刚体上的正入射时反射所得到的，这与固体中脉冲辐射，固体中的缺陷反射和对缺陷可能是任意角度入射等情况相差很大．所以说，此法测出的缺陷大小只是相当于一个多大的圆面积反射的缺陷，而不是真实的缺陷实际尺寸，并且会有相当大的误差．尽管如此，此方法在实际检测中还是有相当的实际意义，被工程技术人员较为广泛地采用．

（二）常规超声波探伤方法简介

穿透法探伤： 穿透法是超声波应用于无损检测最早的方法，它是通过测定超声波通过被检物体后强度（或声压振幅）的变化来实现检测目的一种方法，其原理如图4.3.3所示．

实现穿透法探伤有连续波和脉冲波两种．实际检测中连续波用的更多些．为了排除在试件中可能产生驻波的影响，连续波采用调频波．在不可能产生驻波的试件探伤中，连续波也可采用调幅波，下面以药柱探伤实际应用为例稍许作些讨论．

固体推进剂药柱探伤中，比较成熟的一种方法中是采用如图4.3.4所示的穿透法探伤装置．图中 a、b、c 为顶轮，起到固定样品与探头相对位置的作用，探头T发射 160 KHz 的调幅连续波超声，探头R为接收探头．如果探头T发射超声强度为 W_1，探头R接收的超声强度为 W_2，则有

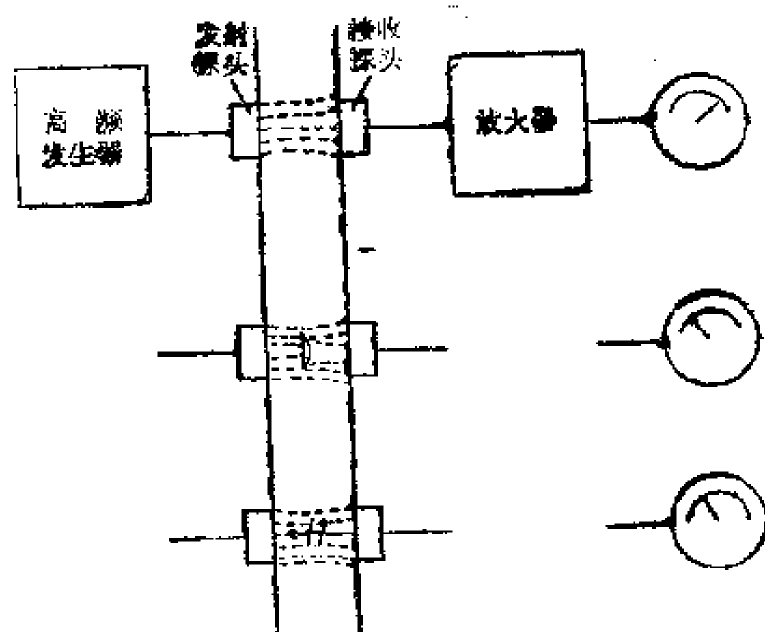


图4.3.3 穿透法原理

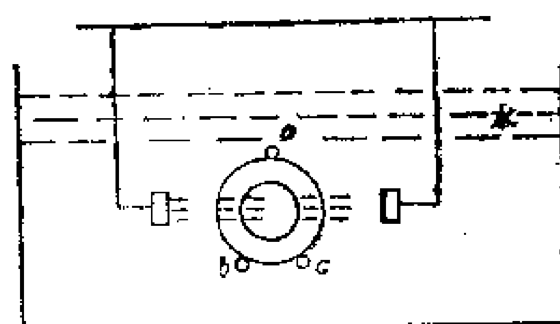


图4.3.4 药柱探伤装置

$$W_2=\{[((W_1-W_{水_1})T_1-W_{01})T_2-W_{水_2}]\times T_3-W_{02}\}T_4-W_{水_3}, \tag{4.3.32}$$

其中：$W_{水_1}$、$W_{水_2}$、$W_{水_3}$分别为在探头T与药柱之间水层、药柱中孔水层和药柱与探头R之间水层的衰减；T_1、T_2、T_3、T_4分别为靠近探头T一侧的水到药柱、药柱到中孔水层、中孔水层到药柱和药柱到靠近探头R一侧水的透射系数，这其中均包含经它们各自界面后声束扩散的影响，W_{01}、W_{02}分别为靠近探头T和R药柱壁内的衰减．如果靠近探头T一侧药柱壁内由缺陷引起的衰减为W'，则探头R接收的强度为

$$W_2'=\{[((W_1-W_{水_1})T_1-(W_{01}+W'))T_2-W_{水_2}]\times T_3-W_{02}\}T_4-W_{水_3} \tag{4.3.33}$$

与这时无伤有伤探测的强度差为

$$W_2 - W_2' = W' T_2 T_3 T_4. \quad (4.3.34)$$

采取本方法检测，是在固定发射条件下以接收强度的变化为判伤依据的．因而，$W_{水1}$、$W_{水2}$、$W_{水3}$、T_1、T_2、T_3、T_4、W_{01}、W_{02}等各个量的起伏变化都会导致探伤灵敏度下降．在实际探伤中，为了尽可能保证这些量的不变，就要保证探测条件的一致．为此在设备的设计与调试中，要求探头T和R对准药柱中心，保证整个声程路径不变，同时水质也应尽量纯净、无杂质和气泡．在保证探测条件一致的情况下，由于被探材料本身的不均匀性，会引起W_{01}、W_{02}的变化，因而本方法探测材料越均匀灵敏度则越高．此外，由于探测灵敏度不是决定于有无缺陷时强度差值的绝对值大小，而与有无缺陷强度的相对比值有关，因此，在实际工作中往往在探头T和R上加一个声束罩，这样用控制声束大小和发射强度W_1也可以起到调整灵敏度的作用．

由于本方法采用的是低频连续声波，因而具有较强的穿透能力，它特别适合于介质均匀衰减较大的材料．采取上述方法对药柱探伤，不但可以探出垂直声波传播方向的平面型或体积型缺陷（实际可探出ϕ1.0 mm孔伤），而且还可探出平行传播方向的裂纹（实际可探出小于0.1mm裂度的微裂纹），具有相当高的灵敏度．这里，探出小于波长的缺陷和裂纹，是根据散射引起在固定路径上强度的衰减这一原理．

在实际工作中，往往会遇到不允许进行双探头双面探测的情况，这时人们采用了如图4.3.5所示的方法．从原理上它与图4.3.4所示是一致的．

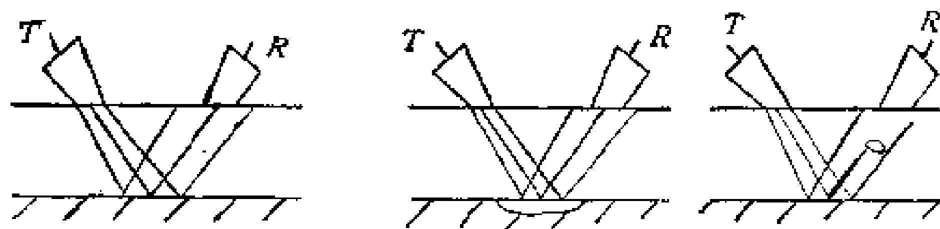


图4.3.5 反射式穿透法探伤示意图

采用如图4.2.5所示探伤方法，大多适用于带蒙皮或包覆层的样品检验，例如有包覆层的核元件和药柱等．此方法不但可以检测其蒙皮或包覆层与基体或蕊体的粘接与贴紧状态、有无缺陷等，还可以探测出蒙皮或包覆层内的缺陷．在这种情况下，不能用调幅连续波，而应选用调频连续波，便于消除蒙皮或包覆层内产生驻波的干扰影响．

穿透法探伤并不限于上述这些内容，根据检测对象和要求是可以多种多样的，但其原理是一致的，在这里就不再一一列举了．

脉冲反射法探伤： 脉冲超声波在介质内传播时，如遇有声阻抗率发生变化的各种缺陷，则在缺陷界面将产生反射．通过探测缺陷的回波来实现探伤的方法，称脉冲反射法探伤，其原理如图4.3.6所示．

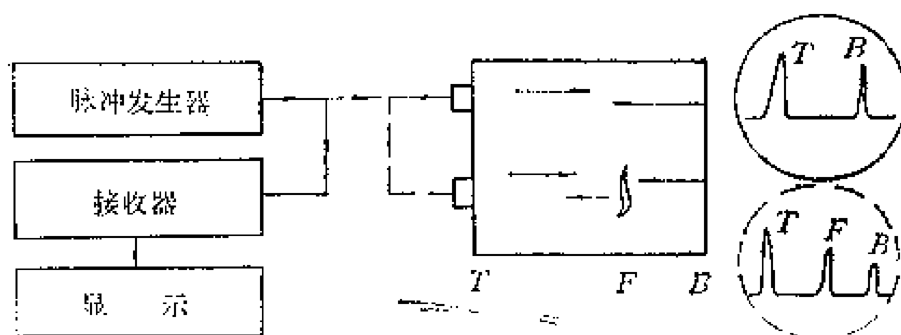
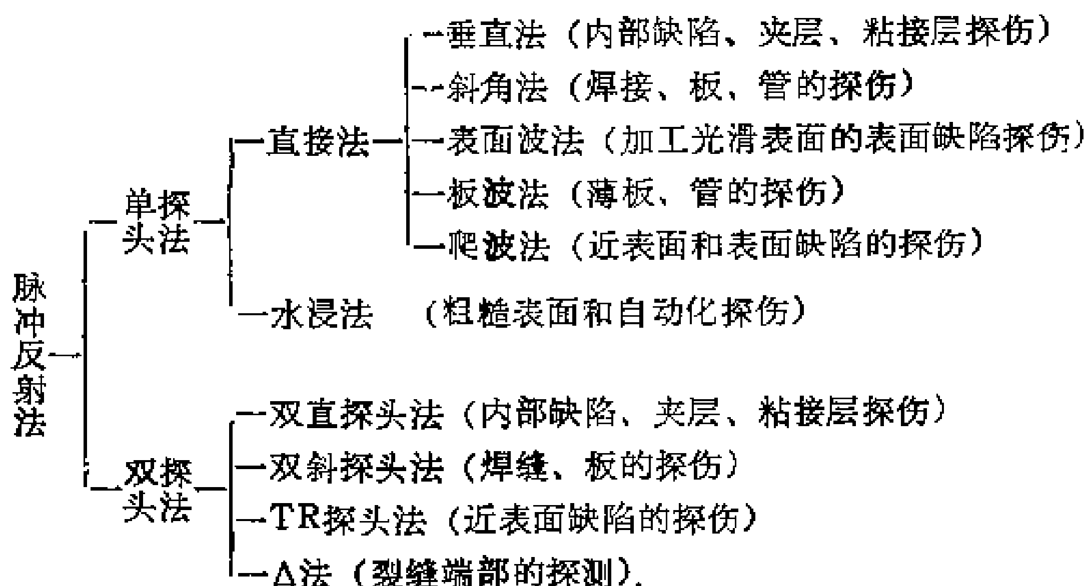


图4.3.6 脉冲反射法探伤原理

图中脉冲T为发射始脉冲，F为缺陷反射脉冲，B为底面反射脉冲．脉冲反射法探伤是超声波应用于无损检测最为广泛的一种方法，大体上可以分为单探头法和双探头法两种．在单探头法中又可分为直接接触法和水浸法两种．在直接接触法中又有垂直纵波法、斜角纵波或横波法、表面波法、板波法以及爬波法等等．在双探头法中又可有两个直探头反射法、两个斜探头反射法、两个斜探头作成一个探头的TR探头反射法、和一个斜探头发射(或接收)，一个直探头接收(或发射)的Δ反射法等等．这些方法可以归纳如下：



上述这些方法的作用原理，可以画简图如下：

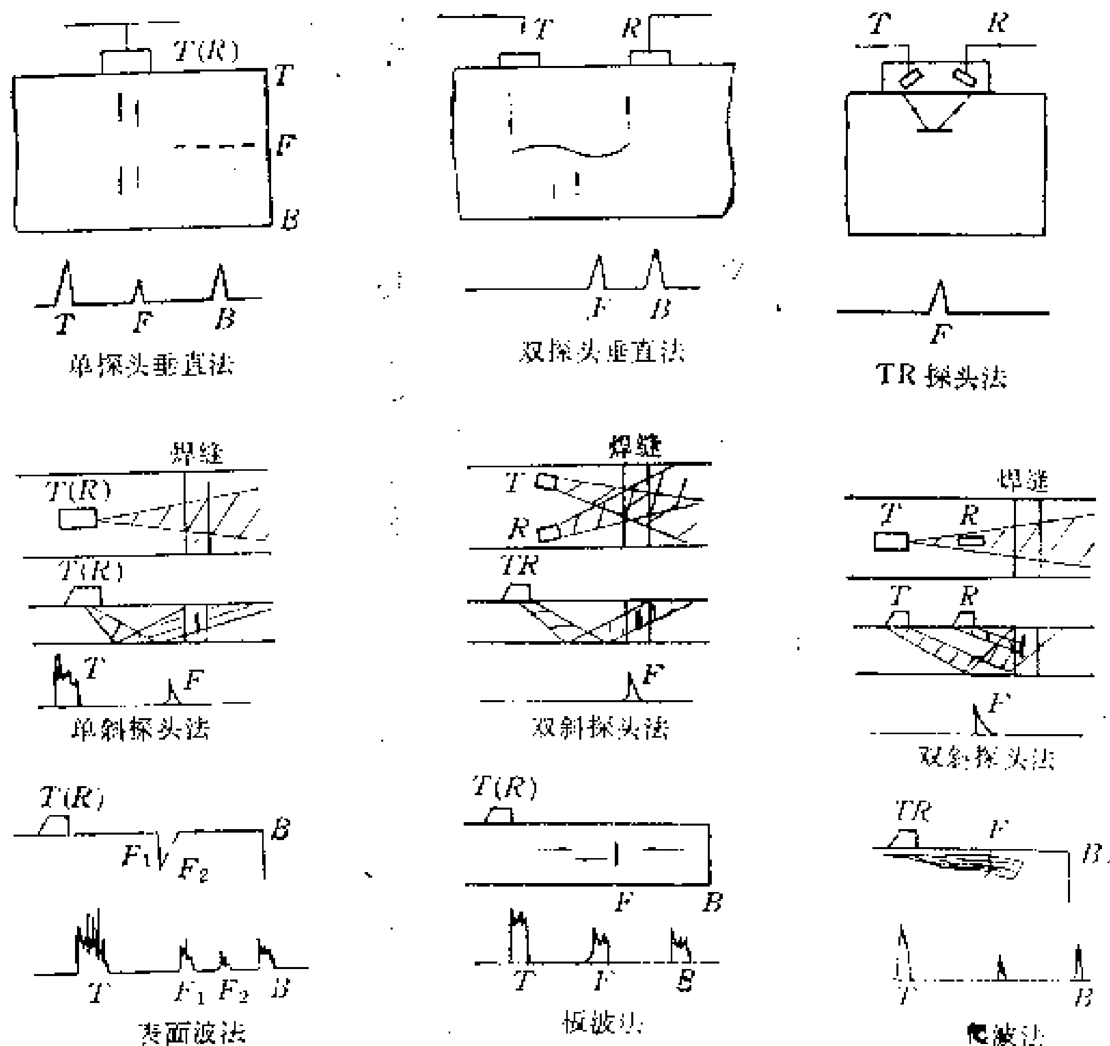


图4.3.7 脉冲反射探伤法原理

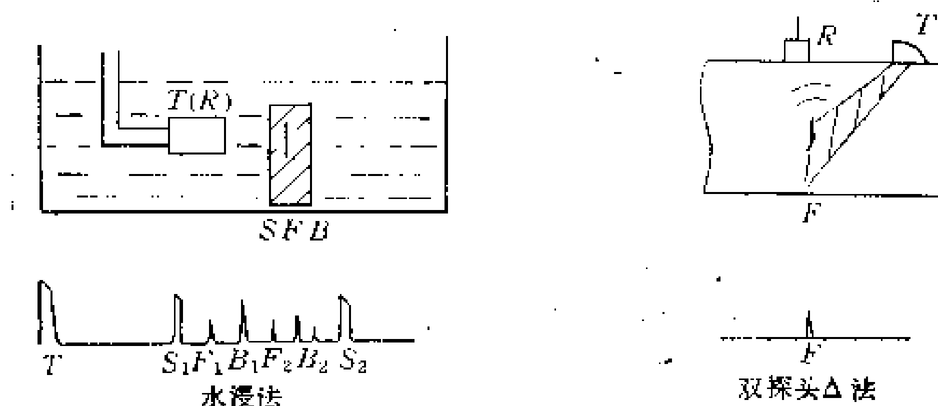


图4.3.7续

上述这些简图，简单表示了所提到的各方法的原理．在实际工作中，根据被检对象和要求的不同，探伤方法可以多种多样，而且每一种方法的实际使用又都包含有各自的技术内容．由于本书区别于一般探伤的工程技术书籍，所以不对各种方法都作一一介绍，下面仅就几个具体的例子，对方法作一点说明．

(1) 管材水浸探伤：管材水浸探伤法是管材自动化探伤中常用的一种方法，其原理示意图如图 4.3.8 所示．在实际检测中，通常是选取聚焦声束的横波探伤，其中需要考虑的声学问题很多，比如聚焦方式、工作频率、重复频率、入射角、焦点位置、水程、探头焦距以及转动的螺距等的选择．

借助于图 4.3.9，对纯横波探伤时入射角范围的选择作一点讨论．为了能实现纯横波探伤，要求最小的入射角 α_1 的纵波折射

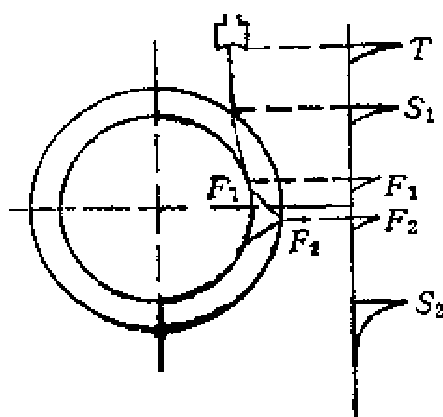


图4.3.8 管材水浸探伤原理

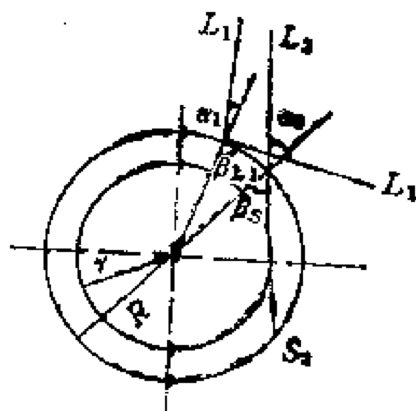


图4.3.9 管材水浸探伤入射角范围

角$\beta_{L1}\geqslant 90°$，即应满足

$$\alpha_1\geqslant\sin^{-1}\frac{v_{L1}}{v_{L2}}. \tag{4.3.35}$$

式中 α_1 为声束入射角，v_{L1}，v_{L2} 分别为水中和管中纵波声速. α_1不应小于第一临界角. 为了能探测出管内壁上的缺陷，要求折射横波必须能射到管内壁上，这就要求最大入射角 α_2 的横波折射角 $\beta_5\leqslant\sin^{-1}\frac{r}{R}$，即应满足

$$\alpha_2\leqslant\sin^{-1}\left(\frac{v_{L1}}{v_s}\cdot\frac{r}{R}\right), \tag{4.3.36}$$

式中 r、R 分别为管材的内外半径，v_s 为管内横波声速. 实际探伤中必须同时满足上述两个条件，这就给出了入射角的选取范围为

$$\sin^{-1}\left(\frac{v_{L1}}{v_{L2}}\right)\leqslant\alpha\leqslant\sin^{-1}\left(\frac{v_{L1}}{v_s}\cdot\frac{r}{R}\right). \tag{4.3.37}$$

最大入射角α_2与最小入射角 α_1 的差

$$\Delta\alpha=\sin^{-1}\left(\frac{v_{L1}}{v_s}\frac{r}{R}\right)-\sin^{-1}\left(\frac{v_{L1}}{v_{L2}}\right) \tag{4.3.38}$$

通常称之为管材水浸横波探伤的入射角窗口.

(2)表面波探伤：表面波探伤法是探测材料表面缺陷的一种方法. 用于探伤的表面波，可以用Y切石英片直接激发，也可以用斜探头激发. 选取斜探头激发时，则要求入射角 α_R 满足条件 $\alpha_R=\sin^{-1}\frac{v_{L1}}{v_R}$. 其中，$v_{L1}$ 为探头楔块纵波声速，v_R 为被检材料的表面波声速. 由于被检材料表面波声速总是小于被检材料的纵波和横波声速，所以 α_R 要大于第二临界角.

表面波沿光滑表面传播，遇到表面棱边处将产生反射和波型转换，如图 4.3.10 所示.

当 θ 角小于10° 时，反射信号降到零，如果棱边是有一定曲率半径的圆弧，也有一定的反射. 图 4.3.11 给出表面波对裂纹探伤的例子.

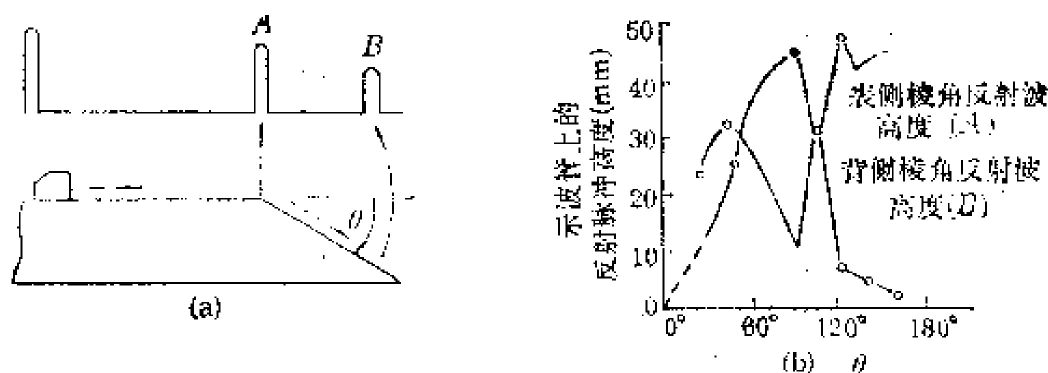


图4.3.10 棱角边反射

(a)棱线的反射脉冲 (b)棱角反射脉冲的高度

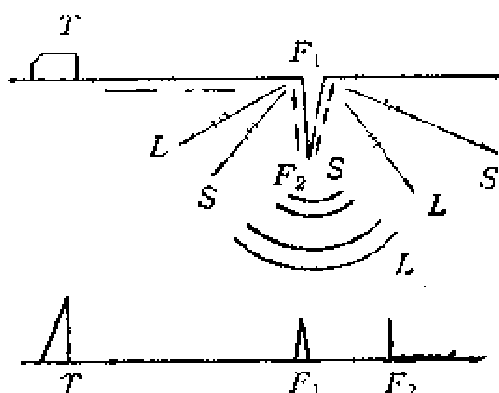
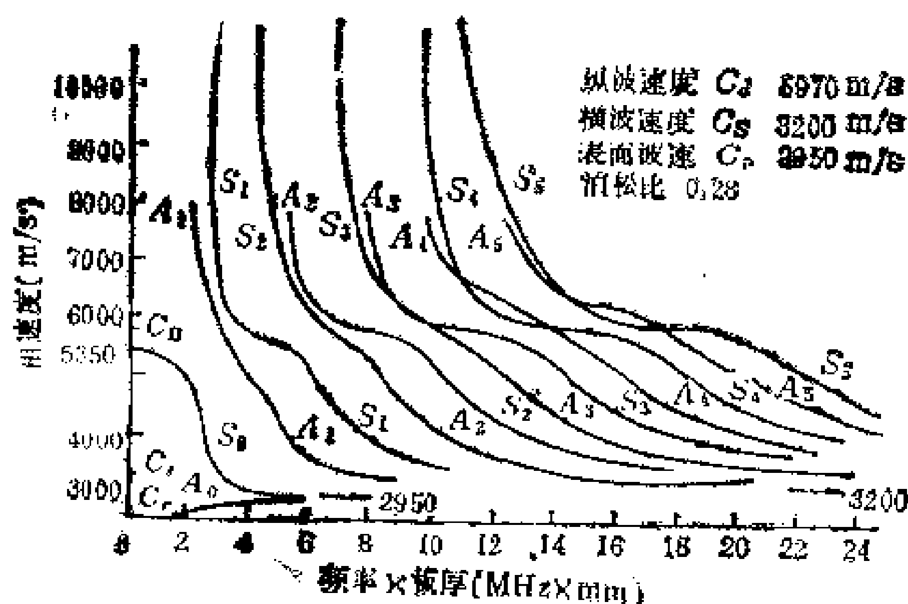


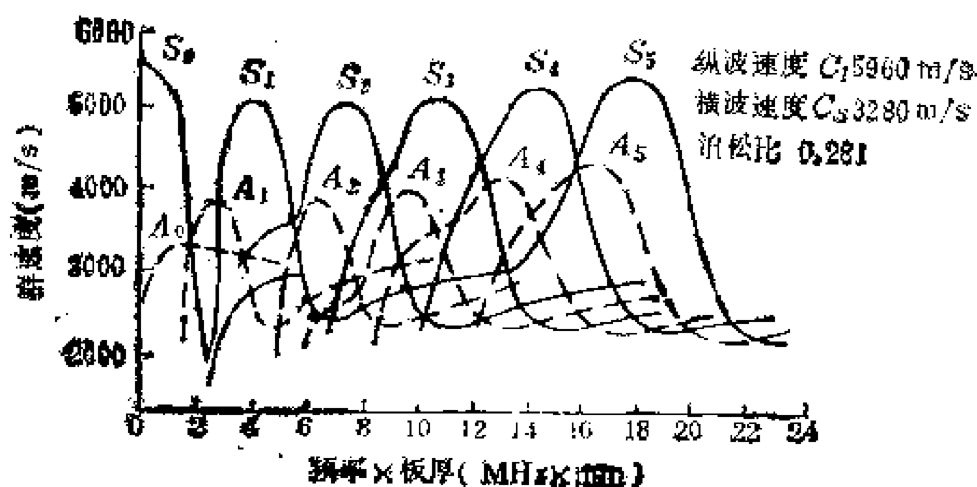
图4.3.11 表面波对裂缝的探伤

图中 L、S 均为棱角处散射的纵波和横波．探测脉冲 F_1、F_2 对应于棱角 F_1 和裂纹尖端 F_2 处的反射回波．在已知表面波声速的情况下，利用脉冲反射或频谱法通过 F_1、F_2 两个脉冲的时差测量，可以测定出裂纹的深度．在实际检测中，如果表面有液滴也将引起反射，所以在检测前将探测表面清扫干净是重要的．表面波在浸液表面传播时，同时会不断地向液体辐射，引起较大的传播衰减，故在一般情况下，表面波探伤是不适合应用于液浸表面的探伤．

(3)板波探伤：对于薄板材的探伤，板波是有效的方法之一．根据第二章中的板波公式，可以求出钢中板波相速 v_p 和群速 v_g 的曲线，如图 4.3.12 所示．



(a)



(b)

图4.3.12　板波相速度群速度曲线

(a)相速度曲线；　　(b)群速度曲线

在实际探伤中，板波模式的选取是十分重要的，因为各个模式在板内不同深度处的振幅分布是不一样的. 比如，S_0 和 A_0 模式位移的垂直分量大于水平分量，而 S_1 模式位移的垂直分量小于水平分量. 正因如此，在探测中有的模式(比如 S_0 和 A_0)对垂直缺陷敏感. 若仅利用这种模式，就可能漏掉大的水平型缺陷，因而近年来板波探伤中均采用多模式探伤. 板波各个模式在板内传播衰减

也各不相同，如图 4.3.13 所示. 液浸板中的板波传播由于不断向液体辐射，因而衰减要更快些，水中板波传播衰减如图 4.3.14 所示.

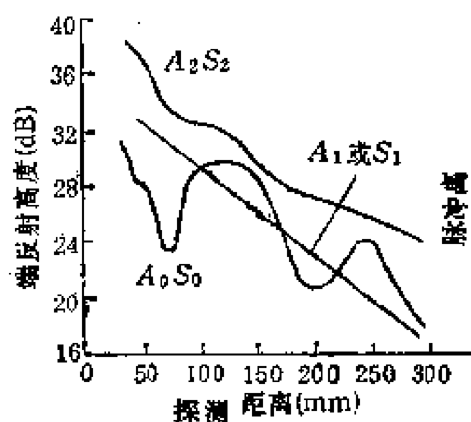


图4.3.13 实测板波传播衰减曲线

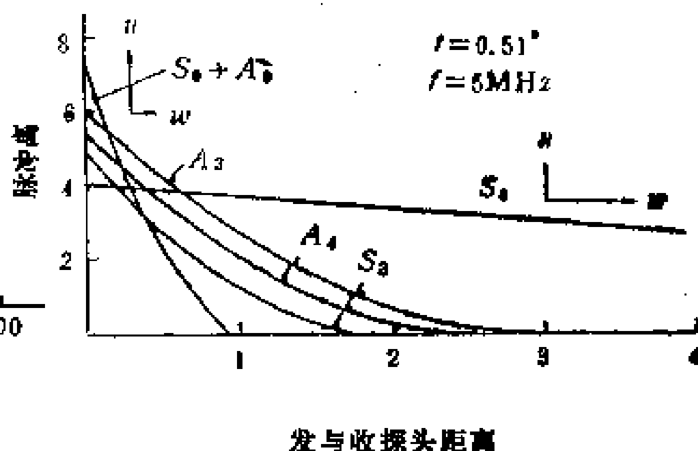


图4.3.14 水中板波传播衰减曲线

在实际探伤工作中，为了有效地激发板波，可先根据探测条件和对选定的频率f和已知板厚d从相速度曲线上找出与$(f\times d)$相对应选定模式的相速度 v_p，再由斯涅耳定律求出入射角$\alpha=\sin^{-1}\dfrac{v_L}{v_p}$，其中 v_L 为斜探头楔块纵波声速. 板波不但可以用来探伤，还可以用来测板厚.

(三)缺陷的定量检测法

断裂力学的发展，向无损检测提出不但要准确地判断伤的有无及位置，而且必须给出伤的几何尺寸，取向及其力学性质. 即由原来的定性探伤到定量测伤. 在超声无损检测中，为了建立伤信号与伤特性的定量关系，寻求测伤的有用信号，近年来国内外对超声场与伤的相互作用开展了广泛的研究，其中主要有伤的散射特性的研究和伤的成像技术的研究两大方面.

(1)频谱法和时间响应法检测

伤的散射特性研究，其目的是如何利用伤的散射信号的信息进行测伤. 在伤的散射信号的信息利用方面，近年来主要的发展是从空间域扩大到时间域和频率域，即不仅从信号的距离与振幅

关系上，而且从时间与振幅和频率与振幅关系上去研究散射场与伤量值和性质的关系．这就是超声频谱技术和时间响应技术．

确定固体中伤对超声波的散射这一问题是与量子力学和电磁散射理论密切相关的．由于声纵波和横波都能在固体中传播，而且声场是一矢量场而不是标量场，所以数学上的难度更大．目前只有对于简单形状的伤，存在精确的散射理论．精确理论可以用来检验近似理论．人们把球形伤的精确的声场散射理论和几种长波瑞利散射近似理论作了比较．例如Born近似中，假定了介质中声场未受扰动，但弹性常数和密度受到扰动；准静态近似假定声场受到与外加的静态场所受到的同样的扰动；散射矩阵法，它用积分方程表示缺陷表面的声场；如果积分方程简化为矩阵方程，并仅保留某些项而作进一步的简化，这时理论可以扩充到瑞利散射的范围之外．

用实验对理论作了检验．方法是测量散射和频率的函数关系

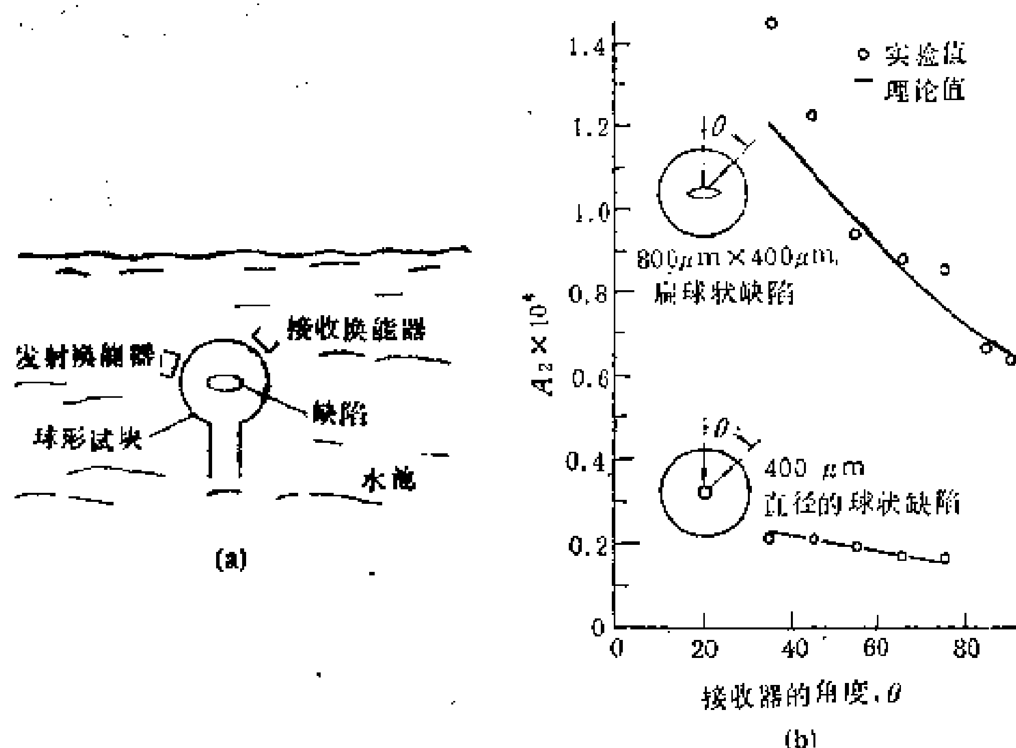


图4.3.15 钛中球和扁球伤的散射

O—实验值； ——理论值

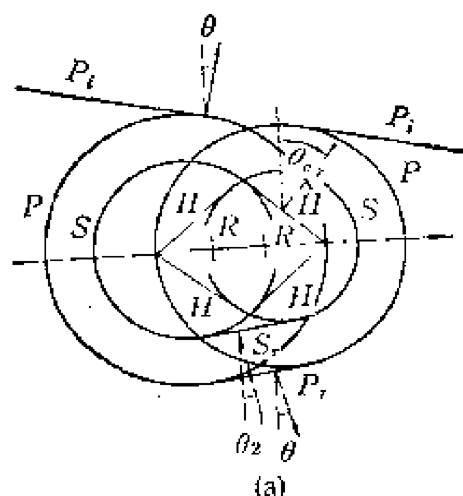
(a)验证理论的实验装置； (b)按图(a)装置所得扁球体和球体的低频散射

以及散射和发射声束与接收声束之间夹角的函数关系．实验装置如图 4.3.15(a)所示，球形试块是用钛合金通过扩散焊接制成的．在瑞利散射范围内，所得球体和扁球体伤的散射实验结果与理论结果的比较如图 4.3.15(b) 所示．由图可见，理论与实验是吻合的．

在证明了理论的可靠性之后，有人提出是否可以从散射和角度的函数关系来确定球形伤的形状和大小的求逆问题．为此，设计了一种从已知伤来训练计算机的技术，然后要求计算机去选出和编入程序的那个有同样形状、大小和取向的伤．这方面的工作已取得了相当的成功．

固体中带状裂缝对超声波散射的研究，近年来取得了一定的进展．理论分析了在各向同性的无限大均匀弹性介质中，一条长度无限，宽度为 a 的平面带状裂缝，对波矢位于垂直裂缝缝线平面内的脉冲平面波的散射．结果如图 4.3.16 所示．带状裂缝的散射，除了有反射纵波和横波外，还有缝端边缘散射的纵波、横波和沿缝表面传播的表面波．图所示结果，是对 δ 脉冲散射的全部一次波．表面波传播到缝端边缘还要产生二次散射的纵波和横波以及反射的表面波．如果入射波是具有任意函数 $g(t)$ 应力波，则其散射场是 $g(t)$ 与 δ 脉冲的响应的卷积．由卷积的性质易于看出，图 4.3.16 所示结果也适用于 $g(t)$ 应力波入射时的散射．图中只给出了各波波前位置的一般情形，没有给出 θ 变化时波的强弱．实际上，对某些 θ 角，某些波或某些部分波可能很弱，难以观察到，有些波则可能并不存在，例如 $K\sin\theta>1$ 时，不产生散射平面纵波．上述结果不包括 $\theta=90$ 掠入射的情形，它还有另外的结果．用光弹法测得的纵波斜入射的实验结果如图4.3.17所示．这些结果如何用于裂缝缺陷的定量检测，目前还在研究之中．

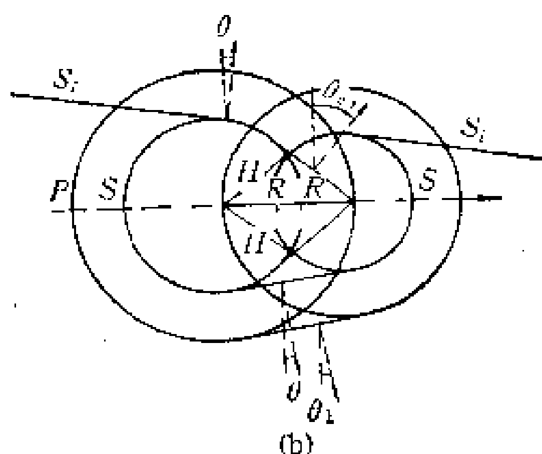
从声波长远小于伤尺寸的短波散射的一个比较简单的理论近似得到，伤的散射声场等同于受入射声波激发伤作为一个“新声源”的辐射的声场、通过伤散射声场特性的测量，利用已知的辐射理论结果回推出伤的形状取向．



(a)

(a)脉冲纵波P_i入射情形

$\theta_i=\sin^{-1}[(\sin\theta)/\kappa]$



(b)

(b)脉冲SV横波S_i入射情形

$\theta<\theta_{cr}$，$\theta_1=\sin^{-1}(\kappa\sin\theta)$

图4.3.16(a) 带状裂缝对斜入射脉冲纵波的散射波

Pi入射纵波波前，P散射纵波波前，S散射横波波前，Pr反射纵波波前，S_r反射横波波前，H头波波前，R瑞利表面波波前，

散射平面纵波、存在于几何区内，且恰与入射波抵消。

Θ_i 入射方向角，相应的"入射角"为 $90°-\Theta=\theta$，

Θ_{t1} 特征角，$\Theta_t=\cos^{-1}(1/\kappa)$

$K=c_p/c_s$，c_p，c_s为纵横波速，

θ_{21} 模式转换角，$\theta_2=\cos^{-1}(1/\kappa\cos\Theta)$

图4.3.16(b) 带状裂缝对斜入射SV脉冲横波的散射波

Si入射SV横波波前 P散射纵波波前，S散射横波波前 Pr反射纵波波前；S_r反射横波波前 H头波波前，R瑞利表面波波前

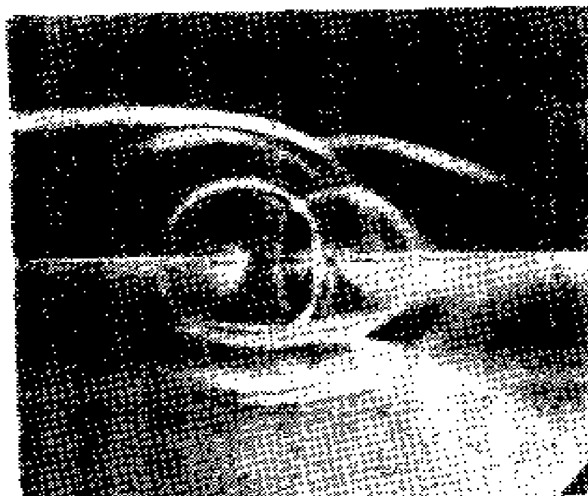
散射平面横波，存在于几何影区内，且恰与入射横波抵消。

Θ_i 入射方向角，相应于"入射角"为 $90°-\Theta=\theta$，

Θ_{t1} 特征角，$\Theta_t=\cos^{-1}(1/\kappa)$，

θ_{11} 模式转换角，$\theta_1=\cos^{-1}(\kappa\cos\Theta)$

自声源发出的声波入射到伤上，假定伤上每一点均可看作是一个新的点声源，每个点声源都以 $v_0=A_0e^{i2\pi ft}$ 表面速度均匀收缩和膨胀，向四周均匀地辐射声波．在单频下，远场中几种典型缺陷"声源"的指向因数可列表于4.3.1．由表4.3.1可见，各种缺陷"声源"的指向因数 $H(\theta)$ 是缺陷尺寸 d、辐射频率 f、材料声速 v、空间观察角 θ 的函数．在不同的$\dfrac{d}{\lambda}\left(即\dfrac{df}{v}\right)$比值下，指向因数也不同．因此，缺陷的指向因数，携带着缺陷几何尺寸的信息，研究"声源"的指向因数及其对频谱的影响，可以反推缺陷的几何尺寸．



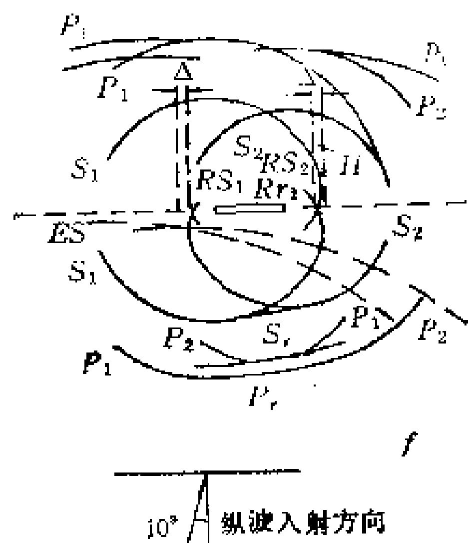


图4.3.17 纵波斜入射光弹实验结果

P_i 入射纵波　　S_1 缝左端一次散射横波

P_r 反射纵波　　S_2 缝右端一次散射横波

S_r 反射横波　　H 头波

P_1 缝左端一次散射纵波　　R_{r2} 缝右端反射瑞利波

P_2 缝右端一次散射纵波　　P_{S12} 左端产生的瑞利波在右端的二次散射横波

ES 为换能辐射的边缘横波　　P_{S21} 右端产生的瑞利波在左端的二次散射横波

在固定频率下，存在着若干个离散的方位角 θ_n，使指向因数为零，亦即产生相消干涉．如图 4.3.18(a)所示．表 4.3.1给出了几种典型缺陷的相干条件及第一级干涉极小值对应的 θ_1 角，θ_1 角通常称为半扩散角．

同样，在固定的 θ 角下，也存在着若干个离散的频率 f_n，使指向因数为零，也即产生相消干涉，如图4.3.18(b)．表4.3.2列出了上述缺陷在固定 θ 角下产生相消干涉的条件及第一级极小值对应的频率 f_1，f_1 称一级干涉极值频率．

把缺陷看作均匀辐射体只是一种理想情况．实际上材料的内部缺陷由于表面粗糙、内含物与入射信号的相互作用等因素影响，缺陷各点的散射是非均匀的，可以看成是一种非均匀的辐射体．一般说来，中心辐射强度较大，越接近边缘，振幅越小．

表4.3.1 不同缺陷对应的θ_1

缺　　陷	相消干涉条件〔在固定频率下〕	θ_1
极子型 缺　　陷	$\frac{\pi fd}{v}\sin\theta=\frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi\cdots,\ \frac{2n-1}{2}\pi,$ $\sin\theta_n=\frac{2n-1}{2}\ \frac{v}{fd},n=1,2,\cdots$	$\theta_1=\sin^{-1}\left(\frac{0.5v}{fd}\right)$
极列阵型 缺　　陷	$\frac{N}{N-1}\left(\frac{\pi fd}{v}\sin\theta\right)=\pi,2\pi\cdots$ $\sin\theta_n=n\cdot\frac{N-1}{N}\ \frac{v}{fd},n=1,2\cdots$	$\theta_1=\sin^{-1}\left[\frac{(N-1)v}{Nfd}\right]$
线缺陷	$\frac{\pi fd}{v}\sin\theta=\pi,2\pi,\cdots n\pi$ $\sin\theta_n=n\frac{v}{fd},n=1,2,\cdots$	$\theta_1=\sin^{-1}\left(\frac{v}{fd}\right)$
圆环形 缺　　陷	$\frac{\pi fd}{v}\sin\theta=2.41,5.52,8.65,11.81\cdots$ $\sin\theta_n=(0.77+n-1)\frac{v}{fd},n=1,2,\cdots$	$\theta_1=\sin^{-1}\left(\frac{0.77v}{fd}\right)$
矩　　形 缺　　陷	$\left(\frac{\pi fd_1}{v}\sin\theta\right)=\left(\frac{\pi fd_1}{v}\sin r\right)=\pi,2\pi\cdots$ $\sin\theta_n=\frac{nv}{fd_1},\sin r_n=\frac{nv}{fd},n=1,2,\cdots$	$\theta_1=\sin^{-1}\left(\frac{v}{fd_1}\right)$ $V_1=\sin^{-1}\left(\frac{v}{fd_1}\right)$
圆盘形 缺　　陷	$\left(\frac{\pi fd}{v}\sin\theta\right)=3.83,7.02,10.15,\cdots$ $\sin\theta_n=(1.22+n-1)\frac{v}{fd},n=1,2,\cdots$	$\theta_1=\sin^{-1}\left(\frac{1.22v}{fd}\right)$

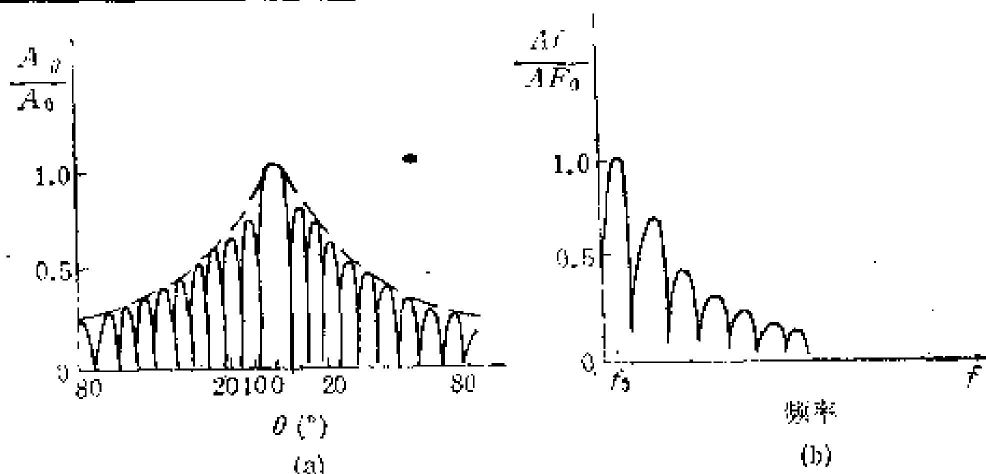


图4.3.18　指向性系数的相消干涉
(a)频率一定；(b)角度一定

表4.3.2　不同缺陷对应的f_1

缺　陷	相消干涉条件[在固定θ角下]	f_1
偶极子型缺陷	$f_n=\frac{2n-1}{2}\cdot\frac{v}{d\sin\theta}, n=1,2,\cdots$	$f_1=\frac{1}{2}\ \frac{v}{d\sin\theta}$
偶极子列阵型缺陷	$f_n=n\frac{N-1}{N}\cdot\frac{v}{d\sin\theta}, n=1,2\cdots$	$f_1=\frac{N-1}{N}\ \frac{v}{d\sin\theta}$
线缺陷	$f_n=\frac{nv}{d\sin\theta}, n=1,2,\cdots$	$f_1=\frac{1.0v}{d\sin\theta}$
圆环形缺陷	$f_n=(0.77+n-1)\frac{v}{d\sin\theta}, n=1,2\cdots$	$f_1=0.77\frac{v}{d\sin\theta}$
矩形缺陷	$f_n=\frac{nv}{d_1\sin\theta}\quad n=1,2,\cdots$ $f_n=\frac{nv}{d_2\sin\theta}\quad n=1,2,\cdots$	$f_1=\frac{v}{d_1\sin\theta}$ $f_1=\frac{v}{d_2\sin r}$
圆盘形缺陷	$f_n=(1.22+n-1)\frac{v}{d\sin\theta}, n=1,2,\cdots$	$f_1=\frac{1.22v}{d\sin\theta}$

选取如图4.3.19所示频谱分析实验，其中换能器是宽频带的，中心频率为 5MHz，发射换能器直径为13mm，接收换能器直径为6mm，采用直接垂直接触法.

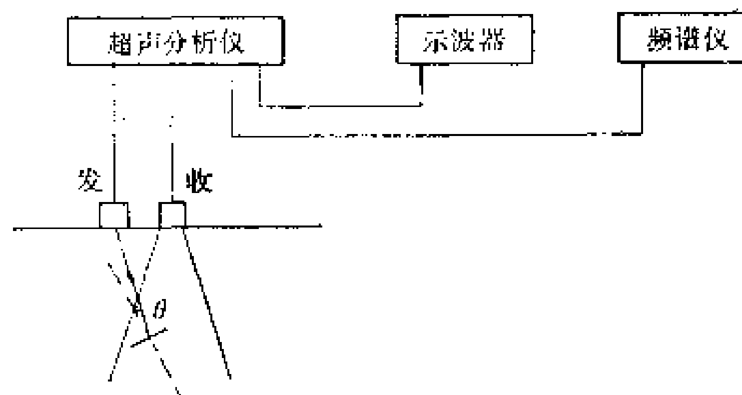


图4.3.19　实验方框图

把整个系统看作为线性系统，利用线性系统理论，整个被测频谱响应$R(f)$应是发射电信号频响$A_{发}(f)$、发射探头频响$T_{发}(f)$、材料频响$M(f)$、缺陷的频响$D(f)$、接收探头的频响$T_{收}(f)$及接收放大器频响$A_{收}(f)$的乘积：

$$R(f)=A_{发}(f)\cdot T_{发}(f)\cdot M(f)\cdot D(f)\cdot M(f)\cdot T_{收}(f)\cdot A_{收}(f)\tag{4.3.39}$$

如果选取的仪器是宽带的，具有0.1—10MHz均匀频响，可以认为电发生器和接收器的频响为1．把发射、接收探头及材料的频响看成整个系统信号传输频响为$S(f)$，则

$$S(f)=M^2(f)\cdot T_{发}(f)\cdot T_{收}(f),\tag{4.3.40}$$

于是

$$R(f)=S(f)\cdot D(f),\quad D(f)=\frac{R(f)}{S(f)}.\tag{4.3.41}$$

在固定角度条件下$D(f)$主要是缺陷辐射指向因数的贡献，它携带着缺陷几何特性的信息，依此可以测定伤的特性．

假定忽略材料散射衰减的频散影响，取$M(f)=1$．如果取圆盘形发射和接收探头的频响用抛物线来近似，同一个声轴上（$\theta=0°$）作一发一收，则$S(f)$可以近似为

$$S(f)_{r0}=\frac{A_{oo}}{r}\frac{2f_of-f^2}{f_o^2},\tag{4.3.42}$$

其中f_o为中心频率．在发射接收探头相对缺陷中心是同一个θ角时，有

$$S(f)_{r\theta}=\frac{A_{oo}}{r}\frac{2f_of-f^2}{f_o^2}\frac{2J_1\left(\frac{\pi fdt}{v}\sin\theta\right)}{\frac{\pi fdt}{v}\sin\theta}\tag{4.3.43}$$

其中dt为换能器晶片直径．这时系统频谱受到了圆盘形换能器指向因数的调制，在0—$2f_o$频段内出现了若干个极小值点，其数目n为

$$n=\frac{2f_o}{f_1}=2\frac{f_odt}{1.22v}\sin\theta.\tag{4.3.44}$$

若得到$n>1$，则$dt>\frac{1.22v}{2f_o}$即$dt>0.6\lambda$．

为了测定缺陷尺寸、方位，可将发射、接收探头作如图4.3.20

所示放置．假定缺陷是一个直径为 dI 的圆平底孔，则 A 处收到的频谱 $R(f)$ 为

$$
R(f)=\frac{A_{oo}}{r}\,\frac{2f_of-f^2}{f_o^2}\,\frac{2J_1\left(\dfrac{\pi fdt}{v}\sin\phi_A\right)}{\dfrac{\pi fdt}{v}\sin\phi_A}
$$

$$
\times\frac{2J_1\left[\dfrac{\pi fdI}{v}\sin(2\alpha-\phi_A)\right]}{\dfrac{\pi fd_I}{v}\sin(2\alpha-\phi_A)}, \qquad (4.3.45)
$$

其中 α 为缺陷平面法向与探头声轴夹角．接收角为 ϕ_A．

$$
\phi_A=\mathrm{tg}^{-1}\frac{l_A}{r_I}, \qquad (4.3.46)
$$

l_A 为发射探头与接收探头水平距离，r_I 为缺陷距材料表面深度．当 A、B 选在缺陷回波频谱第一级极小值处，则有

$$
\begin{cases}
d_I=\dfrac{1.22v}{f_{1A}\sin(2\alpha-\phi_A)}=\dfrac{1.22v}{f_{1B}\sin(2\alpha+\phi_B)}, \\
\mathrm{tg}2\alpha=\dfrac{f_{1A}\sin\phi_A+f_{1B}\sin\phi_B}{f_{1A}\cos\phi_A+f_{1B}\cos\phi_B}.
\end{cases} \qquad (4.3.47)
$$

利用在 A、B 两点测得的第一极小值频率 f_{1A}，f_{1B} 及 ϕ_A 和 ϕ_B，

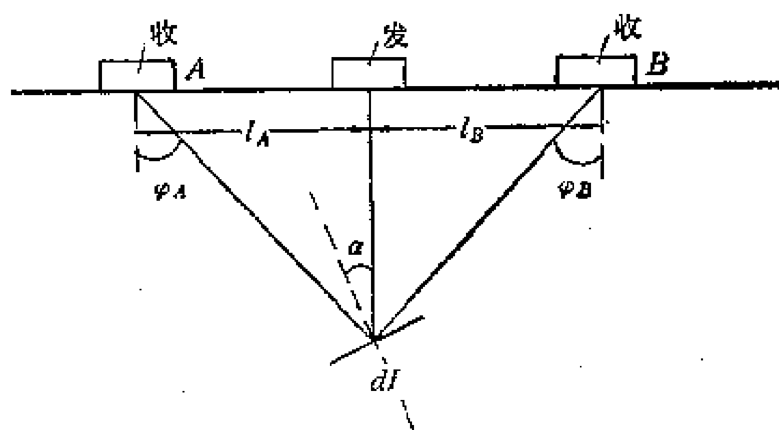


图4.3.20　检测示意图

由上述公式可以求出缺陷直径 d，和倾斜角 α.

这种方法基本上是从指向因数出发，利用线性系统理论来寻求超声回波频谱与系统频响和缺陷频响的关系，一些结论均是在单频下得出来的，因此方法显然是不严谨的. 尽管如此，但从上述的讨论可以看出，超声回波频谱的确包含着有关缺陷特性的丰富信息，通过适当的理论分析和实验，可以建立起简单几何形状的缺陷与频谱形状的关系，为探索频谱法测伤提供了一种可能.

对于长脉冲信号，裂缝边缘散射的纵波或横波，类似于光在狭缝上的散射，边缘散射纵波(或横波)信号之间产生相位干涉，呈现出一种独特的干涉图样，且是频率和角度的函数. 图 4.3.21 所示为采用缝边缘散射波干涉的理论和选用图4.3.15所示的实验方法所得的结果.

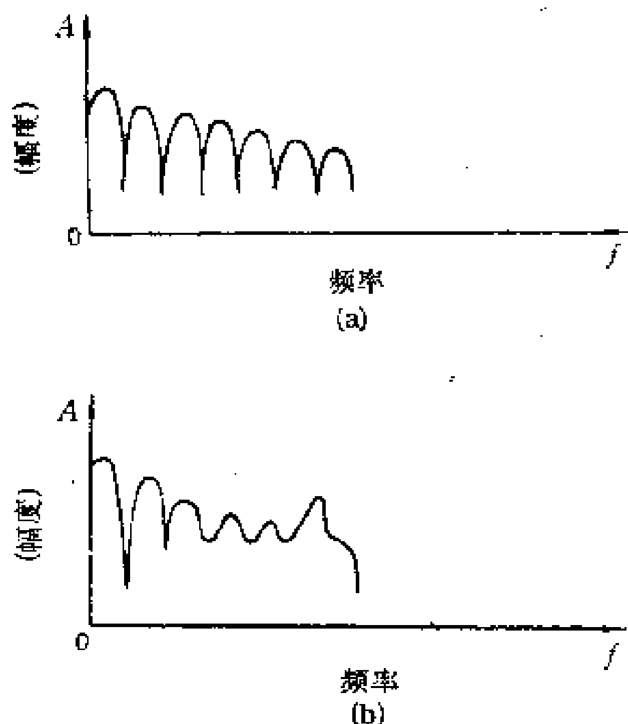


图4.3.21 缝边缘散射波干涉理论与实验曲线
(a)理论 (b)实验

举一个实际检测中可能遇到的例子，如图4.3.22所示. 由半径为R的宽带圆盘形换能器发射窄脉冲声波，在远场距离换能器D处有一裂缝长为d，声波入射角为θ，这时由裂缝产生的散射波有反射平面波，和缝端棱边散射波. 适当选择D和θ角度，使之只接收棱边散射波. 这两支棱边散射波到达换能器表面，产生干涉. 产生相长干涉的频率为

$$f_n = nv/[d\sin\theta + (D^2 + Dd\cos\theta + \tfrac{1}{4}d^2)^{1/2} - (D^2 - Dd\cos\theta + \tfrac{1}{2}d^2)^{1/2}], \quad (4.3.48)$$

其中 n 为整数，v 为介质声速. 对于远场 $d \ll D$，，上式可简化为

$$f_n = \frac{nv}{2d\sin\theta}. \tag{4.3.49}$$

通过频谱分析求出干涉极大值频率 f_1,由此定出裂纹长度 d 和倾角θ. 对于一般任意取向的裂缝,要通过不同位置的两次测量来完成. 如果选取是窄脉冲,接收换能器在时间响应上可以分裂出棱边的散射的两个脉冲信号,则可以通过两个脉冲的时间间隔换算出声程差去直接定出裂纹的长度和取向.

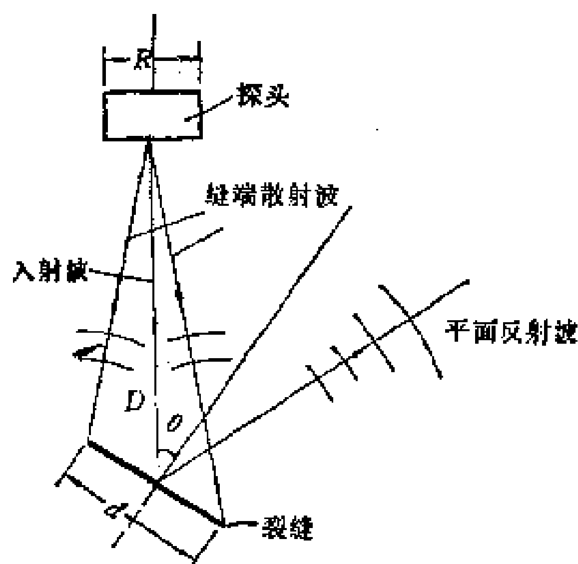


图4.3.22 裂缝散射干涉示意图

对于球形圆柱形空腔一类的体积型缺陷的散射,已有精确的理论. 近年来,利用计算机通过数值计算进一步给出了一些具体的结果. 例如,设入射脉冲为如图 4.3.23 所示窄脉冲和相应的频谱,用精确理论计算在 Si_3N_4中,Si 球体对入射纵波的后向散射波归一化频谱,如图 4.3.24(a)所示,经过反富氏变换求得

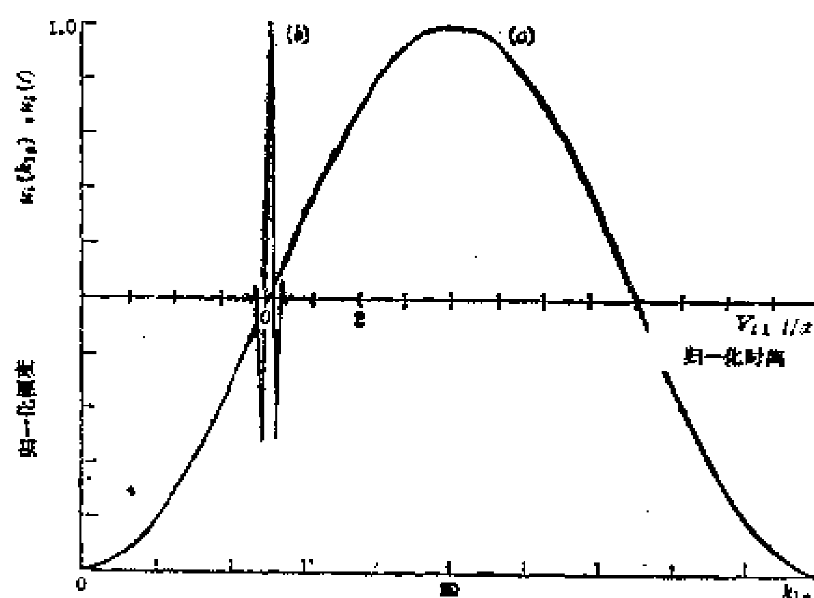


图4.3.23 入射脉冲及其频谱

的相应的散射脉冲如图 4.3.24(b)所示，用精确理论计算在 Si_3N_4 中，W_c 球体对入射纵波的后向散射归一化频谱如图 4.3.24(c)所示，相应的散射脉冲如图 4.3.24(d)所示．由图(b)，(d)可见，散射脉冲是由若干部分组成．这可用光学的射线跟踪理论解释，如图 4.3.25所示．

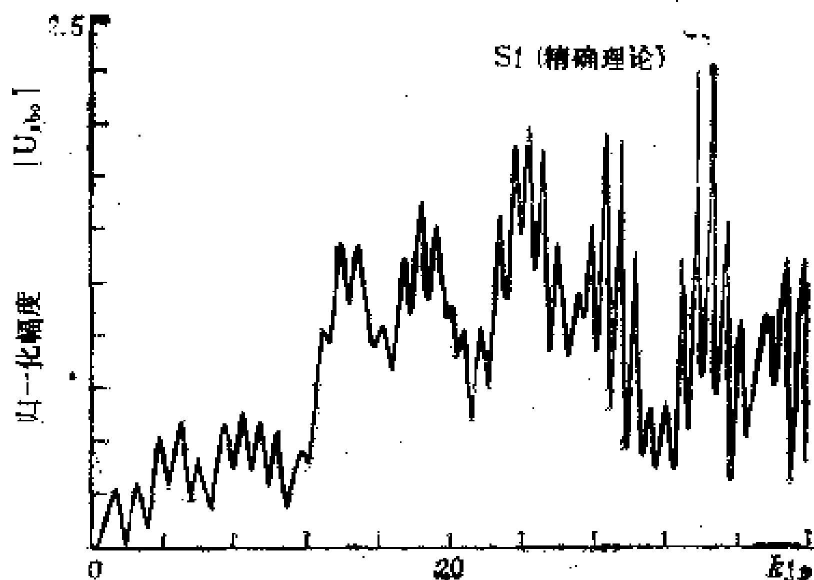


图4.3.24(a) 用精确理论计算的在 Si_3N_4 中 Si 球体对入射纵波的后向散射波归一化频谱

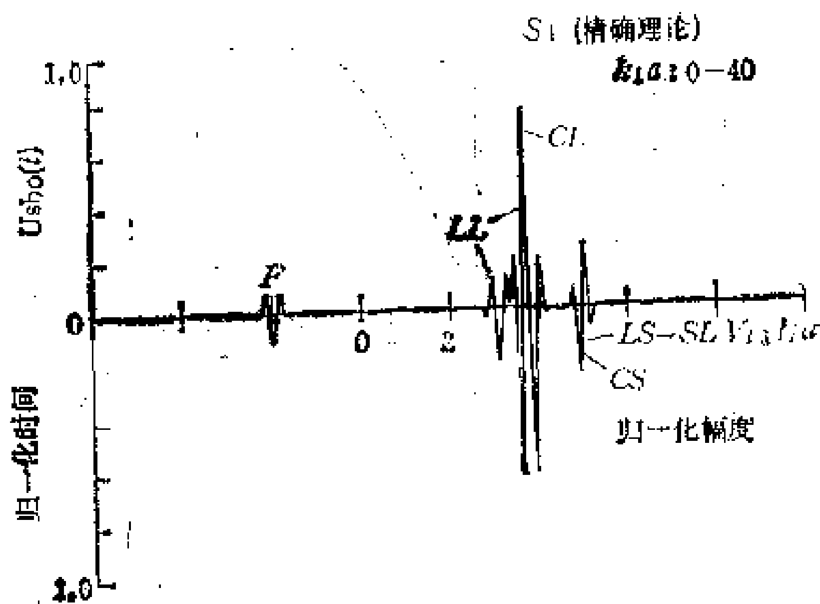


图4.3.24(b) 相应于图(a)的散射脉冲波形

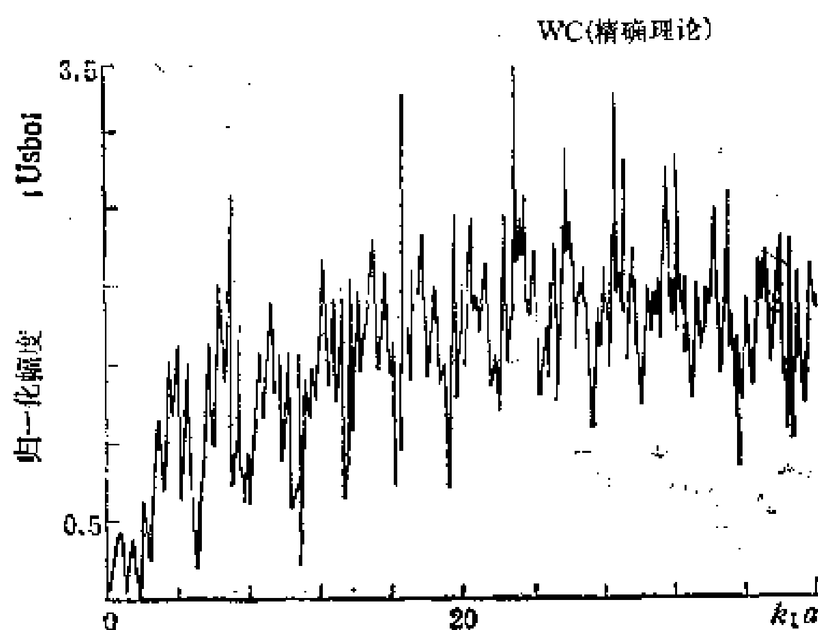


图4.3.24(c)　用精确理论计算的在 Si_3N_4 中 W_c 球体对入射纵波的后向散射波归一化频谱

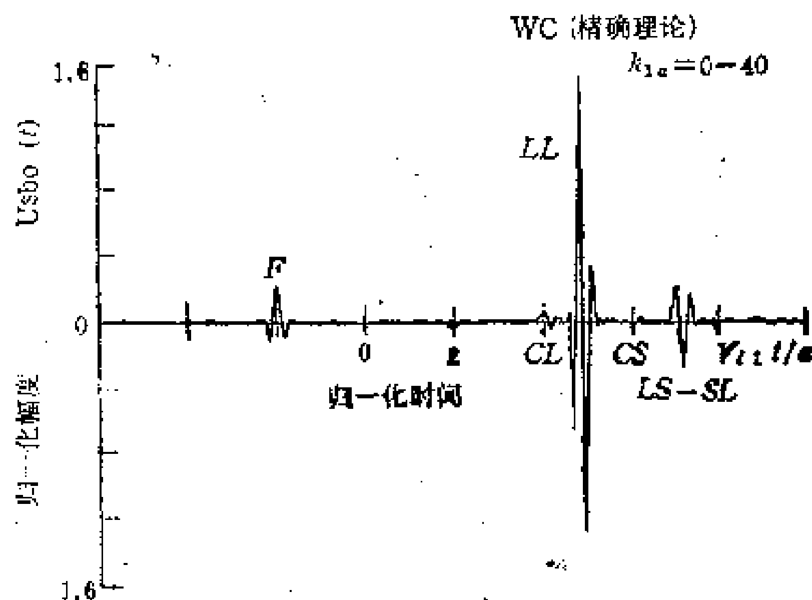


图4.3.24(d)　相应于图(c)的散射脉冲波形

图4.3.25中(a)F波，为从球体前表面反射回来的镜面反射信号. (b)LL波，为球体背面反射回来的信号，在体内以纵波形式传播. (c)$LS-SL$波为从球体背面反射回来的波，在体内传播时朝一

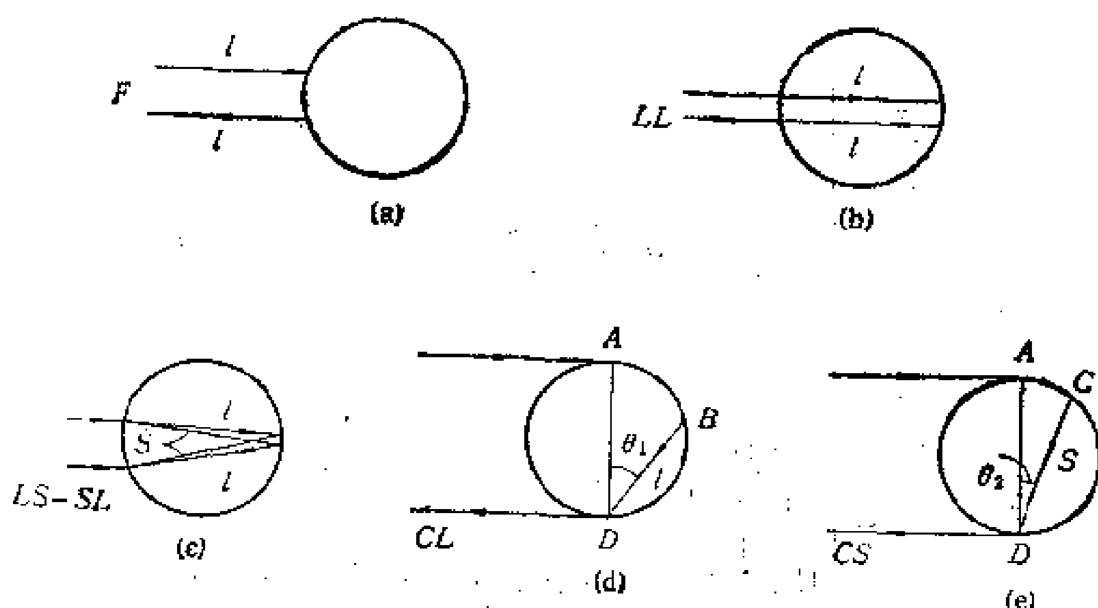


图4.3.25　纵波入射时固体中球形散射体的反向散射波分析

个方向为纵波，而另一个方向为横波．(d) CL 波，为其沿球表面传播的一段爬行纵波，且在体内以纵波传播．一般说来，爬行纵波的速度是频率的函数，其随频率增高而增大，其高频的极值为周围介质的纵波速度．(e) CS 波，为其沿球表面以爬行纵波形式传播而在体内为横波．实际上，在这些波的后面还有 SS 波，即其在散射体内的横波传播，一般说来此波较弱，常常可以忽略．如果腔内是流体介质则不可能存在 CS 波．如果腔内是空气，则散射信号只有 F 波和 c 波（爬行波）．对于横波情况也可以有与上述相类似的结果，散射波由 F 波、SS 波、SL-LS 波、CS 波、CL 波及 LL 波等组成．这里的 CS 和 CL 波的爬行部分为爬行横波，其速度略低于或接近周围介质的瑞利波速．如果散射体的纵波速度高于爬行波速度，则不存在 CL 波，若散射体的横波速度也高于爬波速度，则 CL 波和 CS 波均不存在．图4.3.24(b)、(d)标出了对应的波．

上述的这些有关散射频谱的分析和对应脉冲响应的特性，可作为在检测中对伤定量分析的频谱法和时间响应法的基础．这些方法现在仅仅限于实验室内对某些特殊材料的分析研究，还未全面应用于工业的实际检测中．

工业中大量使用的板材和铸件，普遍存在着平行于压延方向

的二维平面缺陷，而宇航工业中粘接结构和粘接层，也都是一些平面的薄层型结构．对于存在这类薄层的产品质量，往往与夹层的性质及厚度有很大关系．探测这类比波长小的薄层的厚度与性质，单凭A型脉冲回波幅度法是不易做到的．超声脉冲在垂直入射时，在薄层上下界面上将产生多次反射，如图 4.3.26 所示．

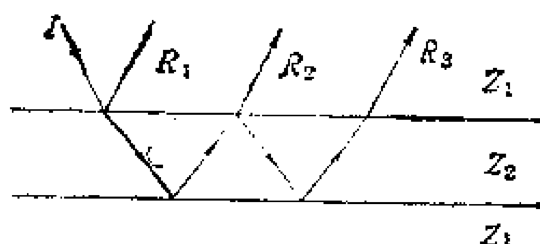


图4.3.26　超声波在薄层界面上的反射

图中 I 为入射波，脉冲为 $f(t)$，$R_1, R_2, R_3\cdots$为层上的多次反射波，z_1 为基体声阻抗，z_2 为薄层的声阻抗．薄层的反射波脉冲在第 j 次反射衰减为零时，层的反射回波脉冲为

$$R(t)=R_{21}f(t)+T_{12}T_{21}R_{12}\left\{\sum_{n=0}^{j-2}[R_{12}^{2n}f[t+2(n+1)t_0]]\right\},\tag{4.3.50}$$

式中$R_{21}=\dfrac{z_2-z_1}{z_2+z_1}$为上界面反射系数，$T_{21}=\dfrac{2z_1}{z_2+z_1}$为上界面的透射系数．$t_0=d/c$，$d$为层厚，$v$ 为层中声速．当层较厚而脉冲窄时，层的反射脉冲为 $R_1, R_2, R_1,\cdots$，分离的多个脉冲，当层很薄时$R(t)$实际上是 R_1、R_2、$R_3\cdots$多次反射的叠加，这时从时间响应上去测得层的薄厚和性质是困难的．通过傅氏变换由式(4.3.50)得到相应的频谱为

$$|F[R(t)]|=|F(\omega)|$$

$$\times\left\{|R_{21}|\frac{|1-\exp(i2\omega t_0)+T_{21}T_{12}R_{12}^{2j-2}\exp(i2j\omega t_0)|}{|1-R_{21}^2\exp(i2\omega t_0)|}\right\},\tag{4.3.51}$$

式中 $F(\omega)$ 为入射声波脉冲 $f(t)$ 的频谱．由上式可得，在

$$\omega=\omega_k=k\pi/t_0 \quad (k=1,2,3\cdots) \tag{4.3.52}$$

的一系列频率上，频谱幅度出现极小值，且等于

$$|F[R(t)]|^{\omega=\omega_k}=|R_{21}^{2l-1}|F(\omega_k)|. \tag{4.3.53}$$

频率 $f_k=kv/2d$ 或 $d=k\lambda/2$，这实际上就是薄夹层的共振频率，称之为吸收谱频率．从上述分析可得如下结果：

(i) 薄层厚度共振频率就是频谱上出现极小值缺口的频率值，

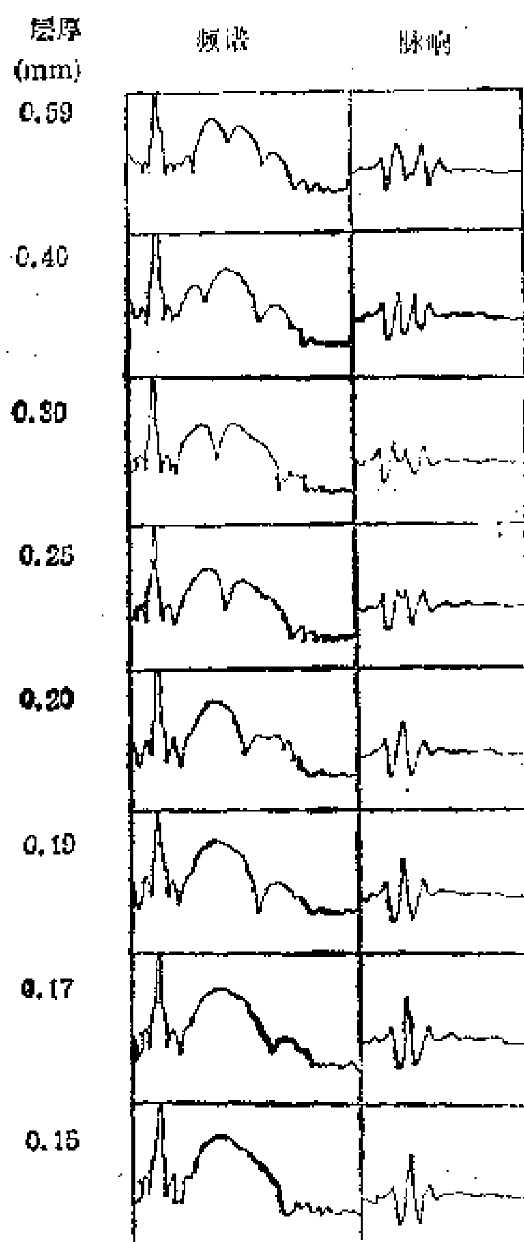


图4.3.27 有机玻璃中不同水层厚度的回波与频谱

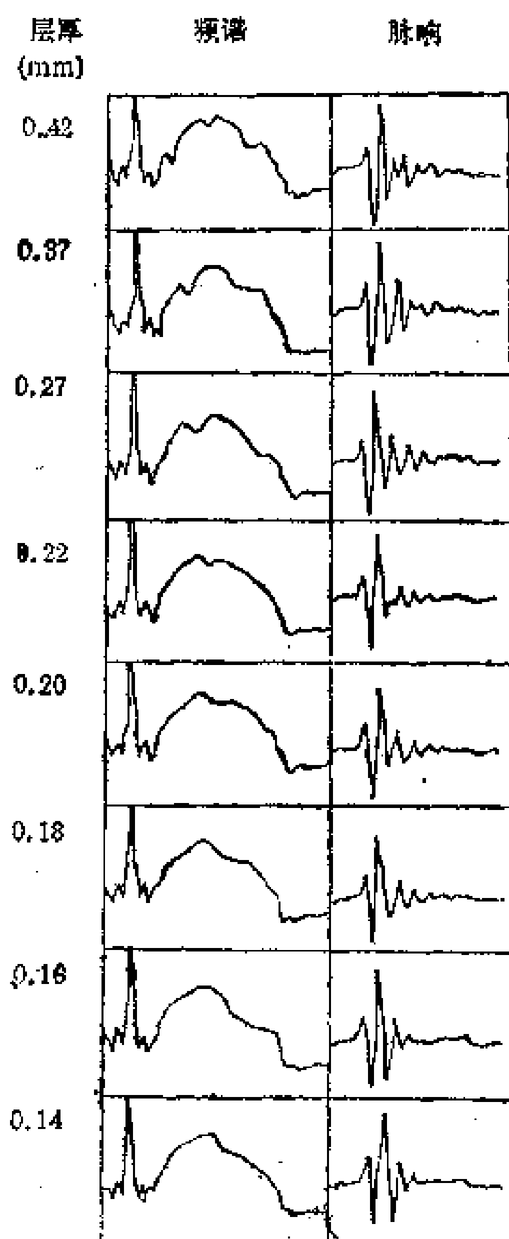


图4.3.28 铝中不同水层厚度的回波与频谱

称吸收谱频率．通过这个频率的测量，在已知薄层声速时，可测定薄层厚度，或已知薄层厚度时，可测量薄层介质的声速．

(ii)频谱中吸收谱频率对应的幅度大小，即谱的缺口下陷深浅，决定于薄层与其体材料界面的反射率 R_{21}．反射率越小，极小值越小，即下凹越深，因而通过吸收谱下降幅度的测量，可定性地给出薄层的阻抗特性分析．

在有机玻璃中不同水层厚度和铝中不同水层厚度的实验结果，证实了上述的结果，实验结果如图 4.3.27 和图 4.3.28 所示．

(2)无损检测中声成像的简介

近年来的一个重要进展是利用声成像技术来确定材料中伤的位置和形状．在材料检测中的声成像技术远不及在医学诊断中发展得那么快，有关声成像技术在下一章将有较为详细的介绍，这里只简单介绍与无损检测有关的部分．

机械扫描成像：在无损检测中，机械扫描成像主要有B型扫描成像、C型扫描成像和透视平面成像等．

B型扫描成像，是一种可以显示出工件的某一个纵断面声像的方法，其原理如方框图4.3.29所示．

扫描
放大
发射
同步
1
2
3
4
5
+

图4.3.29　B型扫描成像

B型扫描成像主要由同步发射、扫描、放大、平面显示器和机械同步等几部分组成．同步信号触发发射电路，激励探头发射出超声波，同时还触发扫描电路，把扫描输出的锯齿波加到 y 偏转板上，把随探头位置变化的电位加到 x 偏转板，进行方位扫描，使探头对工件的机械扫描与显示器 x 轴扫描同步．探头接收反射的信号，经过放大器进行幅度放大后，加到示波管的栅板进行亮度调制．这就是B型扫描成像的基本原理．

C型扫描成像，是一种可以显示出工件的某一定距离横断面声像的方法．方法原理方框图如图4.3.30所示．

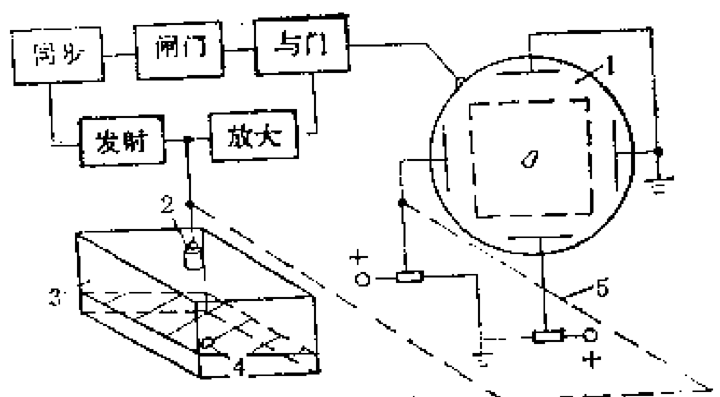
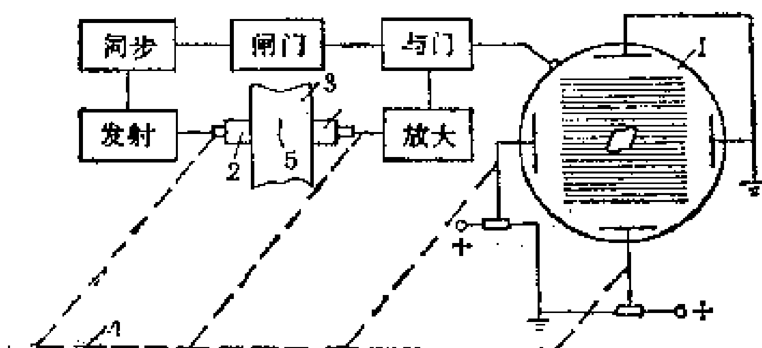


图4.3.30　C型扫描成像

C型扫描成像主要由同步、发射、放大、与门、闸门、平面显示器和机械扫描同步等几部分组成．主要的工作原理是：同步信号分两路同时触发发射和闸门电路，以获得超声脉冲和与发射时间相差一定时间的闸门信号．探头在工件上扫描的 x 分量加到 x 偏转板上而 y 分量加到 y 偏转板上，使探头对工件的扫描 (x,y) 与显示器的电子扫描 (x,y) 同步．探头接收的回波信号经放大后同闸门输出信号一起同时加到与门电路上，选出与发射相差一定时间的回波信号作为亮度调制信号加到示波管的栅板上．工件横断面的距离由闸门与发射时间差来决定，改变这个时间差可以改变成像的横断面的距离．



机械扫描同步
图4.3.31　超声透视成像

超声透视成像，是显示工件的投影像的方法，其原理如方框图4.3.31所示．

超声透视成像主要由同步、发射、放大、闸门、与门、平面显示器和机械同步等几部分组成．其工作原理是：同步触发器触发发射电路，发射超声脉冲，并同时触发闸门，以产生有一定延时的闸门信号．接收探头接收的声信号经过放大后，同闸门信号一起加到与门，选出比发射信号延时一段固定时间的信号并作为亮度调制加

到示波管的栅板上，延时的时间应为声波由发射到接收的传播时间．探头的扫描 x，y 分量分别加到 x 和 y 偏转板上并使它们同步．

超声透视成像法实际上是与 x 光透视一样的一种超声透射强度成像方法．x 光透视是用感光底片记录透过的 x 光强弱，而超声透射强度的记录显示方法可以有很多种方法．早年有人把发射探头作成很大，采用声盒法和浮雕法来直接记录和显示透过的超声强度，近年来有人用激光测工件表面振幅的方法来记录显示透过超声的强度．早期还有人把许许多多个小压电晶片镶嵌在一起制成接收探头，每一个小晶片背面用光电材料覆盖直接作成声像管，进行实时的成像，这种声像管又叫Sokolov 管．上述这些方法在实际无损检测中并没有得到广泛的应用．近年来，对透明的液体和固体，采用了施利仑法和光弹法观察显示声场的方法．这在上一节探头测量中已提到过．

电子扫描成像：电子扫描可以是线性扫描，也可以是扇形扫描．线性扫描一般用切换扫描的方式，根据需要，利用电路控制使换能器列阵分组发射和接收．扇形扫描是用相控扫描来实现的．在相控扫描时，不但可以作到声束扇扫，而且还可以作到声束聚焦并且焦距可变，也即焦点作纵向深度扫描．机械扫描已发展到电子扫描，后者可使检测速度大大提高，同时也提高了分辨率和检测的精度．

电子扫描成像在无损检测中已有一些应用，但并不十分广泛和普遍．图 4.3.32 所示为一个穿透法成像的例子．工作频率为 2.2兆赫，样品是用于飞机结构上的钛背衬上的硼强化环氧树脂．检测的关键问题是发现它们层间的脱粘．采用的电子扫描成像系统如图4.3.32(a)所示．这是在一个方向用机械扫描，而另一与之垂直的方向上发射阵列和接收阵列均用电子扫描系统控制．检测的结果如图4.3.32(b)所示．

电子扫描成像在医学诊断中得到了相当广泛的应用，在下一章将有进一步的介绍．

超声全息成像：超声全息成像是继光全息之后出现的一种新

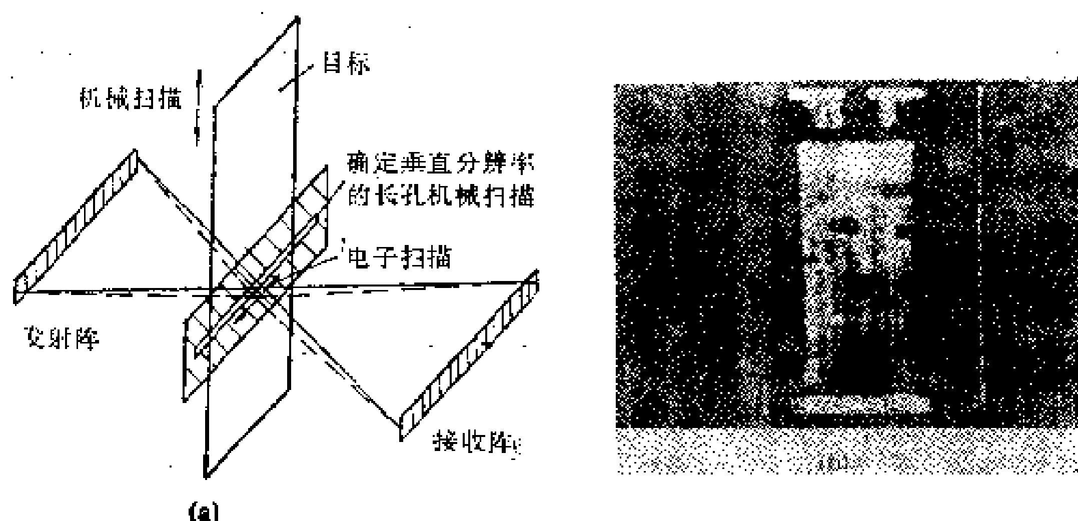


图4.3.32 用电子扫描聚焦阵列的穿透成像系统
(a)实验装置； (b)实验结果

的声成像方法，其基本原理如图 4.3.33 所示．物体和物体中缺陷散射或透射的波 p_0 和参考波 p_r 是单频相干的．它们在H面上叠加的结果是

$$p = p_0 + p_r = p_0\exp[j\omega t - jk(x\cos\theta - y\sin\theta)] + p_r\exp[j\omega t - jk(x\cos\theta + y\sin\theta)], \quad (4.3.54)$$

其中坐标 x 取作参考波束与物体波束的角平分线．

叠加波的幅值是

$$p = p_0\left[1 + \left(\frac{p_r}{p_0}\right)\exp(j2ky\sin\theta)\right]\exp[-jk(x\cos\theta + y\sin\theta)]. \quad (4.3.55)$$

干涉条纹的强度比例于

$$|p|^2 = p_0^2\left[1 + \left(\frac{p_r}{p_0}\right)^2 + 2\frac{p_r}{p_0}\cos(2ky\sin\theta)\right]. \quad (4.3.56)$$

第一项是常数项，第二项是调制项，记录的干涉条纹就是全息图．用参考波照射全息图时就可以成像，因为透过全息图的波比例于 $|p|^2$，所以可写成：

$$p_r\exp[-jk(x\cos\theta - y\sin\theta)]|p|^2$$

$$= p_r p_0^2\left[1+\left(\frac{p_r}{p_0}\right)^2\right]\exp[-jk(x\cos\theta - y\sin\theta)]$$

$$+ p_r p_0^2\left(\frac{p_r}{p_0}\right)^2\exp[-jk(x\cos\theta + y\sin\theta)]$$

$$+ p_r p_0^2\left(\frac{p_r}{p_0}\right)^2\exp[-jk(x\cos\theta - 3y\sin\theta)]. \qquad (4.3.57)$$

第一项是未偏转的透射波，第二项是在原物体波方向，等于又发出的物体波，形成物体的虚像，第三项代表参考波的另一边形成的物体的共轭实像。所以超声全息主要包括全息图的获得和重建物体像两个环节。

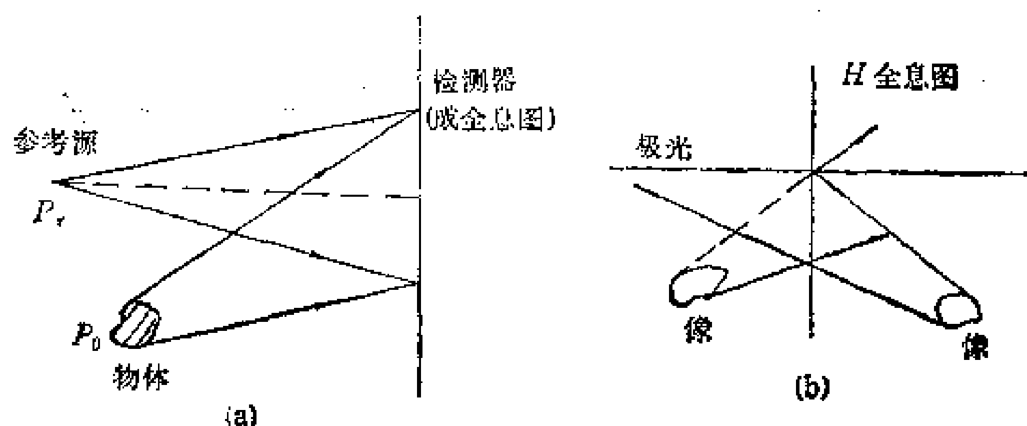


图4.3.33　全息成像的原理

(a) 物体波p_0与参考波p_r互相干涉的全息图；
(b) 用参考波照射全息图重现象

根据加参考波的方法不同、获得全息图的方法不同和重现象的方式不同，超声全息成像有许多具体方法。比如，有用声参考波也有用电参考波的；有用液面法记录全息图的，也有用电学方法记录的；有用激光重建像的，也有计算机重建像的等等。尽管如此，超声全息虽然在实时能力上优于其它方法，原理上可以得到三维立体像，但由于装置复杂、条件苛刻而且用激光重建像时造成严重畸变等问题，所以多年来从成像的质量上并不优越于其他一些方法，目前在无损检测和医学中都尚未得到广泛的应用，正处在进一步发展之中。

ALOK 检测成像系统：ALOK 检测成像系统是近年来联邦

德国无损检测研究所研制发展的一种检测方法. ALOK 是德文缩写,意思是幅度-传播时间动态曲线. 其理论依据是伤信号的传播时间与换能器位置变化遵守一特定数学(如双曲函数)规律,而干扰信号(如底面波等)并不遵循上述规律. 这样就可在大量的实验数据中把伤信号提取出来,如图 4.3.34 所示.

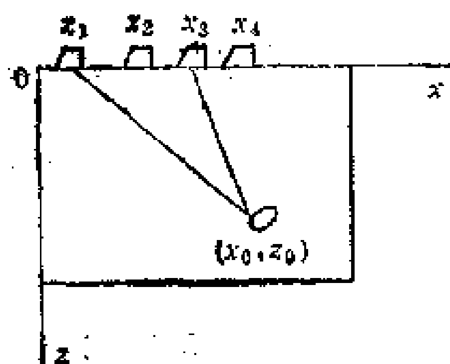


图4.3.34 测试示意图

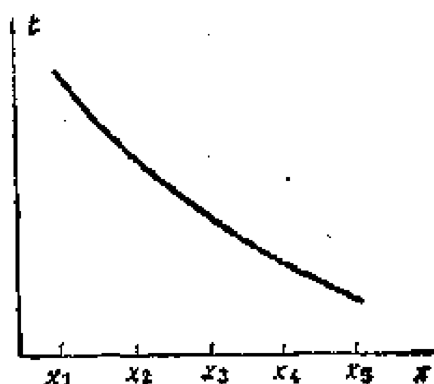


图4.3.35 位置时间曲线

设伤位置为(x_0, z_0),探头在 $z=0$ 平面上移动,传播时间 $t=2\sqrt{(x-x_0)^2+z_0^2}/v$,所以有

$$\left(\frac{vt}{2}\right)^2-(x-x_0)^2=z_0^2, \qquad (4.3.58)$$

这在 tx 平面上可得如图 4.3.35所示双曲线. 但在实际检测中,由于声束有一定宽度,对于斜入射 t-x 曲线呈双曲线,而信号最大幅度却出现在声束中心穿过伤的探头位置,如图 4.3.36 所示,信号幅度最大值对应的探头位置为 x_3 但双曲线的顶点却不在 x_3 处.

在检测中首先利用硬件设备,把探头位置、传播时间、极大值幅度这三个量作为一组数据记录并存储起来,然后由软件进行分析处理作伤像的重建. 像的重建是依据简单的几何定理,即传播时间相同点的轨迹是在以探头为中心的圆.在x-z平面上扫查加上在 y 方向的扫查就可获取有关伤的几何形状. 重建像可以有不同的方法,比如用两个反向的斜探头作双向扫查的方法,如图4.3.37所示. 这种方法有助于获得伤边界图. 如果采用双探头(一个发射、另一个接收)进行串接扫查,可以得到水平方向位置较准确但

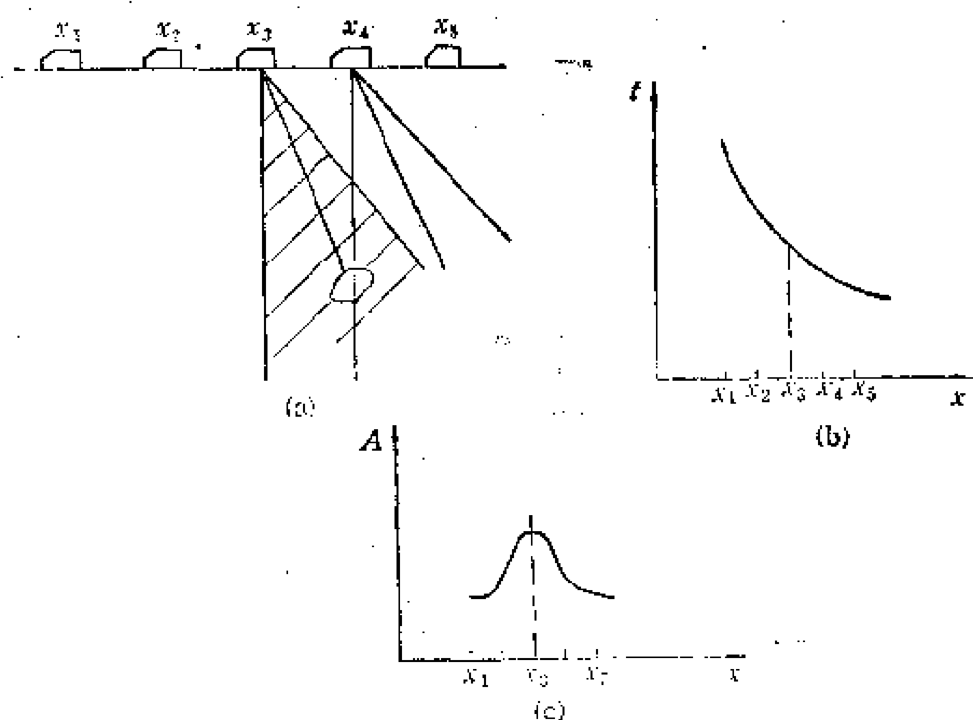


图4.3.36 位置幅度与对应的位置时间曲线关系
(a)测试示意图；(b) 位置时间曲线； (c)位置幅度曲线

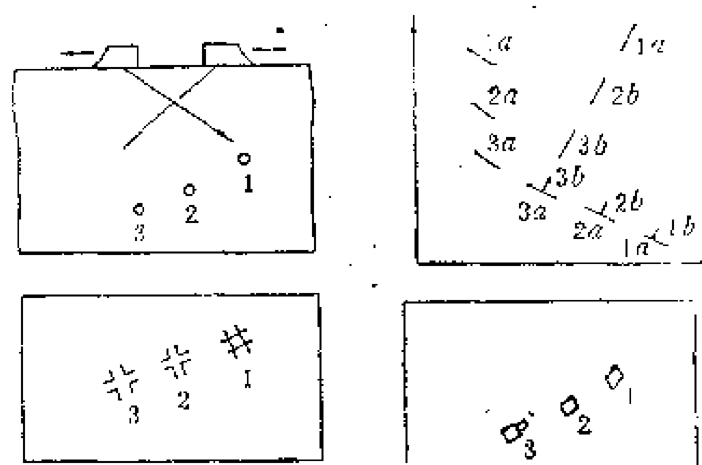


图4.3.37 成像的示意图

深度定位精度较差的结果．目前采用 ALOK 技术检测速度一般可达35 mm/s，可测出伤直径为 1 mm．该装置已在联邦德国核电站的检测中得到应用．

超声显微镜： 近年来，超声显微镜的研制受到国内外的普遍

重视．现在主要有两种类型很不相同的扫描超声显微镜，用于观察近表面的小缺陷．其中之一如图 4.3.38 所示．

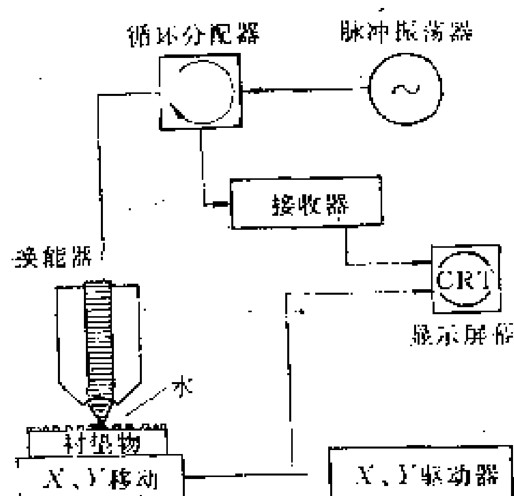


图4.3.38 Jipson和Quate的反射式声显微镜概图

其工作频率在100 MHz到几千兆赫之间，采用沉积在蓝宝石衬底上的氧化锌薄膜换能器．蓝宝石上加工有球面透镜，它通过薄水层和试样接触．透镜使声束聚焦，焦点在曲率中心附近，分辨率比一个声波长稍长，浸于水介质时，在 3 GHz时的分辨率约为 4000 Å．从试样上反射回来的声束由同一换能器接收，用其输出信号去调制阴极射线管的亮度，借助于在一个方向上的扬声器运动以及垂直方向上的液压活塞对试样进行扫描．把这个运动和阴极射线管屏上亮点的偏转同步起来，就得到一幅像电视图像那样的扫描图像．图 4.3.39 所示为由2.4GHz反射式超声显微镜得到的一个集成电路的图像，波长约为6000 Å．

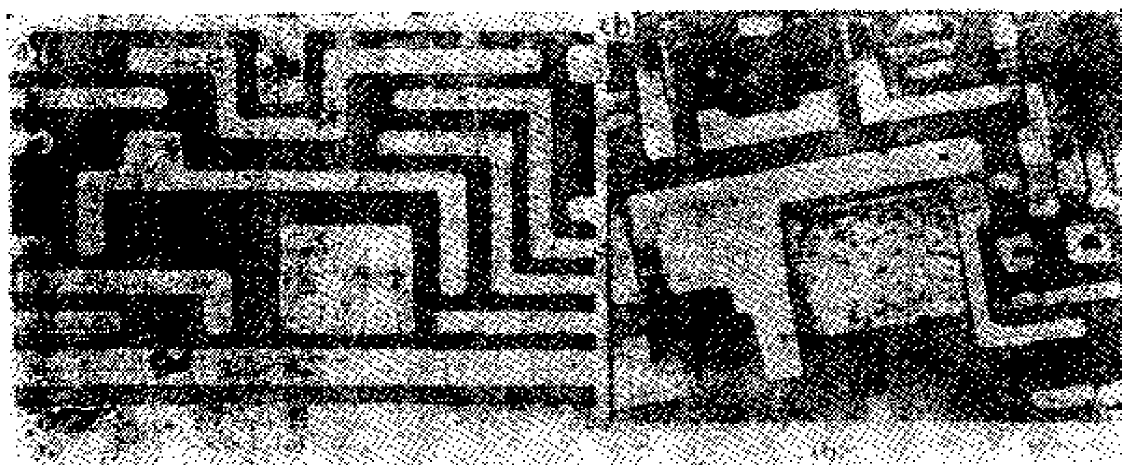


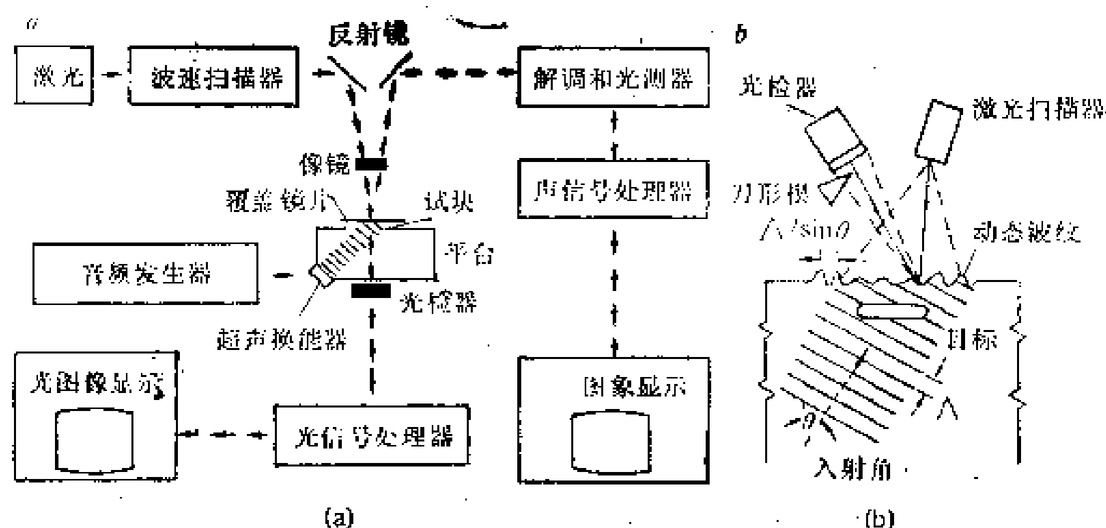
图4.3.39 集成电路的声图像铝线宽度约7μm

(a)光图像；(b)声图像

另一种扫描方式的超声显微镜如图4.3.40所示．它利用声波在固体表面引起的波纹使激光束偏转，并用光检测器测量其偏转

大小，使聚焦了的激光束通过刀口，再把该偏转变换为一种幅度调制，而在阴极射线管上以亮度调制的方式显示出来．使激光束对样品扫描（可用一般电视祯频来扫描），可以同时显示出试样表面的声图像．此外，由于该系统基本上是一光学系统，有可能在该区域同时取得光图像，以作比较．图 4.3.41 所示为在 100MHz时得到的陶瓷片电容器的干涉图，可以看到层间的分离．

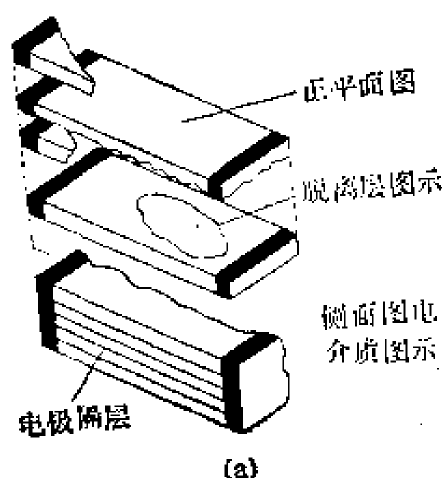
比较这两种超声显微镜，前一种分辨率较高，可与光学显微镜

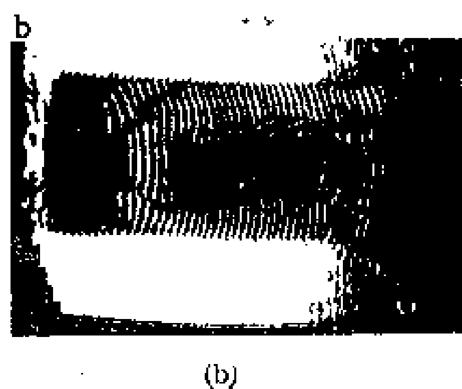


(a) (b)

图4.3.40 装置示意图

(a)扫描激光声显微镜图； (b)激光检测界面上声能 λ 是波长





(a) (b)

图4.3.41 陶瓷片电容器的声干涉

(a)层间有分离的陶瓷片电容； (b)100MHz扫描激光显微镜的声干涉图

媲美，后一种分辨率较低，但它具有光学和声学同时成像的优点，在非平面试样上有较大的视场.

(四)电子计算机对检测超声信号处理

在超声检测系统中，为了能获取有关伤的尽量多的信息，采用电子计算机作信号处理也是有效的方法之一. 它不但能将一般常规超声探伤系统丢掉的信息提取出来，还可以通过各种处理方法对信号进行加工，来提高信噪比和对伤的识别能力.

作为一个例子，下面对以国产 DJS-130 小型电子计算机为核心建成的一个电子计算机超声信号处理系统略加以介绍. 系统的框图如图 4.3.42 所示. 超声检测设备由脉冲发生器和放大器组成，为了研究信号形式对探伤的作用，脉冲发生器输出信号的包络是宽度可变的方波，载波频率也是可变的，放大器为宽带放大器. 由于超声探伤用的信号是兆赫级的高频信号，故需高速的模数转换器，通常需高出工作频率四倍以上. 这里给出的是一种采用低速模数转换器借助于采样示波器的方法. 超声信号通过取样示波器馈给模数转换器. 模数转换器与主机交换信息，可以用程序中断方式或数据通道方式工作. 利用上述系统对检测超声信号处理可以是多方面的. 下面给出在粗晶材料探伤中应用的一个例子.

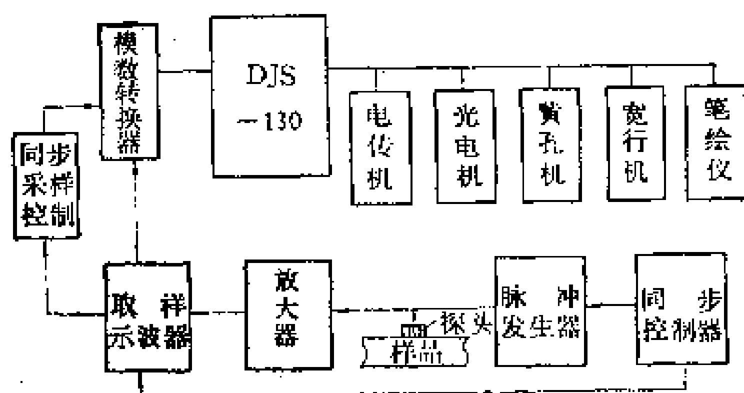


图4.3.42 系统方框图

粗晶粒材料的超声探伤是一个极为困难的问题. 晶粒对超声的散射引起严重的结构噪声，将缺陷反射信号淹没在此噪声之中，为提高信噪比而采取了一系列措施，诸如使用频带较宽的窄脉冲、

聚焦探头、合适的波形等．使用频率可控超声脉冲信号并结合信号处理技术是有前途的一种方法．

对晶粒散射杂波及伤回波信号处理，比较简单的方法是平均法．晶粒散射杂波随探头位置或超声频率的变化在统计学上是随机的，而伤和底部回波近似平稳的．所以有可能用多次平均使晶粒引起的杂波变小．除此之外还有用求相关办法提高信噪比等方法．

用A扫描反射法探粗晶粒材料，使用宽带超声探头，中心频率是2.25MHz．保持探头在样品上不动，激励信号载波频率从1.5 MHz变到2.9 MHz，脉冲宽度是4 μs．计算机每采一次信号，改变一次激励信号频率，自1.5MHz起经13次改变到2.9MHz为止．由于探头带宽不够宽，进行了频率补偿处理，计算机将这13次采集到的信号进行平均．设 $x(R)$ 是A扫描所得到的信号，$\overline{x(R)}$ 是平均处理后的平均值，则

$$\overline{x(R)}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i(R). \tag{4.3.59}$$

N 是采集次数，$R=1,2,\cdots,k$，其中 k 是每次采集点数．实验取 $k=1024$，$N=13$，所用样品是高温合金钢，样品厚度为170 mm．图4.3.43是在频率等于2.3MHz时所得的回波信号，由于晶粒散射干扰杂波信号幅度很高，以至底部回波被淹没在杂波中．图4.3.44是经过计算机作频率平均处理后所得的波形，可以较明显地辨认出底部回波信号，信号杂音比达16dB．在用另一种奥氏体钢作样

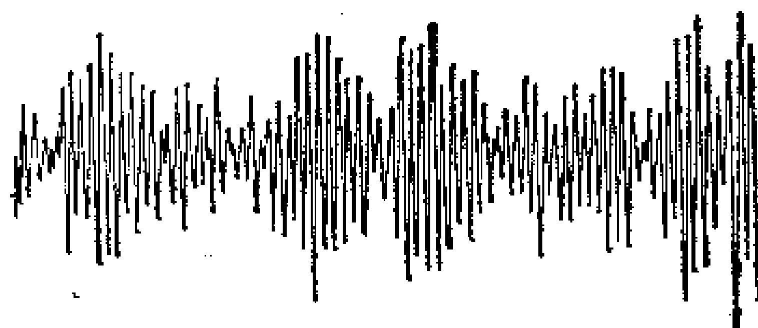


图4.3.43　未处理的底部反射波形

晶，平均晶粒尺寸为 0.125—0.177 mm，在底部打了一个ϕ1.5mm 的平底孔．图 4.3.45 所示是未经处理的信号波形，信号峰值与杂波峰值比为 8dB，经过平均后的波形如图4.3.46所示，信号峰值与杂波峰值比是 14dB．大约改善了 6dB．计算机对粗晶信号处理，除上述的频率平均外，还可以采用位置平均等．虽然上述举例是很初步的一个实验，但从中可以看出计算机作信号处理是有益处的．

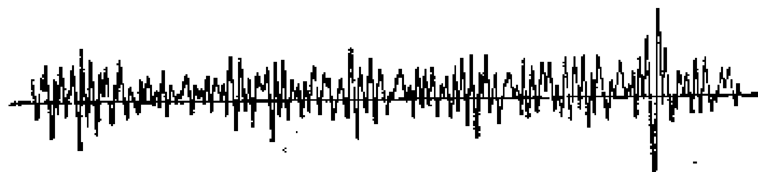


图4.3.44　频率平均处理的底部反射波形

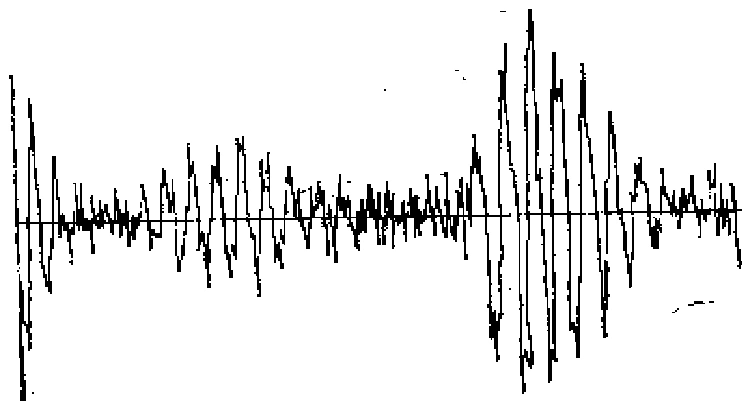


图4.3.45 ϕ1.5mm平底孔的回波波形

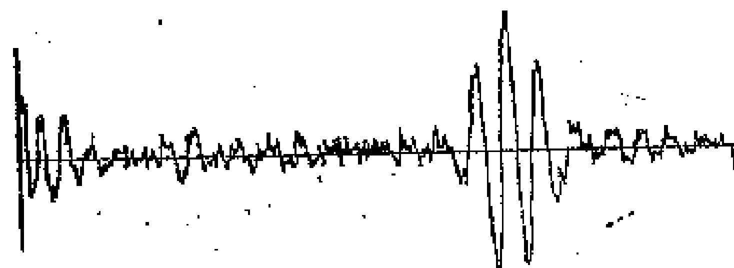


图4.3.46　平均后的回波波形

4.3.3　被动式声发射检测

（一）概述

材料在外部条件作用下，内部的缺陷由“相对静止状态”进入“变动状态”，或者材料由一种状态变到另一种状态，这种状态的变化改变了材料中能量分布，使一部分能量以弹性波形式释放出来，所以，由材料发射出来的每一个声信号都包含着反映材料内部结构或缺陷性质和状态变化的丰富信息．声发射检测就是接收这些声信号，加以处理、分析和研究，从而推断材料内部的状态变化．

声发射技术的最早应用是它在地震学研究中的作用．通过对地震波的分析，可推断地震源的位置、地壳运动和破裂的特征．声发射用于金属方面的科学研究是从1950年开始的．1964年研制成功实用的声发射监视系统，并用于纤维增强塑料制造的固体火箭发动机壳体的水压试验，并取得了成功．从此，材料研究者和工程技术人员对声发射技术产生了广泛的兴趣．在理论研究、应用研究和工业实用等三个方面进行了大量工作，取得了相当的进展．近十年来，声发射技术发展的特点突出表现在：(i)十分重视关于声发射源的研究．声发射作为动态检测，应当建立声发射信号与材料中缺陷性质的关系，建立声发射信号与缺陷有害度的关系，这就必须了解声发射源及从声发射源发出的信号的特征．(ii)重视各种材料声发射的研究．各种材料在不同实验条件下表现出的声发射特征差别很大，为了利用检测到的声发射信号推知材料内部的状态，就必须了解在各种条件下不同材料的声发射信号特征，以便利用这种特征进行材料和部件的检测．(iii)发展声发射源定位技术和评定缺陷有害度．源定位就是利用声发射信号的特点找出缺陷所在位置，这是声发射检测的重要内容之一，尤其对大型物件的现场动态监视更为重要．只有找出缺陷位置，才能评价它的有害度，也才能用其他无损检测方法去加以验证．(iv)发展新型仪器．近年来发展了不少多用途的通用声发射仪器和用于某一目的的专用声发射仪器，其主要特点是多功能、多参数、多通道、小型化、计算机高速处理数据和实时显示能力强．(v)扩大应用范围．声发射技术作为动态检测的手段弥补了其他一些常规无损检测方法的不足，成了保证产品安全性、可靠性的有效工具之一．

声发射检测技术具有以下几个特点：(i)声发射检测是一种动态的检测方法．只有材料或工件在受力达到一定应变或工件在使用过程中缺陷有发展或变化时才有声发射发生，也只有在这种特定条件下才能进行声发射检测．因此，声发射检测可以获得关于缺陷的动态信息，从而评价缺陷的严重性和危险性．根据缺陷的严重性可进行实时报警，还可以连续长期监视大型物件在使用过程中的安全性．正因如此，声发射检测法补充了其他一些常规无损检测法的不足．(ii)与主动式超声传播检测法相比，声发射检测法不需要移动探头，操作简便．它可以大面积检查和监视缺陷的活动情况，确定缺陷所在位置．由于声发射检测的灵敏度较高，在声发射法获知缺陷的动态信息之后，常常需要用其他无损检测法加以验证．(iii)除少数材料外，黑色金属、有色金属、复合材料、塑料、木材、岩石等各种材料都有声发射，声发射检测不受材料的限制．(iv)声发射检测中得到的是一些电信号．根据这些电信号判断构件内缺陷的性质及其变化发展和预测缺陷未来的可能状态是一件比较复杂的工作，为了对缺陷的动态特征作出正确的分析和判断，就需要深入了解被检测物件材料的声发射特性，或者用同类物件进行模拟性试验，以获得预备数据．鉴于声发射具有不可逆的特点，在进行声发射检测时要了解物件的受力历史．(v)已知塑性变形和裂纹扩展均产生声发射，然而有的试验中只需要知道裂纹扩展的声发射信号，希望将塑性变形的声发射信号分离出来，这是一个比较困难的问题．另一方面，虽然已有一些排除噪声的方法，但是，在检测的频率范围内有较强的噪声干扰，还会使声发射技术的应用受到限制．

(二)材料的声发射特性

声发射检测技术中的一个首要问题是材料声发射源的问题，也就是材料在外部应力作用下为什么会产生声发射，有哪些过程和机理．这是一个比较复杂且尚不清楚的问题．尽管如此，由于声发射技术的应用不断扩大，促使人们不得不去研究声发射源的问题，以便为声发射技术的发展建立必要的理论基础．人们对金

属材料已作过一些初步的探讨，根据其结果认为金属材料声发射的来源可能有以下几个方面：

(1)金属塑性变形和位错运动．在理想情况下，金属中的原子以一定次序有规则的排列．但实际金属中都存在着各种缺陷，其中位错就是由于原子错排了位置而形成的一种线缺陷．在外部应力作用下，位错在滑移面上运动使金属塑性变形．一个位错从低能的点阵位置运动到另一个位置，在新的点阵位置振动．计算表明，高速运动的位错发射高频率低幅度的声发射信号，而慢运动的位错则发射低频率高幅度的信号．一个位错发射出的信号能量太小，以至不能为高灵敏度的声发射仪所接收到．因此，设想许多位错或位错群同时运动，据估计大约 100 — 1000 个位错同时运动时声发射仪可收到连续型信号，几百个到几千个位错同时运动，声发射仪可收到突发型信号．位错运动产生声发射的另一种机构是位错的淹没和塞积位错的解脱．一个位错移至金属表面，产生一个原子间距的滑移台阶，位错消失；在同一个滑移面上正位错和负位错相遇而抵消，这两个过程均称为位错的淹没，位错淹没产生声发射．在同一个滑移面上，许多位错移至金属表面形成滑移带，可产生突发型声发射信号．在滑移面上运动的位错碰到障碍物，如硬的第二相质点和晶粒边界等，位错可能被塞积．几个位错塞积在一起又可能冲破障碍而继续向前运动，这个过程产生突发型声发射．一个位错获得能量后可能产生新的位错，这种位错增殖过程也会出现声发射．孪生变形是金属变形的一种特殊方式，它以滑移面为镜面，以原子排列成镜面对称的方式变形．这种变形速度极高，成为强烈的声发射源．

(2)马氏体相变．钢和合金从高温冷却下来，内部发生组织结构转变．例如，碳钢从高温快冷下来，过冷奥氏体转变为马氏体组织称为马氏体相变．这种相变不以原子扩散的方式进行，而是以剪切变形的方式实现，以极高的速度形成片状或针状的马氏体新相．这种以切变方式形成新相，可在10^{-7}s的极短时间内产生高的位错密度．这种高速相变过程产生很强的声发射，有时人耳都可

直接听见.

(3)裂纹的形成和扩展. 裂纹各种形式的扩展是结构件破坏的基本原因. 裂纹产生声发射主要由裂纹形成、裂纹尖端的塑性形变和裂纹扩展三个过程组成的. 这三个过程互相联系交替进行. 塑性材料受到应力作用时,由于材料中第二相硬质点与基体材料变形的不匹配,往往在第二相硬质点与基体的界面上形成微孔,当外加应力增大时,微孔长大,相邻微孔连接在一起形成裂纹和裂纹扩展. 脆性材料以位错塞积的方式形成微裂纹,一旦微裂纹形成,裂纹尖端的塑性变形较小,裂纹扩展较快,裂纹每向前扩展一步,便有突发型信号出现. 可见塑性材料和脆性材料裂纹扩展时的声发射信号是不同的. 如图 4.3.47 所示,塑性材料发射的次数多,每次发射的强度小;脆性材料发射的频率低,每次发射的强度大. 随着应力增大,塑性材料的声发射以小台阶缓慢上升,脆性材料则以大台阶迅速上升.

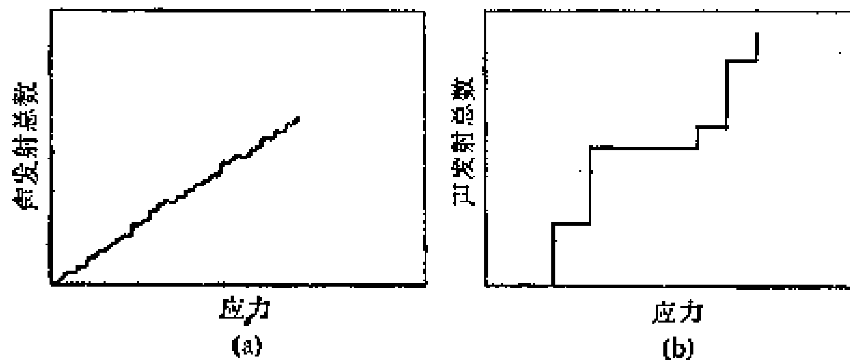


图4.3.47 裂纹扩展的声发射

(a)塑性材料; (b)脆性材料

(4)磁性效应. 铁磁性材料在磁场作用下磁畴壁的运动产生声发射,磁畴壁的运动受外载荷和内应力的影响,因此,由磁畴壁运动产生的声发射也受应力控制. 近年来,这方面的研究表明,磁效应的声发射可用来测量铁磁性材料的残余应力和研究磁性材料的其它特性.

产生声发射的单个事件的持续时间很短,通常在10^{-4}到10^{-8}s. 事件的持续时间愈短,其频率分量愈高. 由于发声的微观过程不

同，产生每一个声发射事件的阶跃时间也不同。因此，一般说来，声发射信号具有很宽的频谱。声发射信号在材料和工件中传播时，高频成分衰减比较大，其幅度也随着传播距离增大而下降，而低频成分又与机械噪声重叠在一起，不易分离。声发射信号是十分复杂的，现在还不能测出一个真实的声发射原信号。通常的声发射检测都选择某一频率范围进行，这一频率范围称为声发射检测"频率窗口"。频率窗口的选择取决于检测对象材料的声发射信号频谱和背景噪声的频谱比较，找出它们相差大的频段作为检测的窗口。图 4.3.48 所示为不同材料和研究领域常用的声发射检测的频率范围。

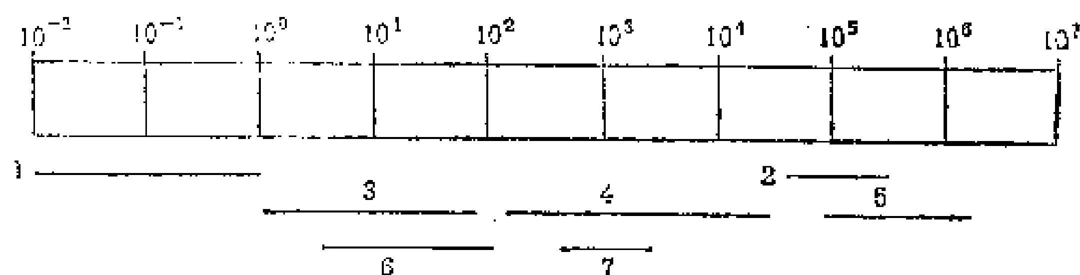


图4.3.48 声发射检测的频率范围

1.远震研究；2.地质材料有限声发射研究；3.地震勘探；
4.最近地质材料声发射实验；5.金属材料声发射研究；
6.微震研究；7.地震材料早期声发射研究

声发射检测到的信号，实际上是声发射源发射出的纵波、横波以及它们传播在界面上产生波型转换后的一系列波的总和，如图

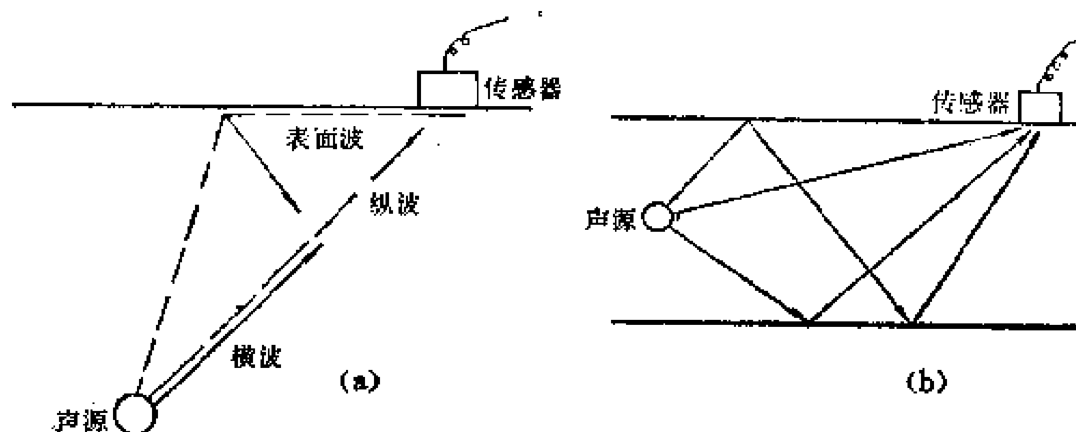


图4.3.49 声发射信号的传播

(a)半无限大固体内声发射波的传播；(b)循轨波的传播情况

4.3.49 所示. 实际测得的波形、频率分量、幅度大小都与试样大小、形状、表面状态、材料的组织特性及换能器的特性和放置位置等有关. 目前,声发射信号在介质中的传播特性还研究的很不够.

目前,所采用的检测手段,测得的声发射信号基本上有两种类型,即上面已经提到的连续型和突发型. 如图 4.3.50 所示.

连续型声发射信号幅度低而持续时间长,检测器通常放大 10^4 倍后才能观察到这种信号. 而突发型的声发射信号幅度大而持续时间短. 在实际检测中上述两种类型的声发射信号不是绝对的,有时还会出现两种类型信号同时存在.

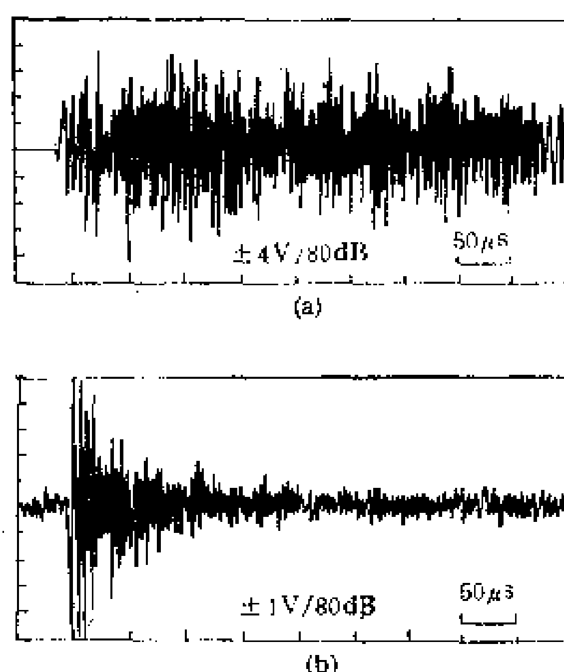


图4.3.50 两种类型的声发射信号

(a)连续型; (b)突发型

不同材料的声发射特性有很大差异,这种差异的完整规律和科学解释尚需进一步研究. 通常影响信号强度的因素主要来自两个方面. 一方面是外部因素,这主要是试样形状、变形速度、试验环境条件、载荷历史和加载方式等一些因素. 另一方面是内部因素,这主要是指试样内部晶体结构、均匀性、组织结构和试样历史等因素.

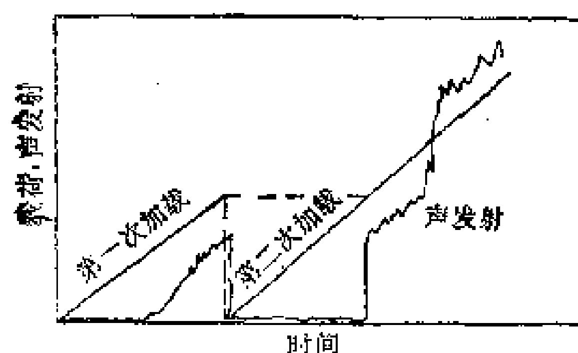


图4.3.51 声发射的不可逆效应

材料声发射还有一个重要的特性，这就是某些声发射过程是不可逆的,通常称为凯塞效应. 比如,材料的塑性变形引起的声发射就是不可逆的,如图4.3.51所示. 不可逆效应是由于材料变形和裂纹扩展的不可逆所决定

的．如果第二次加载的方式或方向与第一次加载不同，则不可逆效应就不存在．新近研究表明，记忆合金相变过程的声发射也是可逆的．

（三）声发射检测技术

声发射检测技术，是解决如何利用材料声发射特性实现其材料的检测问题，也即解决对声发射信号如何进行检测、处理和分析的问题．

我们知道，材料的声发射的信号是一个不规则的复杂信号，选取一些特征参数，正确地记录描述这些信号，是声发射检测技术中遇到的第一个重要问题．正如前面已经提到的，至今尚不能直接测到从声发射源发出的原始波形，声发射信号的测量还只能以换能器的输出为基础．目前对声发射信号的处理和表征方法也没有统一的物理量，多数都是由实验者根据拥有的仪器设备和感兴趣的参数进行测试，但是，有些参数几乎是所有声发射仪器都具备的．这些参数主要有计数和计数率、幅度和幅度分布、能量和能量率、频谱和波，以及定位时的时差等．

计数和计数率：材料每释放一次能量，产生一个声发射信号，被窄带换能器接收输出一个声发射脉冲，称为一个声发射事件．计数事件数，是取一个声发射脉冲经过包络检波，超过预选门槛电压的持续时间并加以适当延长作为一个事件．事件计数表示了声发射发生的次数．除计数事件数之外，还有一种振铃计数，它是取超过门槛电压的包络内有多少个振铃为计数的．振铃计数在一定程度上反映了声发射信号的幅度．振铃计数特别是对连续型信号的测量更为有用，而事件计数主要用来测量突发型信号．有的时候采用总计数和计数率来描述一个试验过程的声发射特性．总计数就是从试验开始到某一特定时间（如试验结束）总的振铃数或事件数，分别称为振铃总计数和事件总计数．计数率定义为单位时间（如 1 s）内振铃数或事件数，分别称为振铃计数率和事件计数率．

幅度和幅度分布：声发射信号的幅度通常取信号的峰值或有

效值，测试这两个参数特别对连续型声发射是十分重要的．幅度分布是按信号峰值幅度大小不同的范围，分别对声发射信号进行事件计数．可以是事件计数分级幅度分布也可以是事件累计幅度分布．

能量和能量率：声发射信号幅度和幅度分布实际上是与能量有关的参数．此外还有用事件包络、时间长短和事件包络面积作为声发射事件与能量有关的参数．能量测量也分能量率和总能量两种，能量率表示单位时间内的声发射信号的能量，总能量表示从试验开始到某一特定时间的声发射的总能量．

频谱：声发射信号的频谱始终是人们十分重视的一个描述声发射信号的参数．通常可以用频谱仪直接记录，也可以把波形通过采样记录下来再利用计算机作频谱分析．

声发射信号的另一个重要特点是，噪声背景复杂，信号本身弱．如何排除噪声干扰测量这些较弱的声发射信号，是声发射技术遇到的另一个突出的重要问题．声发射技术能够由实验室走向现场检测，其基本原因是有了一些排除噪声的有效方法．到目前为止，这些方法主要有幅度鉴别、频率鉴别和空间滤波三种．幅度鉴别，是在选取的频率窗口内排除一些较声发射信号弱的一切干扰噪声．频率鉴别，是通过选取频率窗口测量，排除了不在这个频段内的一切干扰噪声，这些都是容易理解的．下面着重介绍一下空间滤波的方法．

空间滤波是根据信号与噪声发生源的空间位置关系采取的排除噪声的方法．目前在声发射技术中主要有三种空间滤波方法．

(i)主副鉴别：主-副鉴别是利用信号到达多个换能器的时间关系来鉴别噪声的，其原理如图 4.3.52 所示．把检测的换能器通道分为两组，一组为主换能器，另一组为副换能器．将一个以上的主换能器布置在可能发生声发射的区域附近，在这个区域外面布置一个或几个副换能器．从这个区域以外来的噪声信号到达主换能器之前被副换能器接收，把打开的门关闭，此后主换能器就接收不到这个信号．如果是检测区内来的声发射信号，在门打

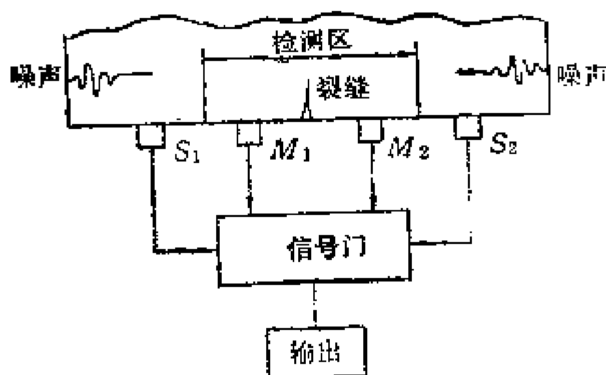


图4.3.52　主-副鉴别的工作原理

M_1、M_2——主传感器；

S_1、S_2——副传感器

开期间先被主换能器所接收．这样就可以排除检测区域以外的任何噪声干扰．

(ii)符合鉴别：符合鉴别是利用信号到达时间达到鉴别排除噪声的另一种方法，其原理如图4.3.53所示．将两个换能器配置在离声发射源等距离的两个点上，如果在预定的时间内，两个换能器同时测到一个信号，通过信号门被检测到；如果两个换能器不能在规定的时间内同时检测到一个信号，则门被关闭．这种方法可以排除检测区以外的任何噪声干扰．

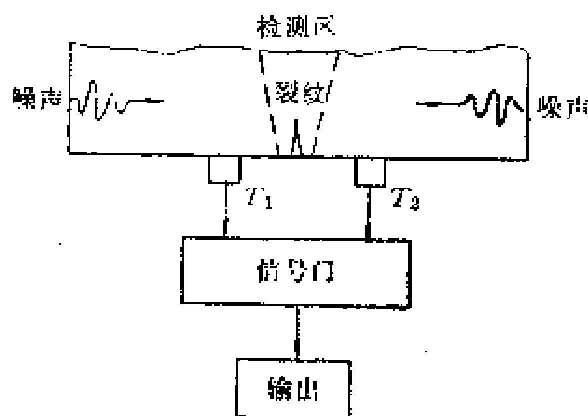


图4.3.53　符合鉴别的工作原理

T_1、T_2——传感器

(iii)前沿鉴别：前沿鉴别又称上升时间鉴别，它不同于主副鉴别和符合鉴别，它是以一个换能器获得的信号为基础的空间滤波器．声发射信号在介质中传播，由于波的扩散和散射，使信号的前沿变得平缓，传播距离越远，前沿变得越平缓．取声发射信号的包络，用上下两个电槛门截取的信号时间来表示其前沿的大小．选取一定的前沿时间差作为接收信号的门，这样便可以排除大于预定前沿时差的一切噪声干扰，也即排除了大于一定距离以外的噪声干扰．其原理如图4.3.54所示．

实际上每种空间滤波技术都有一定局限性．由声发射源发出的弹性波的能量分布是不均匀的，在每个声发射信号的强度不同

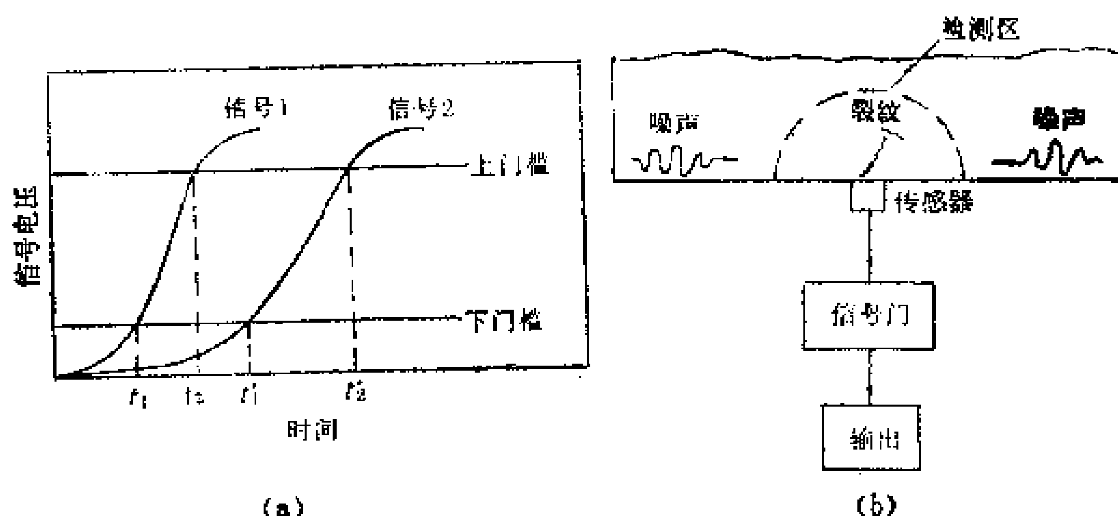


图4.3.54 前沿鉴别原理

(a)两个信号上升时间的差别； (b)前沿鉴别的工作原理

的情况下，空间滤波器的分辨能力下降. 另一方面，在有外部噪声时，信号门被关，这就会使真正的信号被漏检. 尤其是当外部噪声连续时，信号门完全被关闭，这就不可能检测到声发射信号，因此，还必须研究新的排除噪声的方法. 近来，又研究出两种方法，一种称为检测定位法，另一种称为分区标定法. 这两种方法均以换能器组成的定位阵列中，根据各换能器接收到信号到达的时差，依靠计算机处理，这两种新方法已在新的声发射仪器中被采用.

关于声发射仪器和定位等问题，这里不作介绍. 下面扼要介绍一下声发射技术的应用.

(四)声发射技术的应用

声发射技术在实际检测中的应用是多方面的. 主要有在材料研究中的应用，在分析断裂中的应用和评价构件的结构完整性及运行中的监测的应用等.

声发射技术在材料研究中的应用，包括用声发射研究塑性变形机理，热处理过程的相变，材料在高温的氧化，合金熔化和凝固过程，检测氧化层的厚度，检测残余应力，推断材料受力历史，测量火药柱的燃烧速度以及评价材料的脆性、断裂过程的质量控制等各个方面. 下面以塑性形变的声发射和马氏体相变的检测作为例子略作介绍.

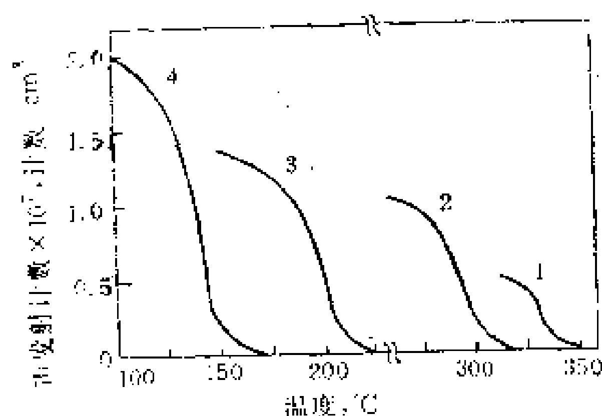
金属材料塑性形变的声发射可以分为如表4.3.5所示的五种类型. 表中还同时列出声发射的来源和研究过的材料.

表4.3.5 金属塑性变形的声发射图形

类型		图形	声发射类型	声发射来源	材料
1	1a	载荷,声发射；应变；$\sigma-\varepsilon$；AE；1a	连续	变形带形成和传播	碳钢、工业纯钛
	1b		连续＋突发	珠光体中碳化物层断裂	碳钢
2	2a	载荷,声发射；应变；$\sigma-\varepsilon$；AE	连续	均匀变形	面心立方金属、高温下的碳钢
	2b		突发	孪晶	锡、锌
3		载荷,声发射；应变；$\sigma-\varepsilon$；AE	连续	类型2＋变形带形成和传播	黄铜、铝镁合金、铝锌镁合金、高温下的碳钢、镍合金
4	4a	载荷,声发射；应变；$\sigma-\varepsilon$；AE	连续	类型2＋微观不均匀变形	铝铜镁和铝锌镁铜合金
	4b			类型2＋孪晶	钛和钛合金
5		载荷,声发射；应变；$\sigma-\varepsilon$；AE		滑移距离极短	细晶粒钢，冷加工金属，奥氏体钢

马氏体相变是一种声发射源，可以用声发射来检测马氏体相变. 图4.3.55所示为不同含碳量的四种钢马氏体相变的声发射.

声发射用于断裂分析中，主要有断裂韧性试验的声发射分析，



1—4330钢,0.32%C;　3—4360钢,0.64%C;
2—4340钢,0.41%C;　4—4380钢,0.83%C;

图4.3.55　不同含碳量的四种钢马氏体相变时的声发射

检测疲劳裂纹扩展,检测应力腐蚀和氢脆裂纹,分析复合材料的断裂方式等.

声发射用于评价构件的结构完整性中,主要有控制焊接质量,评价压力容器的安全性,飞行监视,转动机械的监视,原子反应堆运行的监视等等.

4.3.4　振动检测法

(一)振动检测法的基本原理

振动检测法是利用被检样品的振动特性,实现无损检测的一种方法.在日常生活中,就常应用这类方法.比如一个瓷碗,当它完好无缺时,敲击声是清脆而响亮的,当它有裂纹时,敲击声是嘶哑的.再比如,当两块板粘在一起时,用手或其它物体敲击,从发出的声音就可或多或少地鉴别粘接的好坏.这就是人们在长期社会实践中早已发现和采用的一种振动检测法.

为了提高振动检测的准确度,就必须分析振动状态与样品质量或粘接状态的关系.我们知道,一个物体的振动状态不同,最直观的反映是发出的声音不同,在物理上这是由于它们振动的强弱(幅度)、振动的快慢(频率),振动的持续时间(损耗),单一振动(单频)和复合振动(多频)等的不同.这些物理量与振动体的材料、结构等等性能是直接相关的.作为一个振动系统,在单一频率的情况下,机械振动的基本方程为

$$F = Z_M \dot{\xi}, \qquad (4.3.60)$$

其中F为机械振动的策动力,$\dot{\xi}$为质点的振动速度,z_M为等效力阻抗.z_M的一般表达式为

$$z_M = j\omega M + \frac{1}{j\omega C_M} + R_M = jx + R_M, \qquad (4.3.61)$$

式中M为等效质量，C_M为等效柔顺性，R_M为等效损耗阻．这些都直接由振动体材料与结构决定，其中包括粘接体的粘接状态．同一种粘接样品，如果粘接状态不同，z_M会不同．通过对z_M的测量，或者在F一定下，通过对ξ的测量，就可以实现样品质量或粘接状态的检测，这就是振动检测法的基本原理．

力阻抗是与振动方式有关的，而物体可选取的振动方式很多．测量质点振动速度和力阻抗的方法也很多，所以实现振动检测的具体方法可有很多种．目前应用较多的有敲击法．阻尼法、共振法和声阻法等．敲击法中，除上述举例敲击后听声音的简单方法之外，有自它而发展起来的声撞击技术．阻尼法又称自由振动法，有通过样品在激振下振动区域大小的测量，来决定振动传播损耗的阻尼法；也有通过激振下自由振动持续时间的测量，来决定力阻抗损耗阻R_M的阻尼法．共振法是利用电声换能器激发被检样品共振，又利用换能器测量这个共振频率(即z_M中$X=0$的频率)，来实现检测的方法．该方法多用于测量材料的厚度，但有时也用于粘接的检验和夹层伤的探测．声阻法检测的原理是：用电声换能器(包含换能器的结构)激发样品振动，而反映样品振动特性的力阻抗反作用于换能器，构成换能器的负载；当负载有变化时，换能器的某些特性也随着变化，这样通过对换能器这些特性的测量，便可以鉴别样品的质量．测量换能器的不同特性，又有振幅法、频率法和相位法等具体方法．声阻法主要是用于对粘接质量的检验，有时也可用来探测单一材料的近表面缺陷和某些力学参数．如果将共振法与声阻法进行比较，可以发现，它们都是通过电声换能器激发样品振动，又都是通过换能器测量样品振动的阻抗特性；所不同的是：共振法只测量样品的共振频率(即$X=0$的阻抗特性)，而这时换能器一般是在非共振状态下工作的．声阻法则不受这个限制，换能器与样品可以一起共振，也可以是各自共振或都不共振，因而所测量的可以是材料力阻抗z_M的全部特性．

所以共振法可以看作是声阻法中的一个特例．本书只对声阻法作些介绍．

(二)双片声阻法和在粘接检测中的应用

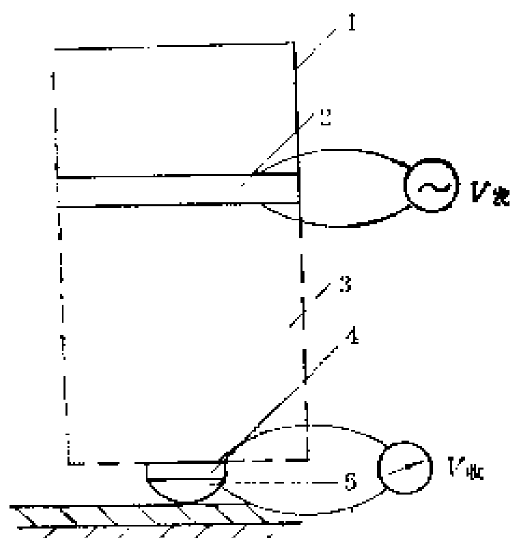


图4.3.56 换能器结构

双片声阻法是声阻法中应用于粘接检测的主要方法之一．双片声阻法所采用的是具有两块压电片的复合式激振和测振装置．检测器结构如图4.3.56所示．

图中1为背复负载块，2与4各为压电片，3为辐射杆，它可以是等截面的直杆，或变截面的圆锥杆，也可以是变截面阶跃杆等等，5为检测触头，在一定静压力下和被检样品作点接触．

在主要由压电片2组成的换能部分上，外加电压$V_{发}$通过触头5，使被检样品激发弯曲振动，这一部分称为激振换能器．主要由压电片4组成的换能部分，以触头5为阻抗转移器来测量被检样品的力阻抗，输出电信号$V_{收}$．这部分称作测振换能器．这两个换能器处在同一个结构内同时工作，又相互影响；可以说，双片声阻法

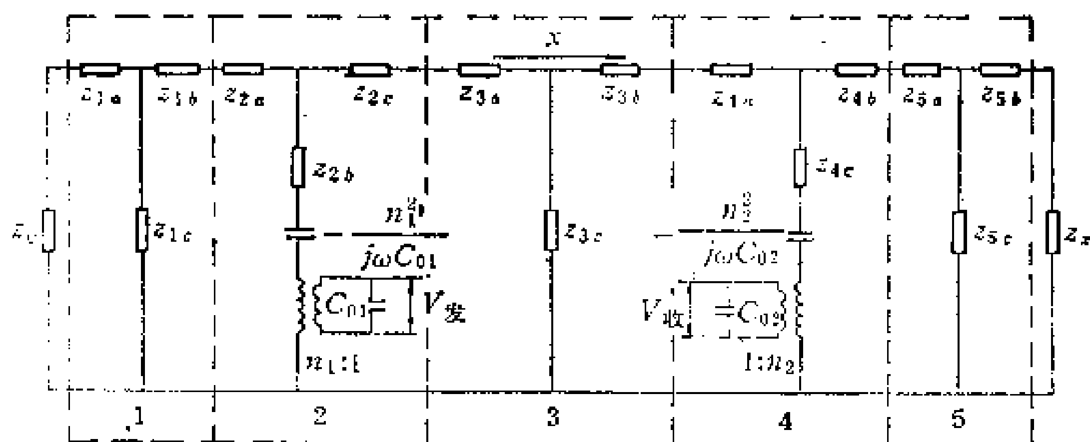


图4.3.57 换能器全等效线路图

检测器是由两个夹心式换能器联合组成的复合式换能器.

图 4.3.56 所示检测器的通用等效电路如图 4.3.57 所示.

辐射杆为等截面时,图中各 z 在考虑损耗时为

$$z_{ia}=z_{ib}=\rho_i v_i s_i \operatorname{th}\left(\frac{k_i l_i}{2}\right),\quad z_{ic}=\rho_i v_i s_i/\operatorname{sh}(k_i' l_i),\tag{4.3.62}$$

$$k_i'=k_i\left(j+\frac{1}{2Q_{Mi}}\right).\tag{4.3.63}$$

其中,ρ_i、v_i、s_i 分别为检测器各部分的密度、声速和截面积,l_i 为长度或厚度,k_i 为波数,Q_{Mi} 为机械品质因素,C_{0i} 为压电片箝制静电容,h_i 为压电片机电转换系数,ω 为激励源角频率,Z_x 为被测胶接构件的振动力阻抗. 可以推导出

$$V_{收}=\frac{n_1 n_2 V_{发}}{j\omega C_{02}[a_3 z_2+(a_1+a_2+a_3)z_1]}=|V|e^{j\varphi},\tag{4.3.64}$$

其中,

$a_1=1+z_6/z_7$, $a_2=(a_1 z_5+z_6)/z_4$,

$a_3=[(a_1+a_2)z_3+a_2 z_4]/z_2$,

$z_1=z_{2c}-n_1^2/j\omega c_{01}$, $z_2=z_{1a}+z_{1c}+z_{1a}\cdot z_{1c}/(z_{1a}+z_{1a})$,

$z_3=z_{2a}+z_{3a}$, $z_4=z_{3c}$, $z_5=z_{3a}+z_{4a}$, $z_6=z_{4c}$,

$z_7=z_{4a}+2z_{5a}+z_x$ (取 $z_{5c}\to\infty$,因为 $l_5\ll\lambda$,λ 为波长).

在固定检测条件下,通过 $V_{收}$ 的测量便可以测出 z_x的变化,而z_x是与粘接状态有关的,从而可以达到对粘接质量检测的目的.

z_x 称检测阻抗,对图 4.3.56 所示半球形触头的检测器,Z_x 是被检样品的力阻抗 z_H 和触头与样品间点接触的弹性抗 x_K 的并联阻抗

$$z_x=\frac{z_H x_K}{z_H+x_K},\tag{4.3.65}$$

式中 $$x_K=\frac{1}{j\omega C_K},\quad z_H=j\omega M_H+\frac{1}{j\omega C_H}+R_H,$$

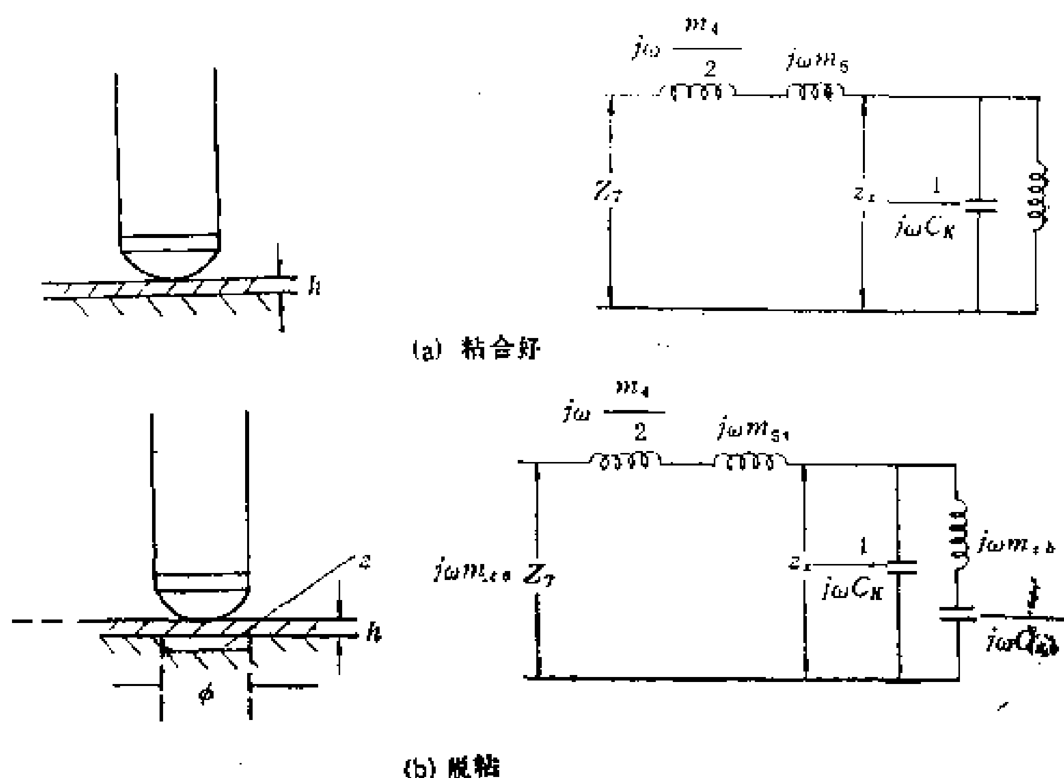
其中 M_H、C_H 和 R_H 分别为被检样品振动时的等效质量、柔顺性和损耗阻. C_K 称接触柔顺性,物理上;C_K 的出现是由于在实际检测

中触头压在样品上引起微小形变，从而产生柔顺性．利用两球形体之间弹性挤压的一般理论，可以得到

$$C_K=\frac{2}{3}\left\{\frac{3}{4}\left[\frac{1-\sigma_1^2}{yg_1}+\frac{1-\sigma_2^2}{yg^2}\right]^2\frac{R_1+R_2}{R_1R_2}\right\}^{1/3}F_0^{-1/3}. \qquad (4.3.66)$$

式中 R_1、σ_1、Yg_1 为触头的曲率半径、泊松比和动态杨氏模量；R_2、σ_2、yg^2 为被检材料的曲率半径、泊松比和动态杨氏模量；F_0 为触头垂直压于样品的静压力．

检测阻抗 z_x 随粘接状态的变化是复杂的，对于粘好与完全脱粘两个简单的状态，z_x可表示为图4.3.58所示．图中的等效质量、柔顺性可以通过理论计算，也可由实验测出，接触柔顺性也可以通过实验测出．从这两种状态可得如图 4.3.59 所示的频率特性曲线．从图可见，在



(a) 粘合好

(b) 脱粘

图4.3.58　检测阻抗等效图

选取适当的固定频率下(比如图中f_{pa})，$|V_{收}|$在粘好和脱粘两种不同粘接状态下，有不同数值．通过对$|V_{收}|$的测量来检测粘接质量，这是声阻法中用得最多的振幅法．从图中还可见，不同的粘接状

态，$|V_{收}|$的极大值和极小值频率也不同．通过对$|V_{收}|$的极值频率的测量，也可进行粘接检测，这是声阻法中的频率法．此外，在极值频率下，$V_{收}$的相角 φ 也有较大的变化，通过固定极值频率下测量相角 φ 达到检测的目的，这是声阻法中的相位法．

在实际工程中，还可以通过对触头或辐射杆的最优设计，使两种粘接状态的频响曲线 $f_{p\alpha} \doteq f_{o\beta}$ 或 $f_{p\beta} \doteq f_{o\alpha}$ 获取最大的检测灵敏度．

双片声阻法还可以采用平面接触液体耦合的方式，检验多层胶接的结构，如图 4.3.60 所示．

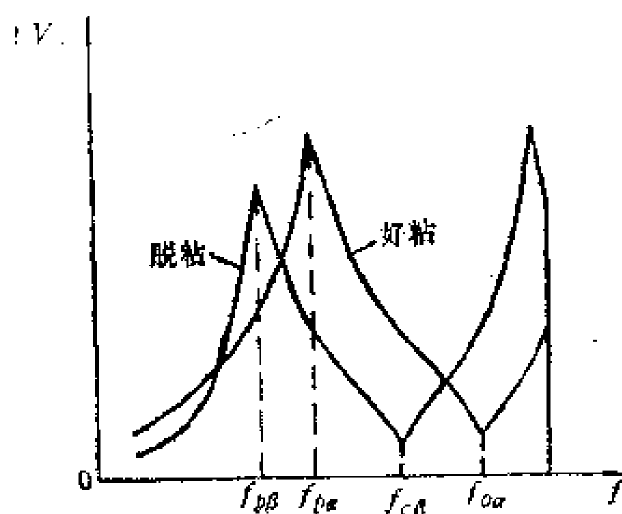


图4.3.59　好粘与脱粘频响曲线

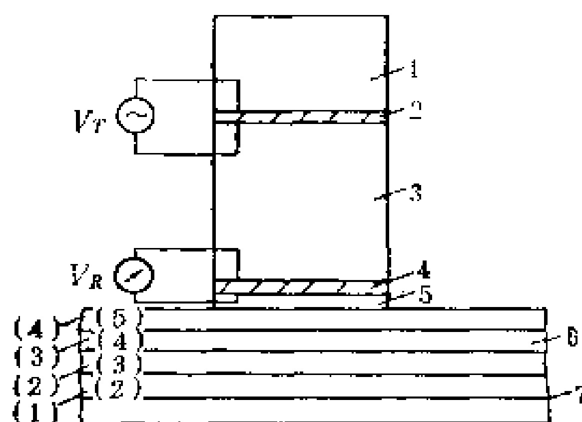


图4.3.60　多层结构检测

多层构件的检测阻抗，在忽略板层的柔顺性和胶层的质量时，可表

示为图4.3.61，得检测阻抗 z_{xn} 为

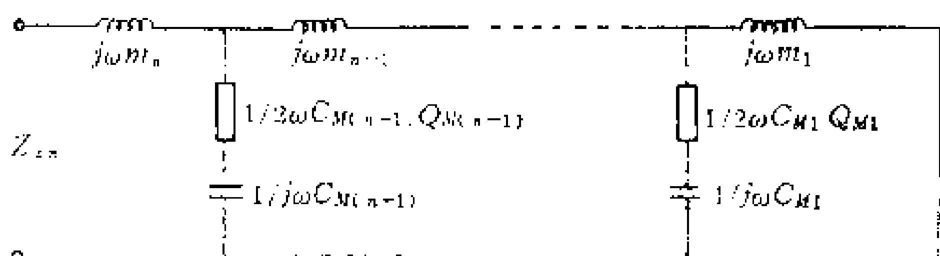


图4.3.61 检测阻抗等效电路

$$z_{xn}=j\omega M_n+\frac{z_{x(n-1)}\cdot 2\omega Q_{M(n-1)}}{2\omega Q_{M(n-1)}C_{M(n-1)}+j\omega C_{M(n-1)}}$$

$$\times\frac{C_{M(n-1)}+j\omega C_{M(n-1)})}{(z_{x(n-1)}\cdot 2\omega Q_{M(n-1)}C_{M(n-1)}+1)},\qquad (4.3.67)$$

$$(n=2,3,4,5)$$

$$z_{x1}=j\omega M_1.$$

将相应于脱粘层处于不同的层次的 z_x 代人前面的理论公式计算出 $|V_{收}|$ 值，所得结果如图 4.3.62 所示，图中(b)为实验结果．图中曲线 4.3.2.1 分别为大于检测器面积的脱粘伤处在第四、三、二、一胶层的结果．曲线 0 为无脱粘时全粘好结果．

(三)单片声阻法和在粘接检测中的应用

单片声阻法是指通常使用的福克(Fokker)仪方法，是用来检测胶层强度的一种重要方法．它的检测示意图如图4.3.63所示．

单片声阻法只能检测胶层的内聚强度，为检测胶层的拉伸强度，激发样品主要作纵振动，同时测量换能器共振时的幅值大小(B标度)，这实际上是声阻法中的振幅法．对剪切强度的检验，主要是通过激发样品作弯曲振动，对换能器的共振基频进行测量(A标度)，这实际上是声阻法中的频率法．和双片声阻法相比，本方法所用检测器是由单一压电片组成的，在检测中同时作激振和测量，因此叫它“单片声阻法”．

单片声阻法对胶接强度检测的实际应用，是通过对换能器特性的测量来测量样品力阻抗的变化；在力阻抗诸因素中胶层柔顺

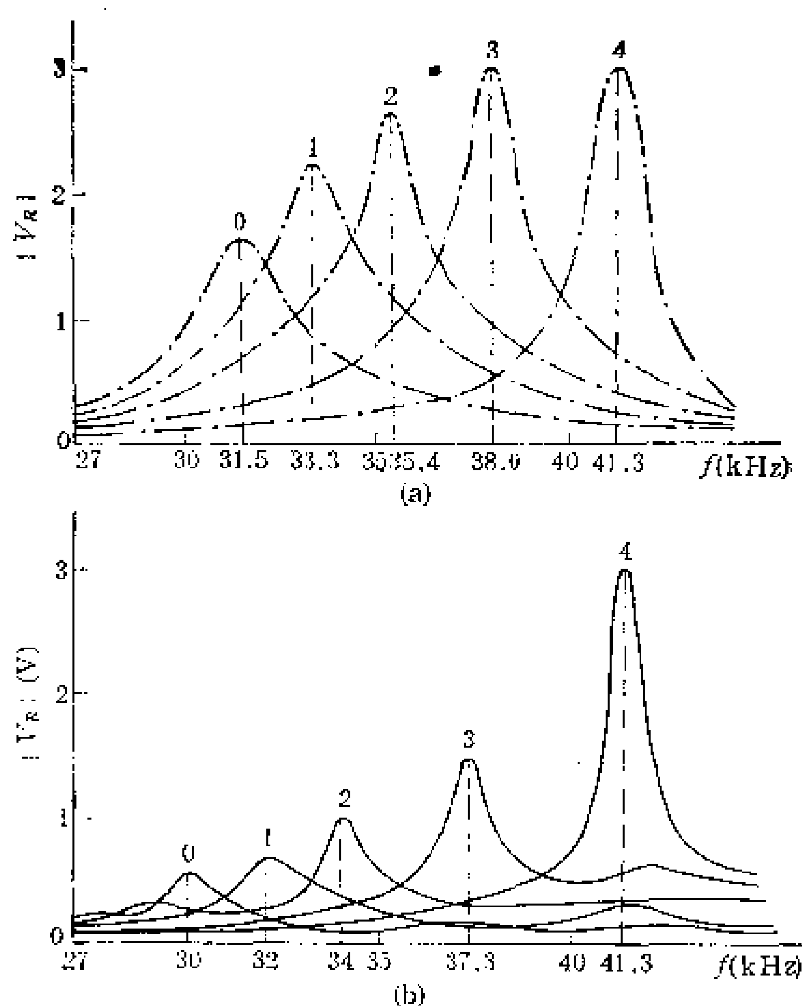


图4.3.62　多层检测的理论结果和实验结果

(a)计算结果　　(b)实验结果

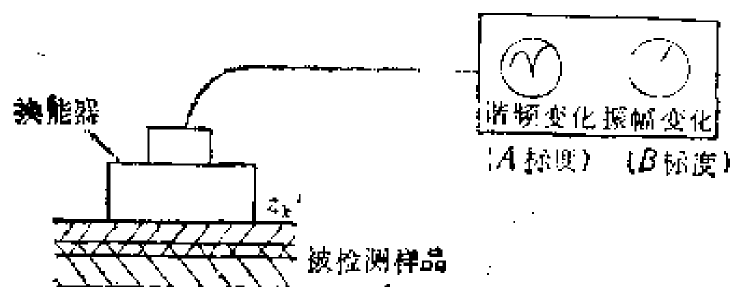


图4.3.63　检测示意图

性的变化是主要的，因此换能器特性的变化，主要反映在胶层柔顺性的变化。但是我们知道，胶层柔顺性主要是由胶层的厚度和杨氏模量所决定的，它与断裂强度似乎并无直接关系．但大量实践

证明，对于用同一种胶剂和同一种工艺胶接的同一种产品，本方法的测试结果与胶接强度存在着某种统计关系. 实际工作中，通过大量的破坏性实验，绘制出换能器某些特性与胶接强度之间的统计关系曲线，作为校准曲线，来实现强度的检测. 对于不同的胶剂或不同的工艺或不同的结构的产品则需要绘制出它们各自的统计强度曲线.

单片声阻法所用的换能器是一个轴向极化的压电陶瓷短圆柱，在检测剪切强度的应用中，圆柱的高度与半径比值，一般在 0.8—1.8 范围. 这种短圆柱的振动情况是比较复杂的，但可以用我们在前面讲到的二维等效电路来计算. 早先我们作过近似计算，也取得比较满意的结果.

我们的简化模型是：

(i) 换能器的振动是压电圆柱体纵向振动和径向振动的耦合振动，换能器上下端面作弯曲振动；

(ii) 在换能器及负载(待测样品)之间，耦合剂(一般用油)只传递耦合振动的纵向分量，而不传递耦合振动的径向分量；

(iii) 样品在与换能器接触面上，受到不均匀的法向作用力，样品受激作弯曲振动；

(iv) 样品的振动对换能器振动的纵向分量构成负载，对换能器的径向分量则影响很小；

(v) 对换能器的纵向振动可用一维的梅森等效电路进行处理.

根据上述简化模型，可以用梅森等效电路求出动生阻抗 z 为，

$$z = -\frac{n^2}{j\omega c_0} + \frac{\rho v s}{j\sin\left(\frac{\omega}{v}l\right)} + \frac{j\rho v s \operatorname{tg}\left(\frac{\omega}{v}l\right)\left[j\rho v s \operatorname{tg}\left(\frac{\omega}{2v}l\right) + z_s\right]}{j2\rho v s \operatorname{tg}\left(\frac{\omega}{2v}l\right) + z_s}$$

(4.3.68)

$z=0$ 时，共振频率 ω_0 满足方程

$$\left[\frac{1-2\dfrac{k_{33}^2}{\left(\dfrac{\omega_0}{v}l\right)}\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\omega_0 l}{2v}\right)}{1-\dfrac{k_{33}^2}{\left(\dfrac{\omega_0}{v}l\right)}\operatorname{tg}\left(\dfrac{\omega_0}{v}l\right)}\right]\operatorname{tg}\left(\frac{\omega_0}{v}l\right)=-\frac{X_x}{\rho v s}, \qquad (4.3.69)$$

X_x 为 z_x 的抗，k_{33} 为纵振动机电耦合系数，v 为声速.

如果胶粘接样品上下板的强度大于胶层的强度，且胶层非常薄以至可以忽略其质量时，若忽略所有损耗，则样品作弯曲振动可简化为图4.3.64(a)，图中(b)为振动阻抗的等效电路图.

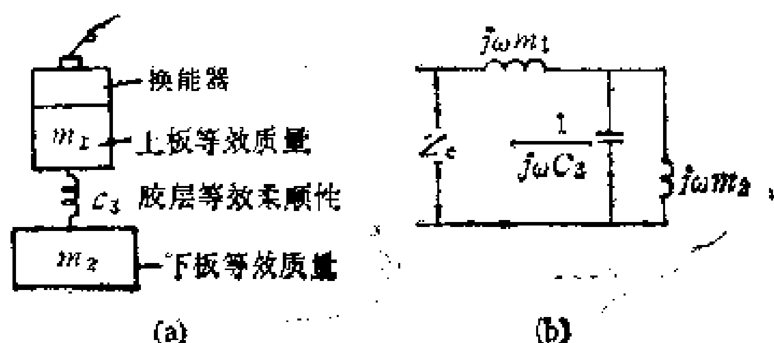


图4.3.64 负载阻抗等效图

(a)振动阻抗； (b)阻抗的等效电路

由图(b)可求出

$$z_x=j\omega\left(m_1+\frac{m_2}{1-\omega^2 m_2 c_3}\right), \quad X_x=\omega\left(m_1+\frac{m_2}{1-\omega^2 m_2 c_3}\right). \qquad (4.3.70)$$

将 X_x 代入共振频率方程，可得

$$\frac{1}{\omega_1\rho v\left[\dfrac{1-2\dfrac{k_{33}^2}{\left(\dfrac{l}{v}\omega_1 U_1^{-1/2}\right)}\operatorname{ctg}\left(\dfrac{l}{2v}\omega_1 U_1^{-1/2}\right)}{1-\dfrac{k_{33}^2}{\left(\dfrac{l}{v}\omega_1 U_1^{-1/2}\right)}\operatorname{tg}\left(\dfrac{l}{v}\omega_1 U_1^{-1/2}\right)}\right]\operatorname{tg}\left(\dfrac{l}{v}\omega_1 U_1^{-1/2}\right)+\omega_1^2 m_1}$$

$$+\frac{1}{\omega^2 m_2}-c_3=0.$$

(4.3.71)

式中$U_1=[(p^2+1)-((p^2+1)^2-4p^2(1-M^2))^{1/2}]/2(1-M^2)$,

$p=\frac{\omega_r}{\omega_L}$, $M=\left(\frac{2\sigma}{1-\sigma}\right)^{1/2}$, ω_r,ω_L为纯径向和纯纵向共振频率,σ为泊松比.

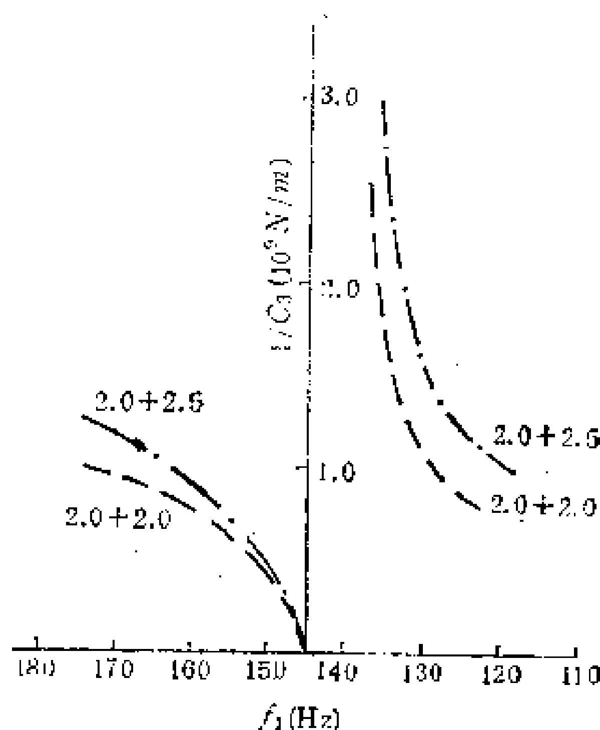


图4.3.65 $1/c_3$与f_1的关系曲线

利用上式在取定m_1和m_2时,可以求出共振基频f_1与胶层柔顺性倒数$1/c_3$的关系曲线.如果取上下板均为2.0 mm厚的铝板和上下板分别为2.0 mm和2.5 mm铝板两个胶粘接样品,并且m_1、m_2分别取为探头下方对应的铝板质量,则得f_1与$1/c$的曲线,如图4.3.65所示.

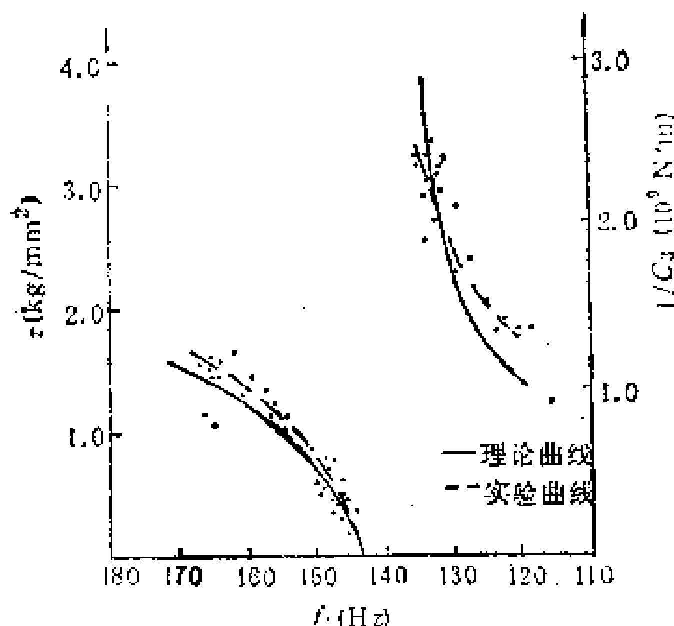


图4.3.66 强度与频率关系曲线

如果假定剪切断裂强度与$1/c_3$成正比,我们将$1/c_3$乘一个常数使它等效于强度,并与实验曲线作对照,所得结果如图4.3.66所示.理论与实验是在上下板分别为2.0 mm和2.5 mm铝板胶接样品得到的,由图可见理论和实验曲线符合得较好.

单片声阻法振幅法是用来检测胶接拉伸强度的，这里就不再作介绍了.

§4.4 介质声学量的测量及介质特性分析

超声波在介质中传播时，介质的声速、衰减和声阻抗等声学量都和介质的特性及状态等有关. 通过这些声学量的测量，可以了解被测介质的特性或状态的变化. 下面先简略介绍一下这几个声学量的测量方法，然后对其在介质特性分析方面的应用作些讨论.

4.4.1 介质声学量的测量

介质声学量的测量，主要是指介质的声速、声衰减和声阻抗等三个量的测量.

声速的测量方法有多种，如共振干涉法、临界角法、相位比较法和脉冲法等，这些是常用的几种方法.

共振干涉法的原理：是通过测定声波波长 λ 和频率 f 来求声速的，即声速 $v=f\cdot\lambda$ 测量有两种途径：一是采用固定频率 f 的

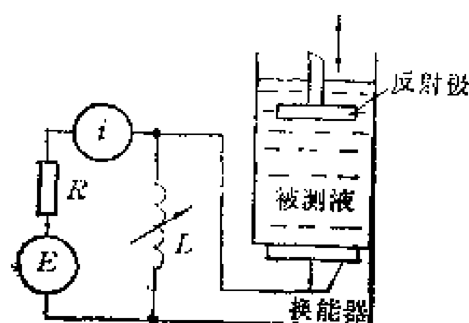


图4.4.1 变程干涉仪

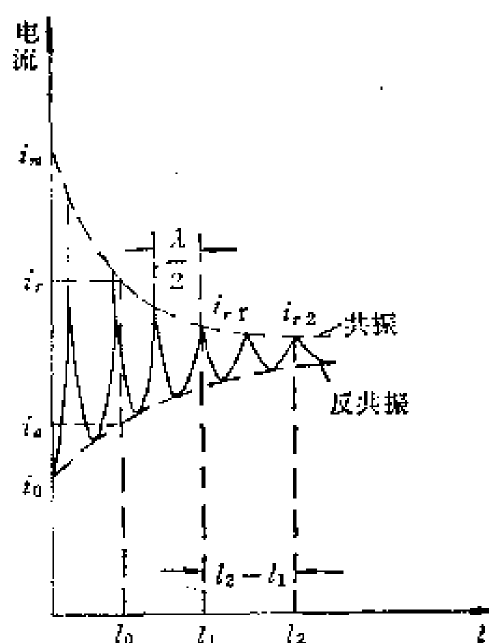


图4.4.2 干涉仪电流随距离变化的规律

超声波，调整传播距离以建立驻波共振状态，从而决定λ，再求出声速 v；另一是采用固定的传播距离，改变超声频率来建立驻波共振状态．这两种方法对液体介质均可采用，对固体介质只能采用后一种方法．前一种方法称变程共振干涉法，其测量如图 4.4.1 所示．该方法要求反射板与换能器之间严格平行．测得的电流 i 和距离的关系曲线如图 4.4.2 所示．两个相邻极大值（或极小值）之间距离为$\frac{\lambda}{2}$．此方法测量精度可达10^{-4}—10^{-5}．后一种方法称定程共振干涉法，其测量如图 4.4.3 所示．不断改变信号发生器的频

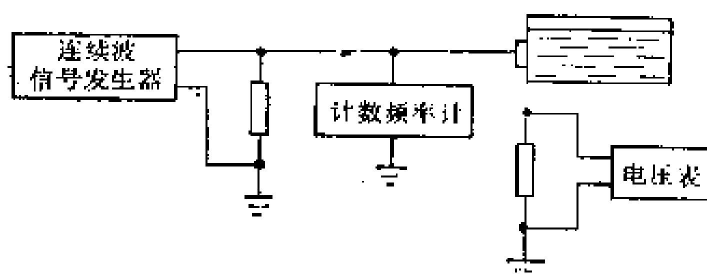


图4.4.3 定程干涉仪

率，电压表极大值对应试样共振，由频率计测出共振频率，试样长 $=l\frac{\lambda}{2}$．共振基频也可以用两个相邻极大值频率差来代替．此种方法的测试精度可达10^{-3}．在实际测量中还有用固定长度试样作出频率与声速的校准曲线板，作直接声速值的测量．

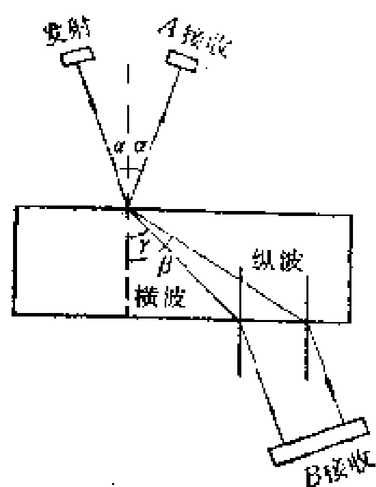


图4.4.4 临界角法

临界角法的原理，是通过介质的第一、二临界角的测量，利用反射和折射定律给出纵波和横波声速的测量．其方法如图4.4.4所示．在改变入射角 α 时，当达到第一临界角 $\alpha_{0纵}$ 时，在 A 处接收到第一个极大值，而在 B 处接收到第一个极小值．当入射角再增大到第二临界角 $\alpha_{0横}$ 时，在

A处接收到第二个极大值，而在B处接收到第二个极小值．利用A处测量（称反射法测量），利用B处测量（称透射法测量），待测声速分别为 $v_{纵}=v_{楔}/\sin\alpha_{0纵}$，$v_{横}=v_{楔}/\sin\alpha_{0横}$．在测试中用脉冲信号而不用连续波，这样可以减小干涉的影响，另外待测样品一定要作得两面光滑平行．

相位比较法的原理：双探头作一发一收工作时，接收的信号与发射的信号之间存在相位差$\varphi=2\pi fl/v$．通过这个相位差的测量来实现其介质声速的测量．实际测量可以把发射信号与接收信号同时加到示波器x轴和y轴，通过里萨如图来实现．变程测量时，两次重复出现里萨如图形的探头移动距离对应于一个波长．定程测量时发射信号经过移相器加到x轴，通过移相器进行测量或者直接用相位计测量．

脉冲法测声速是用得最多的一种方法，它可以是单探头作又发又收反射式工作，也可以是双探头一发一收透射式工作．如果采用斜探头，还可以同时测出固体介质的纵波、横波声速．用脉冲法进行声速测量，实质上是在已知距离内超声波传播时间的测量。测量声波传播时间的方法很多，如传播时间法、回鸣法、脉冲叠加法和脉冲重合法等．

传播时间法就是测量超声波传播一定距离所需的时间来测量声速的方法．最简单的方法是在示波器上借助时标直接读出，也可以用探伤仪作直接测量，但是精度比较低．精度较高的常用方法是用时标脉冲计数来测量超声波的传播时间，其原理如图4.4.5所示．

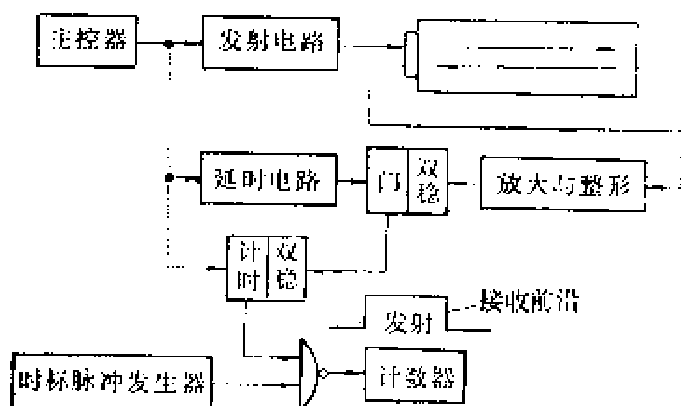


图4.4.5 时标脉冲计数测时原理

脉冲回鸣法的原理如图4.4.6所示，发射换能器产生的超声脉冲在介质中传播一段距离后被接收换能器所接收，

经放大、整形和鉴别后立即重新触发发射电路，这样就可以得到一个脉冲系列．脉冲的重复周期T基本上就是声波在介质中传播固定距离l所需时间，用计数器测量这个脉冲系列的重复频率f或周期T就可以求出待测介质声速$v=l/T=lf$．这种方法所用的电路比较简单，借助于记数器的记录精度可达±0.01%以上．

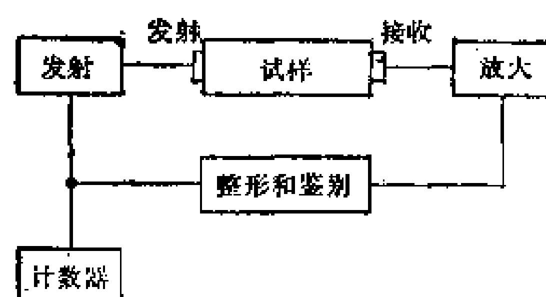


图4.4.6 回鸣法原理

脉冲回波叠加法：当采用单探头的脉冲反射法时，如果把反射周期调到近似地等于声波在试样中往返传播二次所需的时间，而且介质的衰减很小，那么第一次发射的声波的多次反射回波还没有全部衰减，第二次发射就又开始，这样在试样里就同时存在着多次发射的声波及其回波，这些波将在探头上相互叠加；如果调节发射重复频率使同时到达探头的多次回波的相位恰好相同，各次回波直接相加振幅最大．这个重复频率称"共振频率"，通过这个"共振"频率或周期的测量，便可以实现其声速测量．这就是脉冲回波叠加法的工作原理．"共振"频率时的周期等于声波在介质中往返两次的传播时间．

脉冲回波重合法是目前应用较多、精度较高的一种测量方法．类似于上述的脉冲回波叠加法，如果发射重复频率很低，以至于每次发射的多次回波与前一次发射的多次回波是分离的两个脉冲系列．用声波在试样中往返P次（P为1，2，3等正整数）所要的时间作为触发示波器x轴扫描的周期，或以这个周期的$1/m$（m为正数）作触发扫描周期，控制示波器的辉度只让所需观察的两次（第q次和第$q+P$次，q为正整数，例如$q=1$），回波信号在示波屏上显示出来，扫描频率合适时这两个回波刚好严格重合，用这个方法

可以测定任何一对回波间的时间间隔。

具体的电路如图 4.4.7 所示。它的工作过程大致如下：稳定的连续波信号发生器控制示波器的 x 轴扫描，经过 1000 分频和整形后触发射频脉冲振荡器和两道时间延迟发生器。射频脉冲发生器的输出通过岔路加到换能器，岔路只让回波通到放大器再到示波器，不让发射信号通过。时间延迟器把辉度信号加在示波器的 z 轴上。延迟时间控制到使一对回波（第 q 次和第 $q+P$ 次）的前沿和几个周期在示波器上出现。调节连续波发生器的周期，使它等于这两次回波的时间间隔，这时两个回波的每一周期都对应地重合，如图 4.4.8 所示。也可以用这个周期的 $1/m$，这样扫描次数

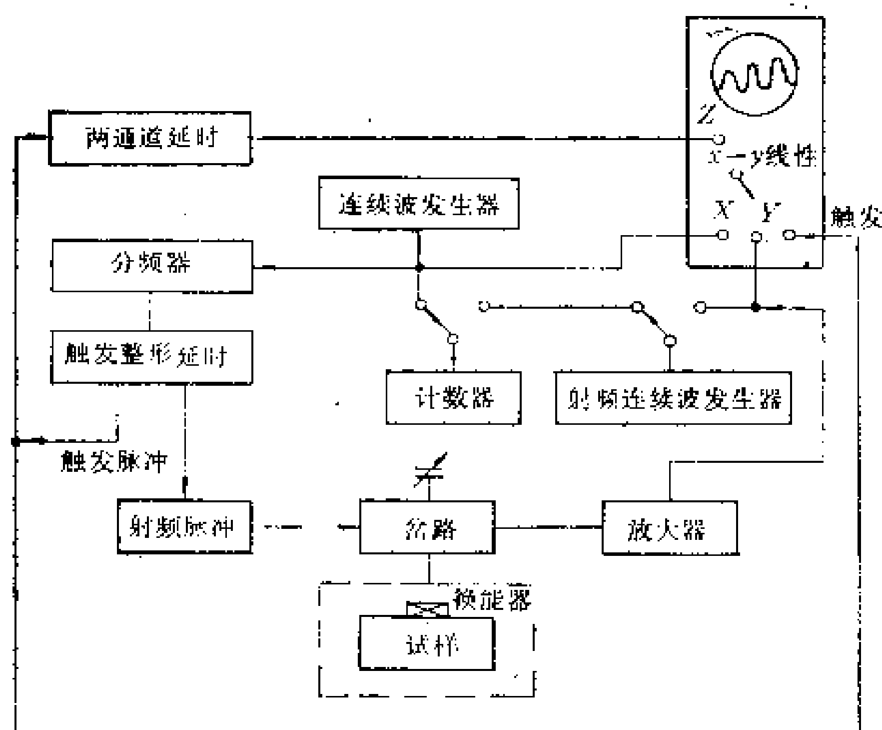


图4.4.7 频率自动控制的脉冲重叠法

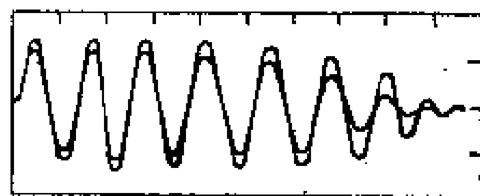


图4.4.8 两个回波的正确重合

大m倍，辉度可加亮，而且计算回波的时间可有m批数据，平均后精度可以提高，也可以避免错误.

超声波在介质中传播时，由于声束扩散、散射和吸收等原因而产生衰减. 这三种衰减随频率变化的规律是各不相同的，如果选择适当的频率，一定介质的某种衰减就可以被突出出来. 测量介质的声衰减是了解介质特性的有效方法之一.

准确测定介质声衰减是比较困难和复杂的工作，因为通常声衰减是由反射信号幅度变化来确定的，而反射信号幅度不仅与衰减有关，而且还与其它很多因素有关，比如耦合的情况、试样平行程度、探头特性等等. 利用共振干涉法测声速可同时测出液体的衰减，如图 4.4.1 和 4.4.2 所示，衰减系数α可以表示为

$$\alpha=\frac{[\ln(i_{r1}/i_{r2})]}{2(l_2-l_1)}. \tag{4.4.1}$$

通常采用最多的是脉冲反射法，对于液体介质可以用变程脉冲反射法，衰减系数α可以表示为

$$\alpha=\frac{[\ln(h_1/h_2)]}{2(l_2-l_1)}, \tag{4.4.2}$$

其中h_1、h_2是距离为l_1和l_2时测得的回波高度. 对固体介质α,

$$\alpha=\frac{[\ln(h_n/h_{n+1})]}{2l}, \tag{4.4.3}$$

式中l为试样厚度，h_n和h_{n+1}为相邻两次底面反射回波幅度. 此方法与液体变程脉冲法相比，多了一次反射损失. 如果固体介质均匀各向同性，且长方体试样两个相对表面平行度一样，在保证探头耦合条件一致时，可以在两个不同厚度的表面进行两次测量，实现固体介质变程脉冲法测量. 此外，还常用共振法来测定固体介质衰减. 衰减系数$\alpha=\pi\Delta f$，Δf为6dB带宽.

在作声衰减测量时，不管是液体还是固体都要特别注意探头与介质的耦合条件，反射板和反射界面的严格平行. 在作介质特性分析中，声衰减测量主要是吸收和散射衰减的测量，这时从测量的总声衰减中要扣除由于声束扩散引起的衰减部分. 为此通常是

在近场作脉冲反射法测量，如果是远场则要加上声束扩散的修正．在非空气界面反射法测量时，还要注意反射系数的修正．

声阻抗的测量：在已测出声速之后，可以用物理的方法测出介质的密度，声速与密度之积便可得到声阻抗率．也有人利用在共振频率下测量换能器的负载阻抗的办法来测量介质的声阻抗，并由此发展了一种超声密度计．

4.4.2 固体介质的特性分析

通过对固体介质的声速、声衰减和声阻抗等声学量的测量，可以测量固体介质的弹性模量、表面硬度、组织特性（致密度、晶粒度或球化率）、内应力等．以此作无伤材料性能的评价，这已成为当今无损检测中重要的一个分支．

材料的弹性测量，通常是通过纵横波声速和密度的测量来实现的．由纵波声速 $v_{纵}$ 可以求出介质的杨氏模量 $Y_{纵}=v^2_{纵}\rho$，由横波声速 $v_{横}$ 可以求出介质的剪切横量 $G=v^2_{横}\rho$，在混凝土的检测中，通常是用声速的测量来测量强度，并利用声衰减来测量含石子的多少，对其结果加以修正．

材料硬度的测量，主要是用于测定金属的洛氏 c 硬度，是利用声阻法的检测原理来实现的．传感器压头即相当于双片声阻法的触头，在一定压力下压进材料的深浅，相当于接触柔顺性的变化，而引起整个传感器的共振频率的变化．通过在固定压力下的共振频率的测量，测量压痕的大小．进而测量材料硬度．在实际测量中需要把不同的材料制成各种不同硬度的标准试块，作测量硬度值的标准．

超声是用于材料质量评价的一个重要方法，对于同一种材料，一般地讲，密度越轻、声速越小、声衰减越大的材质较差，而密度越大，声速越大、衰减越小的材质较好．由于影响上述几个声学量的因素较多，不是所有材料都满足上述的规律，但是通过这几个声学量的综合测量、作为评价材料质量和材料失效分析的手段来研究，日益受到重视．

超声波用于材料的组织结构的分析，可用来作晶粒度或球化率的测量．晶粒度的测量是通过测量声衰减来实现的．超声平面波在不考虑声束扩散情况下，声衰减系数 α 等于吸收衰减系数 α_a 和散射衰减系数 α_s 之和，即 $\alpha=\alpha_a+\alpha_s$．超声波的吸收和散射机制，都是相当复杂的．晶粒大小直接影响超声散射，不同的超声波波长(λ)和不同的晶粒平均直径($\bar{D}$)，存在不同的散射机制，如瑞

表4.4.1　几种不同的散射机制

$\lambda/\bar{D}$	散射机制	α_s 正比于
$>2\pi$	瑞利散射	$\bar{D}^3 f^4$
$1\sim2\pi$	随机散射	$\bar{D} f^2$
<1	漫散射	$\bar{D}^{-1}$

表4.4.2　晶粒度对应的 $\lambda/\bar{D}$

晶粒度号	晶粒平均直径 $\bar{D}$ (mm)	$1mm^2$ 内晶粒平均数	$\lambda/\bar{D}$		
			$f=5MHz$	$f=2.5MHz$	$f=1.25MHz$
−3	1.000	1	1.17	2.34	4.68
−2	0.713	2.8	1.64	3.28	6.56
−1	0.500	8	2.34	4.68	9.36
0	0.353	22.6	3.31	6.62	13.24
1	0.250	64	4.68	9.36	18.72
2	0.177	181	6.61	13.72	26.44
3	0.125	512	9.36	18.72	37.44
4	0.088	1448	13.29	26.58	53.16
5	0.062	4096	18.87	37.74	75.48
6	0.044	11586	26.58	53.16	106.32
7	0.030	32381	39.00	78.00	
8	0.022	92682	53.16	106.32	
9	0.0156	262144	75.00		
10	0.0110	741458	106.32		

利散射，随机散射和漫散射．不同的散射机制，散射衰减系数 α 与晶粒平均直径(D)和频率(f)的关系也不同，如表 4.4.1所示．

瑞利散射和随机散射都可用于测量晶粒度．例如，选取表 4.4.2 所示黑框内瑞利散射范围，对起重机铸钢车轮晶粒度的测量，所得结果如表 4.4.3 所示

表4.4.3　起重机铸钢车轴晶粒度的测量结果

编号		冲击断口	晶粒度	∇_5反射回波次数	
				10dB	30dB
1		粗晶	-2—-3	林波	林波
2	760	粗晶	混合晶粒	林波	林波
3	780	粗晶	混合晶粒	1	1
4	790	细晶	6—7	6	2
5	800	细晶	〃	8	5
6	810	细晶	〃	8	5
7	820	细晶	〃	9	5
8	840	细晶	〃	9	6
9	860	细晶	〃	11	6
10	880	细晶	〃	12	7
11	900	细晶	〃	11	7
12	950	细晶	〃	11	6
13	1000	细晶	〃	10	5
14	1050	过热	1—2	4	2
15	1100	粗晶	1—2	3	1
16	1150	粗晶	1—2	3	1
17	1200	粗晶	1—2	2	1

表中“∇_5 反射回波次数”为表面光洁度为 ∇_5 时底部回波次数，10dB，30dB分别为抑制衰减 10dB 和 30dB．反映衰减的回波次数是与正火温度及晶粒度对应增大和减小的．再例如，作为选取随机散射测量晶粒度的一个例子，超声和金相检测结果的比较如表 4.4.4所示．表中的 G_o 为超声测得的晶粒度级数，G_f 为金相检测的晶粒度级数．共抽样 77 个样品，误差在±0.5 级之内的占 92%．

表4.4.4 超声测量与金相检验的结果对比

$\Delta G = G_{声} - G_{金}$	-0.5	0	+0.5	+1
抽样量	6	48	17	6
百分比	8	62	22	8

球化率的测量，是通过声速的测量来实现的．球铁不是匀质材料，在这种材料中超声波传播速度受石墨大小、形状和分布情况的影响；并与铸件是否经热处理有关．如果石墨大小和分布相对固定，则声速值将随石墨形状而变，如图4.4.9所示．
图中三个声速区对应三种不同的石墨形态，第一区域 $v_l = 3400$—5280 m/s相当于并存球状石墨 $GOF_{10} + GOF_{11}$ 和片状石墨 $GOF_1 + GOF_2$．第二区域 $v_l = 5281$—5500 m/s相当于并存球状石墨和过渡石墨形态 GOF_4 和 GOF_{15}．第三区域 $v_l = 5501$—5900 m/s相当于只存在球状石墨．上述的GOF是根据TGl14577，B1.1规定的石墨形态．实验还发现，图4.4.9中的曲线对不同的共晶度略有不同．声速还与铸态、高温热处理、低温热处理等不同而不同．当铸态呈球状石墨时声速最高，球化率与声速关系曲线如图4.4.10所示．

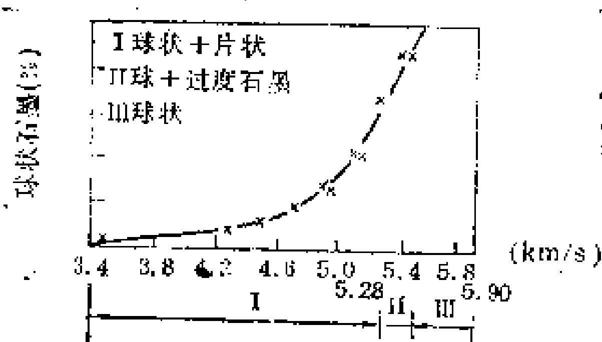


图4.4.9 球状石墨数%与声速的关系曲线

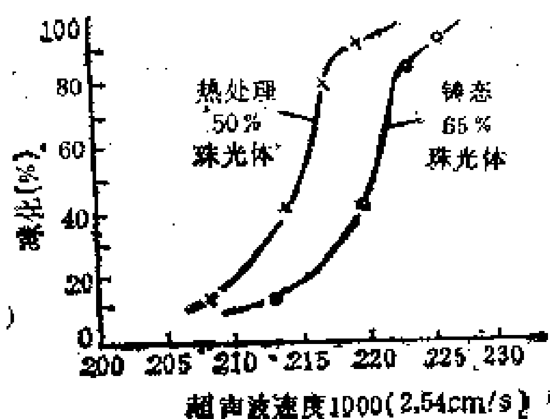


图4.4.10 球铁的球化率与声速的关系曲线

在球铁的实验研究中，还得到声速与抗拉强度、疲劳强度、冲

击值等机械性能的一些对应关系．利用超声波声速法无损检测球铁的质量的方法，在国际上已逐步被确认，并开始应用于生产．

残余应力的测定，对预测工件的质量具有重要意义．用超声波方法测量残余应力的基本原理与光弹法测应力的原理相似．沿主应力方向(σ_1、σ_2)传播的两个横波分量的传播速度 (v_1,v_2) 之差和主应力之差成正比．

$$(v_1 - v_2)/V_0 = S(\sigma_1 - \sigma_2), \qquad (4.4.4)$$

式中 v_0 为应力为零的各向同性弹性体中的声速，s 为横波声应力常数，是由拉梅常数 μ 和三阶弹性常数 n 决定的常数，

$$s = \frac{4\mu + n}{8\mu^2}. \qquad (4.4.5)$$

当纵波垂直于应力面传播时，其声速 v_l 的相对变化与主应力之和 ($\sigma_1 + \sigma_2$) 成正比，即

$$(v_l - v_{l0})/v_{l0} = s'(\sigma_1 + \sigma_2), \qquad (4.4.6)$$

式中 v_{l0} 为应力为零的各向同性体的纵波声速，s' 为纵波声应力常数，也是一个由拉梅常数(μ,λ)和三阶弹性常数 (l,m) 决定的物理量，

$$s' = \frac{\mu l - \lambda(m + \lambda + 2\mu)}{\mu(3\lambda + 2\mu)(\lambda + 2\mu)}. \qquad (4.4.7)$$

在已知材料求出 s 和 s'，测出 v_1,v_2,v_0 和 v_l,v_{l0}，便可以求出主应力 σ_1 和 σ_2．值得指出的是，用超声方法测残余应力时，问题并非如此简单，因为材料本身的组织结构(特别是其各向异性)将干扰声速的测量．此外，如何制备一个无残余应力的标准试样，或者已知初始残余应力大小的标准试样，用来求出声应力常数和 v_0、v_{l0} 等参数，都是待研究的问题．此法测出的应力是平均应力．此外，在测试技术方面也还存在一些问题，故至今尚未见到用于现场实际检测，还处在实验室的研究阶段．

超声测螺栓应力，是目前比较成熟并有实际应用的一个方面．表 4.4.5 所示为柴油机汽缸螺栓材质为 $40C_r$ 钢径、850℃ 油粹、500℃回火时测得的结果 $\sigma_{声}$，与试验机的载荷所得应力 $\sigma_{机}$ 比较，

表4.4.5　超声测量与试验机测量结果对比

$\sigma_{机}$	2.8	5.7	8.5	11.3	14.2	17.0	19.8	22.6	25.5	28.3
$\sigma_{声}$	3.3	5.9	8.8	11.8	14.6	17.3	20.3	23.1	25.8	28.6

它们符合得较好.

利用声表面波测量表面残余应力，是比较简便的，甚至取得了通过表面波对表面裂纹的散射来预测其断裂应力，预测与实测结果符合较好. 图 4.4.11 给出在单向加载 6010 铝合金试样中表面波的传播时间随应力变化的曲线.

图4.4.12给出超声波法测得的板件边缘堆焊时纵向焊接残余应力的结果，并和应变片法和机械法测量的结果作了比较. 单从这一例可见，它们之间符合还是较好的.

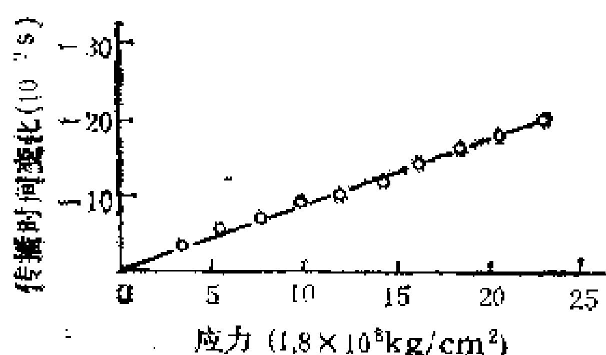


图4.4.11　6061铝合金试样表面波传播时间变化与应力的关系

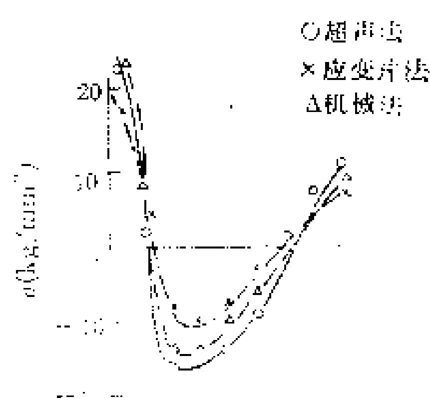


图4.4.12　板件边缘堆焊纵向焊接残余应力分布

4.4.3　岩体特性的分析

超声波对岩体的检测，同样包括检和测两个部分. 检是利用超声探测岩体内的空洞、裂纹等. 我们前面所介绍的一般固体材料的两类三种探伤原理和方法，原则上都可应用于岩体，只是选取的频率比较低、功率较大. 声发射技术用于岩体在预报地震方面也是一个重要的方法. 测是指通过声学量的测量来评价岩体的某

些特性．虽然岩体也是属于固体介质，但它与一般的固体材料相比有其特殊性，我们这里单独列出一小节作些讨论．

岩体弹性力学参数的测量，是通过岩体纵横波声速的测量而给出的．对于无限大岩体，取纵波声速 v_l 和横波声速 v_s 为

$$v_l = \left[\frac{Y}{\rho}\left(\frac{1-\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}\right)\right]^{1/2}, \tag{4.4.8}$$

$$v_s = \left[\frac{Y}{\rho}\cdot\frac{1}{2(1+\sigma)}\right]^{1/2}. \tag{4.4.9}$$

在测出密度 ρ 和 v_l、v_s 后，便可求出杨氏模量 Y 和泊松比 σ，以及

剪切模量 $$G(=\rho v_s^2), \tag{4.4.10}$$

拉梅常数 $$\lambda(=\rho(v_l^2-2v_s^2)), \tag{4.4.11}$$

体积模量 $$k=\rho\left(v_l^2-\frac{4}{3}v_s^2\right), \tag{4.4.12}$$

等．表 4.4.6 给出所测部分岩体的结果．

表4.4.6 对不同岩石测得的结果

岩性	v_l(m/s)	v_s(m/s)	σ	Y(×10⁴ kg/cm²)
二迭系阳新灰岩	5840	3240	0.28	77.6
前震旦系石英沙岩	3870	2200	0.26	32.5
前泥盆系变质石英沙岩	5180	3160	0.302	66.3
矽卡岩	5400	3000	0.276	65.3
前震旦系似斑状花岗岩	5000 4070	2680 2360	0.296 0.246	49.5 36.8
矽化鞍山岩	4680 5060	2550 2890	0.292 0.258	45.0 57.0
白垩系中细花岗岩	4950	2620	0.305	47.4
弱风化正常斑岩	5560	2730	0.342	51.9
正常斑岩	5000	2970	0.219	57.0
三迭系中厚及薄层灰岩	5020	2940	0.24	53.1

岩体裂隙的分析.岩体是多裂隙非均匀介质,裂隙的发育影响着岩体的稳定性.室内模拟及大量现场测试数据证实,随着裂隙的发育,声波在岩体内将产生绕射、折射以及多次反射,造成声线"拉长",使传播时间随裂隙的发育而增大,"视声速"降低,统计值如表4.4.7所示.用$(v_{lr}^2-v_{lm}^2)/v_{lr}^2$和$(v_{lm}/v_{lr})^2$分别表征岩体裂隙系数和完整性系数,作为评价岩体完整程度的重要参数,式中v_{lm}为待定岩体的纵波声速,v_{lr}为仅有少量裂隙的岩石标准试块纵波声速.

表4.4.7 不同裂隙对应的声速

裂隙发音程度	声速(m/s)
新鲜坚硬没有裂隙	4000—6000
岩石未变质有较大裂隙	3000—4000
岩石未变质裂隙发音	2000—3000
岩石裂隙发音夹薄层粘土	1500—2000
裂隙显著发音夹弱层	1000—1500

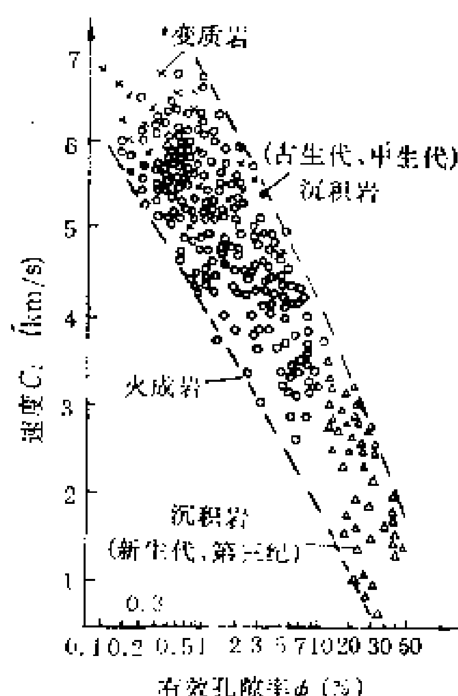


图4.4.13 声速v_l与有效孔隙率ϕ的关系

岩体孔隙率的分析.岩体孔隙率影响着声速,目前仍延用的韦里(Wyllie)公式.将多孔隙岩体近似等效为多孔的岩体骨架,及孔内所填充介质两部分组成.根据韦里公式声波在其内的传播时间为

$$1/v_l=\phi v_{lf}+(1-\phi)/v_{lm}. \tag{4.4.13}$$

式中v_l、v_{lf}、v_{lm}分别为多孔岩体、充填介质、岩体骨架的纵波声速,ϕ为孔隙率.则

$$\phi=(t-t_m)/(t_f-t_m),$$

式中t为总的传播时间,t_f、t_m分别为填充介质及岩石骨架的传播时

间，可见孔隙率是声速的函数．虽然韦里公式是不完善的，但从中仍可看出其基本关系．图4.4.13所示为火成岩、沉积岩、变质岩等的声速与孔隙率的关系实测结果．

利用声波测岩层的孔隙率，是石油测井预测油田储量的重要方法之一．

岩体风化程度的分析．岩体随着风化程度的不同，在其内部结构特性上，即松散程度、胶结状况、矿物成份、容重、孔隙度、粘度等物理性能存在着差异，这些将引起弹性模量、泊松比及密度上的差异．风化程度的不同，还造成岩体不均匀等，这些因素均导致声速随风化程度不同而不同．表4.4.8给出了一大型水坝结晶岩的结果．

表4.4.8 不同风化程度对应的声速

风化壳分带	岩体性质	声　速(m/s)
剧风化层	疏松至半疏松岩石碎屑	1000—2000
强风化层	竖硬半坚硬球体或岩块间夹较多疏松岩石碎屑	2000—3000
弱风化层	竖硬半坚硬球体间夹少量疏松岩石碎屑	3500—4800
微风化层	极坚硬、坚硬块体，仅沿裂隙有微风化现象	5400—6400

为了定量地说明风化程度，采用$(v_{l0}-v_l)/v_{l0}$表征风化系数(其中v_l、v_{l0}分别为风化岩体及新鲜岩体的纵波声速)，作为评价岩体风化程度的一个重要参数．

4.4.4 流体介质特性分析

与固体介质一样，通过对流体介质声速、声衰减和声阻抗等声学量的测量，也可以对流体介质进行特性分析，其中包括液体粘度的测量、液体比重的测量、气体和液体成份的分析、溶液浓度及浆体浓度、粒度的测定等．

液体粘度的测量，已发展有定型产品的超声粘度计．在声学量中，与液体粘度有密切关系的主要是声衰减和切变阻抗这两个量．由于声衰减影响因素很多，因此，目前测量粘度有实用价值的方法是切变阻抗的方法．这实际上是一种声阻抗法的检测法．与液体的粘度有关的切变阻抗作为换能器的负载，通过换能器特性的测量来测量其负载阻抗，实现其粘度测量的目的．用于测量切变阻抗的换能器，可以是磁致伸缩式也可以是压电切变换能器．目前有利用这两种换能器的粘度计产品，前一种叫磁致伸缩式超声粘度计，后一种扭转石英式粘度计．这里就不作详细介绍了．

液体比重的测量：在氯丁橡胶的试验中发现，氯丁橡胶的比重和声速有相当好的对应关系．比重变化1%可引起声速2%的变化，如图4.4.14所示．

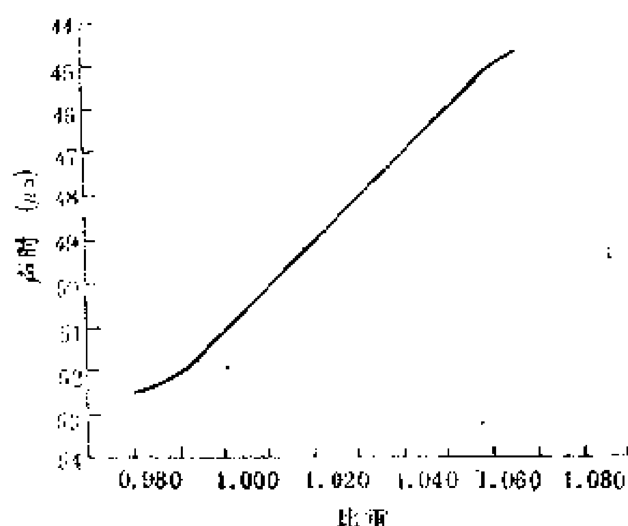


图4.4.14　氯丁橡胶乳液比重与声时的关系

这种比重的测量超声方法十分优越于取样比重计测量方法，此方法可以实现其反应过程中的实时测量以及为调整控制反应，及时提供必要的数据．

超声测量比重的另一个例子是炼油厂测量石油馏分的比重．采取恒温测声速的方法测量石油馏分比可达到0.05%的精度．利用多种石油馏分声速不同的特点，还可以测定输油管中不同油品的分界面，图4.4.15所示为输油管中两种油界面附近的声速变化．目前已有用超声分油器实现一个管道中输几种不同油品的实际应用．

利用超声对气体成份的测量，近年来出现了两种主要的超声气体分析器．一种是利用氢气的驰豫频率来探测气体中的含氢量的超声波氢气检测器．它有两套超声波的发射和接收系统，一套系

统的工作频率高于氢气的驰豫频率，另一套低于这个频率，被测气体中不含氢时，两套系统所得声速相同。当气体含有氢时，两套系统测出声速有差别，根据这个声速差值大小来判断含氢的多少. 另一种是用于新型气体色谱仪中的超声波高灵敏度气体检测器. 它有两个检测匣，两个匣内有相距10mm的作为发射和接收的两个换能器. 色谱仪将被测的气体样品的各种组成成分按时间先后分别分离出来，并与载体气体一起送入第一个检测匣. 单纯的载体气体送入第二个检测匣. 两个发射换能器是受同一个激励源激励发射，两个接收换能器分立接收，先后到达的每个组分引起的声速变化造成了先后出现的两个接收信号的相位差，先后显示的每一个相位差峰值是与这种组分的含量及其分子量的乘积成线性关系，仪器的线性可优于10^7.

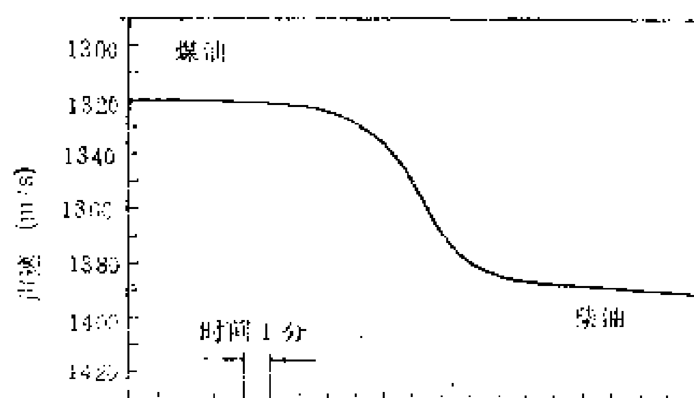


图4.4.15 输油管中两种油的界面附近的声速变化

液体成分和溶液浓度的分析，也是通过声速测量来实现的. 图4.4.16所示为蔗糖、硫酸、硝酸等溶液浓度变化时声速的变化情况. 从图中可见，对于硫酸，如果其温度保持不变，在85—100%的浓度范围内，浓度变化1%时声速可有 19m/s 的变化，可见分析精度是很高的. 从图(b)、(c)可见，浓度与声速不一定呈线性关系. 由于曲线弯曲可能导致在一定浓度范围内同一个声速对应两种浓度，这时此方法便不能应用，只有在浓度范围刚好在其线性单调变化段，此方法才可以应用. 目前超声用于二元混合液的浓度分析是成功的，而且有大量的实际应用. 对于多元混合液，单靠声速还不能分析成分，往往要与其他参量和方法联合使用才能解决问题. 这一点我们将在下面浆体浓度的分析中作些讨论.

矿浆浓度的超声测量，是利用测量声衰减或声速与声衰减同

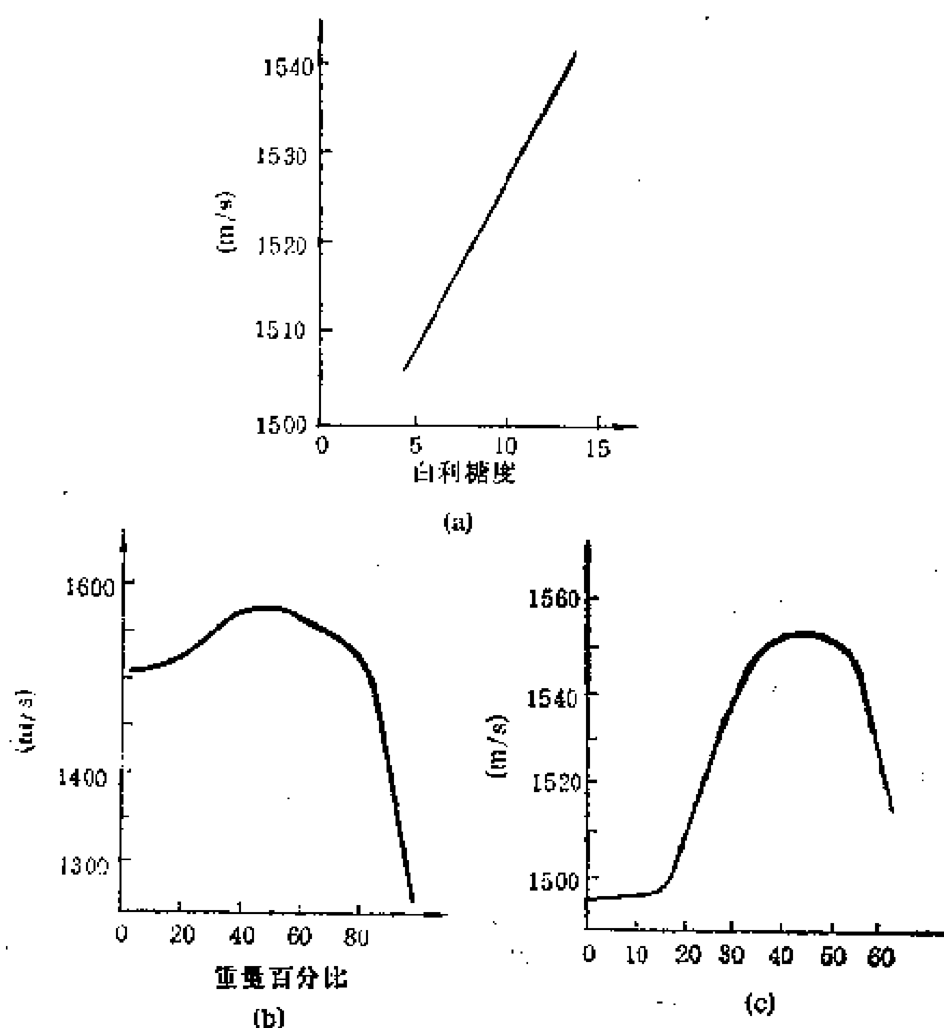


图4.4.16　若干溶液的浓度-声速曲线

(a)蔗糖浓度与声速的关系；(b)25℃下硫酸浓度与声速的关系；

(c)30℃硝酸浓度与声速的关系

时测量来实现的．利用声衰减测量的方框图如图4.4.17所示．

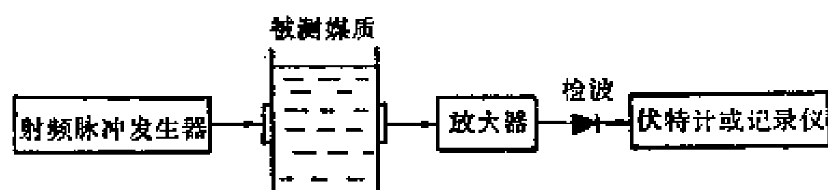


图4.4.17　矿浆浓度的衰减测定

试验表明，悬浮体对高频超声波的衰减主要是散射衰减，它与浆体的颗粒的浓度、粒度、比重和表面构造(是平面还是凹凸不平)等有关．衰减量受温度变化或溶解盐量变化影响较小，但悬浮液中气

泡则影响较大. 如果没有气泡，而且选矿区正常工作时，影响衰减的其他因素就比较稳定，则测定衰减的方法便可以用来测定矿浆的浓度. 如果选取两组不同的工作频率，通过计算机可以同时测定矿浆的粒度. 利用声衰减还可以用于低浓度纸浆的浓度测量.

§4.5 超声工程测量

4.5.1 厚度与液位的超声测量

超声测厚的方法，从原理上分主要有共振法、干涉法、脉冲回波法等几种. 使用的超声波类型主要是纵波，其次是横波和板波等.

共振法测厚与共振法测声速是一个方法，在测出共振频率后，一个是已知厚度求声速，一个是已知声速求厚度. 共振法测厚具有较高的测试精度，通常可达0.1—1%，其测厚范围一般约为1—100mm，最薄可达0.1mm.

干涉法测厚是我们在4.3.2一节中介绍过的频谱法测夹层厚度的方法. 与共振法比，干涉法更适合于测量薄的试样，所以称干涉测微计连续波干涉测微计精度可达±6μm. 对厚度范围为0.25—1.25mm的不锈钢，脉冲干涉测微计测量精度可达0.1%.

脉冲回波法测厚与4.3.2所介绍脉冲反射法探伤原理是一致的. 与共振法相比，它更适合于测量较厚的试样，是目前工业应用中最为广泛的一种. 如果采用特殊设计的电路，几十兆赫高频工作，探头是宽带的并加有延迟介质，这种高分辨测厚计可以测量0.3mm左右的金属试样. 此外，还可用这些方法测量人体或牲畜的脂肪厚度等.

超声测厚目前在石油、化工、电力等部门广泛用来测量管道、容器的腐蚀厚度. 在这一类的测量中常常是高温测厚，必须解决探头隔热和传声系统的耦合等问题. 此外，与测厚有关的另一个应用是测量固体药柱的燃速.

超声测量液位与超声测厚从方法和原理上没有什么不同，只

是一个用以测量液体介质厚度或气体介质厚度，一个用以测量固体介质厚度．超声测厚技术的各种方法原则上也都适用于超声测液位．在超声测液位诸方法中，脉冲回波法是应用最为广泛的一种．根据传声介质的不同，可以分为液介式、气介式和固介式三类．根据所用探头的工作方式，又可分为自发自收单探头方式和一发一收双探头方式．相互组合起来，可有六种基本测液位的方案，如图4.5.1所示．图中(a)、(b)、(c)为采用单探头的三种方案，(d)、(e)、(f)为采用双探头的三种方案．

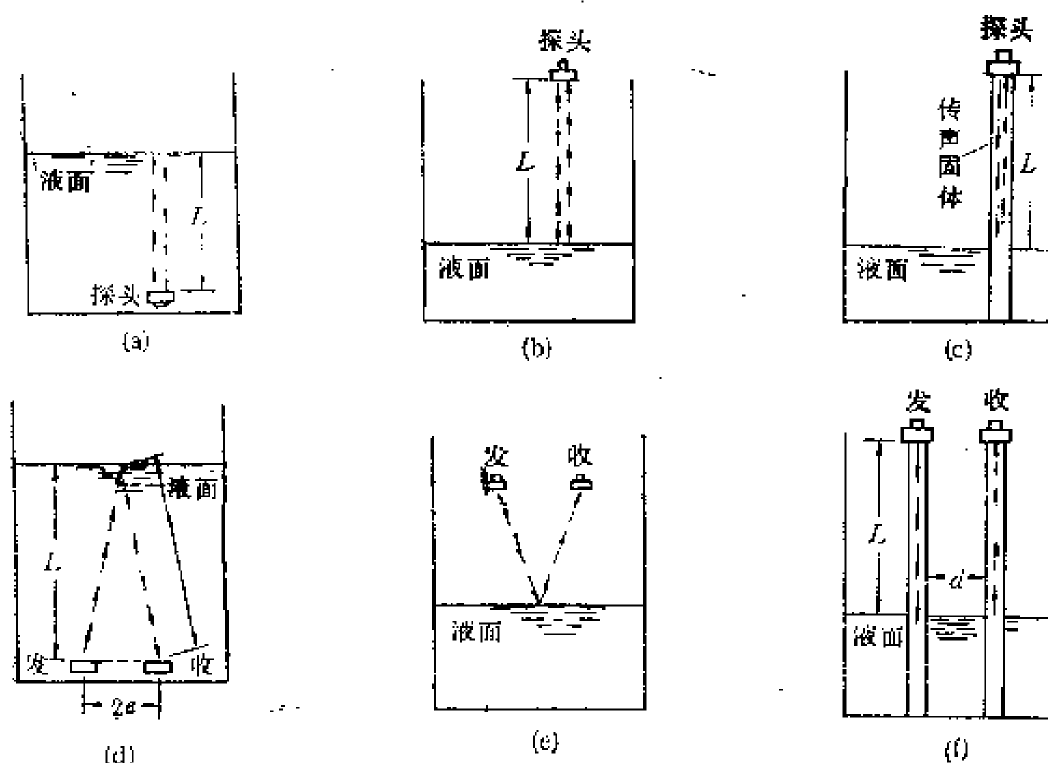


图4.5.1 脉冲回波式超声液位计的六种基本方案

实际测量中，实现这些方案都还需考虑一系列的具体问题，比如作气介式工作，就必须考虑探头在空气中辐射的特殊设计问题．根据这些方案制作了一些超声液位计，与超声厚度计相比，这些液位计工作频率低，测量距离远，绝对精度低．此外，还有一些其他方法的超声液位计，比如定点式液位计等等．

与超声测液位相关的，利用气介式液位计可以测量料位，也有定点式超声料位计．

4.5.2 流速和流量的超声测量

超声波测量流体的流量在工业中有着广泛的应用，例如：在石油、化工工业生产流程中，流体流量的控制和监督；在水力电力部门对流量的连续测定；在水文测量工作中对河川、海峡水流流速的测定；在气象预报中对风速的测定和矿井排风量的监测；以及在医学上的血流的测量等等.

超声测量流量之所以在工业上有着广泛的应用，在于它具有一些其它方法不可比拟的优点. 比如超声测量流量可以作到非接触无插入部件；不受流体的物理性质和化学性质的影响；方法简便，便于计量和记录等等.

超声测量流量的原理是比较简单的，当超声波在流动的介质中传播时，相对于固定坐标系统(比如管道中的管壁)来说，超声波速度与静止介质中的传播速度有所不同，其变化值与介质的流速有关. 因此根据超声波速度的变化可以求出介质流速，进而求出流量. 图4.5.2给出超声测量流速和流量的原理示意图. 图中T_1，T_2为两个发射探头，R_1，R_2为两个接收探头. 介质流速为U，当顺流发射接收时，超声波速度为$v+U$，当逆流发射接收时，超声波速度为$v-U$. 其中v为介质静止时的声速. 当T_1和T_2同时作发射时，两个接收探头R_1和R_2所收到的信号之间产生了与流速U有关的差别. 实现测量这个差别的方法有时差法、相位法、频率差法等等，时差法是测量顺流和逆流传播的时间差. 相位法是测量连续超声波在顺流和逆流传播信号之间的相位差. 频率法是测量顺流和逆流超声脉冲的重复频率差. 除此之外，还有一些根据其他原理进行测量的流量计. 例如，根据测量流动介质中声束的几何

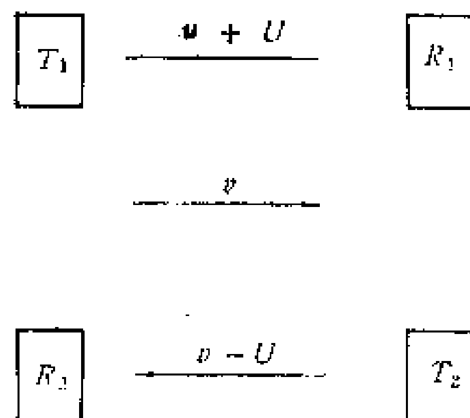


图4.5.2 流体流速和流量超声测量

位移测量流速的超声束位移法；根据介质中悬浮粒子散射信号的频率变化的多普勒效应测量流速的超声多普勒法等.

超声测量流量是通过测量流速后给出的. 因此在由流速确定流量时，必须考虑到各种不同条件下流速的不同分布，并依此作出流量的修正.

4.5.3 温度的超声测量

超声测温是一种新的测温技术，日益受到重视和采用. 例如：在低温测温方面，已把超声测温计作为2—20K温度范围内的基准计温方法；在高温或高压气体测温方面，超声温度计具有反应迅速的特点，已经用来测量汽轮机进气、火箭排气和汽缸中燃烧气体等高达2000℃左右温度的测量；甚至高达17000℃热核等离子区的温度测量；在气压低达 10^{-4} atm的高空超声测温便于遥测又不受辐射，热的影响；在熔融液（如钢水）中可在几百度到二千度内进行不接触的超声测温；以及在海水、快速反应堆中用超声进行温度精确的测量.

超声测温大多数是以气、液、固三态介质中温度和声速的相关性为理论基础的. 理想气体的声速与绝对温度的平方根成正比，许多固体和液体的声速一般随温度增高而降低. 气体的声速变化率在低温时最大，大多数液体的声速变化率基本上不随温度而变，固体则在高温时声速变化率最大. 超声测温是超声测量声速的实际应用的一个方面. 在实际测试中，根据测试介质的不同，环境条件的不同以及测温范围的不同，发展了一些具体的超声温度计. 比如超声气温计、测量低温的电声气体温度计和干涉仪式超声温度计、石英温度计、细线敏感元件的超声温度计等等. 这些方法的原理、特点及其应用范围列表于4.5.1.

表4.5.1 声波测温的各种方法、原理及应用范围

分类	方法	原理	特点	应用范围
声波直接通过被测介质	气温计	①脉冲传播时间法 ②回鸣法 ③相位差法 ④共振法	热辐射影响小；响应速度快；温度场不受干扰，便于遥测	测量气温，微气象温度变化测定，内燃机燃烧温度测定等
	低温的声学温度计	①管状气体声学共振器 ②谐振法	在低温时灵敏度高，可实现2--20 K范围热力学温标，精度高	测定液态氦和氢的温度. 测定液态氮的温度
声波通过一种与被测介质成热平衡的热能元件	共振式石英温度计	谐振法	精度高；长期稳定性好；复现性好	测量比热，溶解热，反应热，燃烧热、和测定纯度和分子量等
	用细线作敏感元件的超声温度计	脉冲法或脉冲法与谐振法联用	测量溶化温度(1400—2000℃)有较高灵敏度	测定融溶固体温度；火箭发动机中气体温度；中子增值反应堆，燃料的温度；除测温外，还能测弹性模量，泊松比、核物理性能等

参考书目

[1] Josef Krautkrämer and Herbert Krautkrämer, Werkstoffprüfung mit Ultraschall, Springer-Uerlag, Berlin, Heidelberg, New York (1975).

[2] 日本学术振兴会，超音波探傷法，改订新版，日刊工業新聞社(1974).

[3] Jack C. Spanner, Acoustic Emission Techniques and Applications (1974).

[4] 李明轩，声阻法检测原理，科学出版社(1976).

[5] 同济大学声学研究室，超声工业测量技术，上海人民出版社(1977).

第五章　医 学 超 声

周 静 华

§5.1　概　　述

近年来，超声波广泛应用于生物学、医学领域．研究超声波与生物组织（主要指人体组织）的相互作用机理、规律及其应用的学科分支称为医学超声．它包括两大方面：超声诊断和超声治疗．超声诊断研究如何利用各种组织声学特性的差异来区分不同组织，特别是区分正常和病变组织．超声波在生物组织中的传播规律（即组织对声波的作用）及诊断信息提取方法是超声诊断的物理基础．超声治疗则研究如何利用超声波的生物效应（超声波照射引起的组织结构、功能和生物过程的变化）来治疗某些疾病，其物理基础是超声生物效应的机理和超声剂量学等．

超声诊断的研究始于本世纪40年代．到50年代，A型诊断仪在临床得到广泛应用，对于脑中线检查及心、肝、胆囊和眼睛某些疾病的诊断取得了成功的结果．60年代，超声诊断由A型（一维回波振幅显示）向B型（二维图像亮度显示）过渡．70年代，随着灰阶显示和快速实时动态图像的实现，超声诊断的发展极为迅速，应用十分广泛，除了充气部位（如肺脏）和骨骼结构外，几乎人体内每个脏器都可用超声进行诊断，如颅脑、眼、心、肝、胆、肾、乳房、胎儿等．特别是对于发现肿瘤和结石等占位性病变并确定其尺寸和位置，监视病情发展等，超声诊断更有其独到之处．加之超声诊断为非侵入性诊断，具有无害、无痛、使用方便、费用低廉、诊断可靠等优点，使其成为临床医学不可缺少的主要影像诊断方法之一，并有着广阔发展前景．广泛的临床应用反过来又促进了超声诊断的研究工作．一方面，各种信号处理（特别是图像处理）技术的研究和应用使B型诊断仪的图像质量（分辨率、清晰度及信

噪比等)不断改进，其他形式的诊断仪相继出现和不断发展，如M型、多普勒型、PPI型、C型、F型、超声CT、合成孔经成像等. 另一方面，声波在生物组织中的传播规律的研究工作正在不断深入，声学参量定量估算和成像研究工作十分活跃，建立在此基础上的定量组织辨认或鉴别诊断的研究工作展现了美好前景.

超声治疗的历史比超声诊断还要长，但其发展速度却较慢. 除了技术上的原因外，一个重要的原因是由于超声生物效应的复杂性和对其机理及影响因素的基础研究不足. 超声治疗的研究工作始于30年代，于50年代十分活跃，后来由于很多人的研究结果互相矛盾或无定论而一度冷落. 近年来，随着基础研究的逐渐深入和某些治疗效果得到了肯定，超声治疗的研究又逐步活跃起来. 目前比较成功的是热疗及用于脑手术和肝脏手术的超声手术刀等.

鉴于超声诊断和超声治疗发展程度的不同，本章的主要篇幅(§5.2—§5.6)是关于超声诊断的原理和方法，而与超声治疗有关的篇幅却比较少.

§5.2 超声在生物组织中的传播

5.2.1 引言

超声波在各向同性的均匀液体和固体中的传播理论问题早已解决(参看第二章). 生物组织既不同于固体介质，也不同于液体介质，而且结构很不均匀，这就造成了超声在生物组织中传播问题的复杂性. 要精确描述生物组织的声学特性及超声波在生物组织中的传播规律是不现实的. 解决这一问题的方法是根据特定的目的寻求有足够精度的近似描述. 也就是说，首先要找到一个适当的声学模型，这个模型的声学参量及空间分布规律描述了某生物组织的声学性能，然后建立这个模型的波动方程，根据已知声源，求解声波在模型中的传播规律，即得到声波在该生物组织中的传播规律. 通常我们认为生物组织(指活体组织)的声学特性是不随

时间变化的，这对于短时间的观察是适用的.

显然，在讨论不同问题时对模型的近似程度的要求是不一样的. 最粗略的近似是把骨骼看成各向同性的均匀固体，用其纵波声速、横波声速、密度、声衰减系数来描述其声学性质，声波在其中的传播则服从于固体中的波动方程；而软组织和各脏器则被视为均匀液体，其中横波不能传播(实际上是衰减很大)，故只用纵波声速、密度、声阻抗率、体弹性模量(其中只有两个量为独立量)和声衰减系数来描述，声波的传播服从于液体波动方程. 由于生物组织的声衰减系数较大而不能忽略，故波动方程中的声速度应为复数，其虚部则表示组织的声衰减特性.

按照上述近似方法，人体某些组织和器官的声学参量示于表5.2.1. 应说明的是，这些参量为离体测量值，与活体值可能有区别，而且，这些参量均为温度的函数，且因人而异，因测量方法而不同，表中所列出的则是 S.A.Goss 等人收集整理的一些平均结果，在此仅供参考.

表5.2.1 人体组织的声学参量*

人体组织	密度 ρ(g/cm³)	纵波声速 (m/s)	纵波声阻抗率(g/cm²·s)	1MHz时纵波声衰减系数(dB/cm)	衰减系数频率关系
血液	1.055	1580	1.67×10^5	0.18	$f^{1.2}$
脂肪	0.952	1450	1.38×10^5	0.63	f
肝	1.06	1550	1.64×10^5	0.94	f
心肌		1510		1.8	f
肾	1.04	1560	1.62×10^5	1.0	f
肌肉	1.08	1580	1.70×10^5	1.2～3.3	f
眼晶状体	1.14	1620	1.85×10^5		
软组织平均值	1.06	1540	1.63×10^5	1.0	f

* 生物组织的声学参量与组织的成分(如蛋白质，脂肪和水的含量)有密切关系. 一般说来，声速随组织中蛋白质含量的增加而增加，随水分、脂肪含量的增加而降低，声衰减系数亦然.

在处理超声波入射于不同组织间的界面上的声学行为时，上述近似模型是适用的. 然而，单纯利用界面回声信号来进行超声诊断是很不够的. 要观察生物组织的细微结构，必须利用组织的

微弱声散射信号．声散射的形成是由于组织的非均匀性，要解决声散射问题则必须用较好的声学模型，这个模型认为生物组织的声学特性是非均匀的(是空间位置的函数)，但各声学参量均很接近于其平均值，其与平均值的相对偏差远小于1．在这种假设下，可以建立非均匀组织的波动方程和求得声波传播的近似解．

此外，生物组织声衰减特性的描述及机理，生物组织的非线性特性及多普勒效应等问题对超声诊断均有着十分重要的意义，更是定量诊断的重要基础．本节将对这些问题分别进行阐述，并仅限于软组织的情况(液体模型)．由于多数问题(除反射、折射问题外)目前都还处在研究阶段，我们将叙述目前的研究结果，并请感兴趣的读者注意查阅文献，以便了解新的进展．

5.2.2 反射与折射

超声波入射于两不同组织的界面时，将发生反射和折射．如果界面的曲率半径 a 大于声波长 λ，即 $ka \gg 1$ (k 为波数)，则此问题可以近似为超声波入射于两均匀介质的平面界面时的反射、折射问题，而对于两组织均为软组织的情况，只有纵波能够传播，如图 5.2.1 所示．

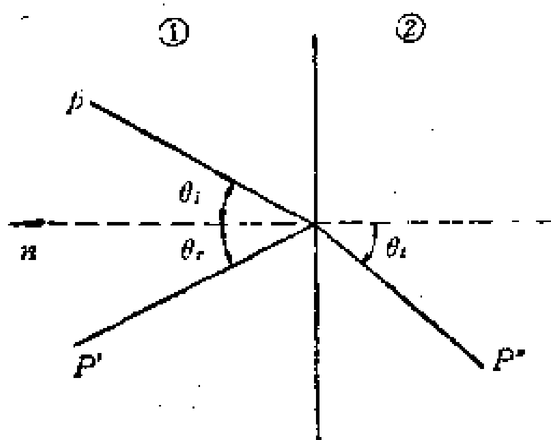


图5.2.1 超声波在平面界面的反射和折射

图中，P 为入射波，P' 和 P'' 分别表示反射波和折射波，n 为界面法线，θ_i、θ_r 和 θ_t 则分别表示入射角、反射角和折射角．

根据 Snell 定律，

$$\theta_r = \theta_i, \qquad (5.2.1)$$

$$\sin\theta_t / \sin\theta_i = c_2 / c_1. \qquad (5.2.2)$$

其中，c_1 和 c_2 分别表示两组织的(纵波)声速．

由边界条件(法向位移和法向应力的连续性)可以解出，声压反射系数 Γ_r 与折射系数 Γ_t 为

$$\Gamma_r = (z_2\cos\theta_i - z_1\cos\theta_t)/(z_2\cos\theta_i + z_1\cos\theta_t), \quad (5.2.3)$$

$$\Gamma_t = 2z_1\cos\theta_i/(z_2\cos\theta_i + z_1\cos\theta_t), \quad (5.2.4)$$

式中，z_1 和 z_2 分别为两组织的声阻抗率，且 $z=\rho c$，ρ 为密度.

而声强的反射系数 α_r 与折射系数 α_t 则为

$$\alpha_r = (z_2\cos\theta_i - z_1\cos\theta_t)^2/(z_2\cos\theta_i + z_1\cos\theta_t)^2, \quad (5.2.5)$$

$$\alpha_t = 4z_1z_2\cos\theta_i\cos\theta_t/(z_2\cos\theta_i + z_1\cos\theta_t)^2. \quad (5.2.6)$$

由能量守恒定律， $\alpha_r + \alpha_t = 1$， (5.2.7)

对于垂直入射的情况，$\theta_i = \theta_t = 0$. 式(5.2.3)—(5.2.6)可以简化为

$$\Gamma_r = (z_2 - z_1)/(z_2 + z_1), \quad (5.2.8)$$

$$\Gamma_t = 2z_1/(z_2 + z_1), \quad (5.2.9)$$

$$\alpha_r = (z_2 - z_1)^2/(z_2 + z_1)^2, \quad (5.2.10)$$

$$\alpha_t = 4z_1z_2/(z_2 + z_1)^2. \quad (5.2.11)$$

表 5.2.2 列出一些生物组织界面的声压和声强反射系数和透射系数的计算值(垂直入射情况). 实际上，由于生物组织表面有包膜存在，情况比较复杂，故表中所列的结果仅具有参考意义.

表5.2.2 一些生物组织界面的反射系数(垂直入射)

界 面	声压反射系数 Γ_r	声强反射系数 α_r
血液/脑	0.013	0.0002
血液/肾	0.009	0.0001
血液/肝	0.012	0.0002
血液/肌肉	0.018	0.0003
血液/脂肪	0.081	0.007
血液/骨	0.66	0.43
肌肉/骨	0.65	0.42
脂肪/肾	0.09	0.008
脂肪/肝	0.09	0.008
脂肪/肌肉	0.1	0.01
肾/肌肉	0.009	0.0001
肌肉/肺	0.73	0.53
肌肉/水	0.07	0.005

此外，当超声波传播至软组织与骨骼界面时，由于骨骼的声学

性质类似于固体，在斜入射情况下，将会有模式转换，即在骨骼中可产生折射纵波和横波. 此时，反射折射系数应由液体与固体界面处的反射折射规律来计算，公式较复杂，且从超声诊断的角度来看意义不大，此处从略.

5.2.3 声散射

超声波在非均匀介质中传播或遇到较小的(与声波长相比)非连续界面时，将偏离原来的传播方向而向四面八方传播，这种现象称为声散射. 严格说来，在大界面处发生的定向反射(亦称镜面反射)和折射也属于声散射. 但反射和折射问题比较简单，如5.2.2节中所讨论. 因而，一般说来，反射和折射问题不计入声散射.

由于生物组织的非均匀性，声波在其中传播时会发生散射. 研究声散射的经典方法主要强调声散射的总功率或全散射截面(总散射功率与入射于散射体上的功率之比). 然而，从超声诊断的角度来看，散射系数(散射信号声压与入射声压之比)随角度的分布特别是背向散射系数更为重要，因而也是目前研究的重点.

研究生物组织的声散射采用两种模型. 一种是离散模型，另一种是连续模型.

(一)离散模型

离散模型模拟的是在均匀介质中存在着离散分布的散射体的情况，如图5.2.2所示.

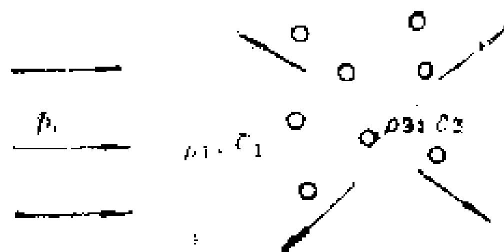


图5.2.2 声散射离散模型

图中，设周围介质的声学特性由密度 ρ_1 与声速 c_1 来描述，散射体的相应声学量为 ρ_2, c_2. 并假设其呈无规分布. 这种模型较好地模拟了血液散射的情况，血液中的散射体为红血球.

对这种模型，假设只有一个散射体，当入射波为平面纵波时，

$$p_i = p_0 \exp(-j\omega t + jkz), \tag{5.2.12}$$

其散射波可以通过解均匀液体的波动方程

$$\nabla^2 p - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0, \tag{5.2.13}$$

并代入边界条件来求得.

对于散射体尺寸远小于声波长的情况(在超声诊断用的频段,红血球满足此条件),解得散射声压及散射系数如下:

$$p_s = \frac{a}{r} p_{s0} \cdot e^{(-j\omega t + jkr)} \tag{5.2.14}$$

$$A_s = p_{s0}/p_0 = \frac{\tau k^2}{4\pi}\left[\frac{\chi_1 - \chi_2}{\chi_1} - \frac{3(\rho_1 - \rho_2)}{2\rho_1 + \rho_2}\cos\theta\right], \tag{5.2.15}$$

其中,τ 是散射体的体积,χ_1 和 χ_2 分别为周围介质和散射体的体弹性模量,其与声速、密度的关系为

$$c = \sqrt{\frac{\chi}{\rho}}, \tag{5.2.16}$$

或 $$\chi = c^2\rho,$$

θ 为散射波传播方向与入射方向的夹角. 而背向散射系数则为 ($\theta = 180°$)

$$A_s = \frac{\tau k^2}{4\pi}\left[\frac{\chi_1 - \chi_2}{\chi_1} + \frac{3(\rho_1 - \rho_2)}{2\rho_1 + \rho_2}\right]. \tag{5.2.17}$$

对于呈无规分布的许多散射体的情况,求得严格的解是比较困难的,我们只能根据超声诊断的实际情况以获得对散射信号的近似定量描述.

通常超声诊断用的声源发射脉冲信号记为 $a(t)\exp(-j\omega t)$,如图5.2.3(a)所示. 声源尺寸有限,且为圆对称式,其发射声压幅度的径向分布如图 5.2.3(b)所示,并记为 $b(r)$. 用同一换能器既作发射,又作接收,其所收到的背向散射信号如图 5.2.3(c)所示. 图5.2.3(c)还示出检波后的背向散射信号,亦称背向散射信号的包络,记为 $p_{env}(t)$. 图5.2.3(d)则表示背向散射信号包络的横向分布(换能器横向移动测得的由同一深度回来的散射信号幅度).

多个散射体的总散射信号可视为每一个散射体的散射波的线性叠加．考虑到入射于散射体 i 的入射波声压

$$p_i(r_i,z_i,t) = p_0 \cdot a(t - z_i/c)\exp(-j\omega t + jkz_i)b(r_i), \quad (5.2.18)$$

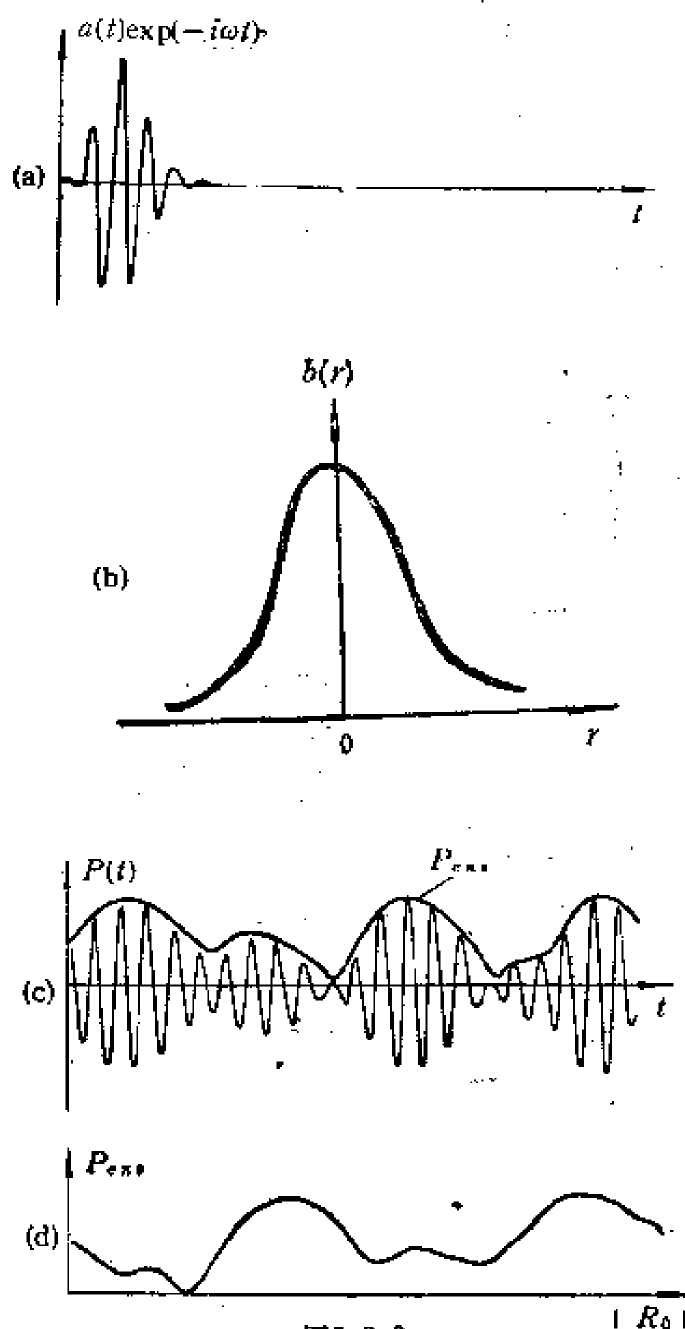


图5.2.3

(a)声源的时间特性 $a(t)\exp(-j\omega t)$；(b)声源的空间分布 $b(r)$；(c)背向散射信号及其包络；(d)包络的横向分布

则散射体 i 的散射声波到达接收换能器处的声压为

$$p_{si} = p_0 A_s a\left(t - \frac{2z_i}{c}\right) b(r_i) \frac{1}{z_i} \exp[j\omega t - 2kz_i], \qquad (5.2.19)$$

而到达换能器的总散射声压为

$$p_s = \sum_{i=1}^{N} p_{si}, \qquad (5.2.20)$$

N为散射体总数. 总散射声压除了与声源的特性 $a(t)$ 及 $b(r)$ 有关以外，显然还与散射体的分布有关. 假设单位体积内有 n 个散射体，且分布无规，任意两个散射体的间距的分布几率除了 $|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$ 远远小于波长外均为常数，如图 5.2.4 中的红血球对的几率分布的情况.

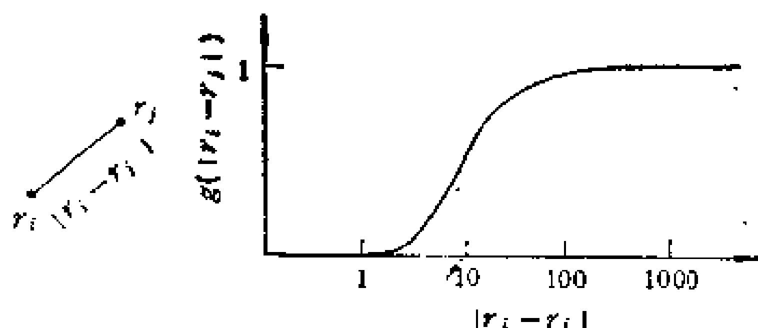


图5.2.4 红血球对的分布

在以上假设下，经过较烦琐的推导，可以求得按背向散射信号包络的平均值表示的背向散射系数：

$$\Pi = \frac{\langle p_{env} \rangle}{p_e} = \frac{\pi A_s}{t}\left[\frac{n(1-\alpha n)}{c_1}\int_{-\infty}^{\infty} dt \left(\frac{a(t)}{a(0)}\right)^2 \times \int_0^{\infty} dr\, r\left(\frac{b(r)}{b(0)}\right)^2\right]^{1/2}. \qquad (5.2.21)$$

式中，α 为各散射体体积的平均值，亦称散射体有效体积，$\alpha = \tau$. p_e 为在没有散射体存在时，在 $z = c_1 t/2$ 处放置一理想全反射板，换能器所收到的声压包络.

通常超声诊断用的换能器特性可以近似地用下式来表示：

$$a(t) = \exp(-t^2/2T_L^2), \qquad (5.2.22)$$

$$b(r) = \exp(-r/r_B), \qquad (5.2.23)$$

其中，T_L 和 r_B 分别为 $z = c_1 t/2$ 处的入射脉冲的长度和声束宽度

的量度．在这种条件下，式(5.2.21)可以简化为

$$H=\frac{\pi A_s r_B}{2t}\left(\frac{\sqrt{\pi}\,n(1-an)T_L}{c_1}\right)^{1/2}, \tag{5.2.24}$$

式(5.2.21)与(5.2.22)所描述的是背向散射信号包络的统计平均值．实际散射信号的包络则是起伏的，其随时间起伏，即随声束传播方向(纵向)起伏，如图 5.2.3(c) 所示；也随换能器的位置(横向)起伏，如图5.2.3(d)所示．描述这一起伏特性的最简单方法是引用两个量，即纵向涨落率 N_t 与横向涨落率 N_R．N_t 定义为单位时间内背向散射信号包络跨越平均包络线的次数（换能器位置保持不变），N_R 定义为换能器沿横向移动单位距离，同一时刻的背向散射信号幅值跨越相应的平均包络线的次数．对于取样体积内(宽度为 r_B，长度为 c_1T_L)散射体数目很大的情况(如血液中，典型的采样体积内的红血球数目可高达 10^8)，每个散射体散射波形的分布呈高斯无规分布，按统计学方法，通过计算散射波相关函数可以求得 N_t 和 N_R．对于换能器特性为式(5.2.22) 及 (5.2.23) 所示的情况，可以得到：

$$N_t=\frac{e^{-\pi/4}}{T_L\sqrt{2}}=\frac{0.322}{T_L}, \tag{5.2.25}$$

$$N_R=\frac{e^{-\pi/4}}{r_B\sqrt{2}}=\frac{0.322}{r_B}. \tag{5.2.26}$$

(二)连续模型

描述生物组织散射的另一种模型为连续模型，即认为整个组织的各声学参量连续变化，但其与相应的声学量的相对偏差都远小于 1，也就是说 $[\rho(\mathbf{r})-\rho_0]/\rho_0\ll 1$，$[c(\mathbf{r})-c_0]/c_0\ll 1$，等等．

在这种情况下，需要用非均匀介质的波动方程：

$$\nabla^2 p(\mathbf{r},t)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p(\mathbf{r},t)}{\partial t^2}-\nabla\ln\rho(\mathbf{r})\nabla p(\mathbf{r},t)=0, \tag{5.2.27}$$

或 $$\nabla^2 p-\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}=-\frac{2\Delta c}{c_0^3}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}+\frac{1}{\rho_0}\nabla(\Delta\rho)\nabla p. \tag{5.2.28}$$

式中，$$\Delta c=c(\mathbf{r})-c_0, \tag{5.2.29}$$

$$\Delta\rho = \rho(\mathbf{r}) - \rho_0, \tag{5.2.30}$$

且满足 $\Delta c/c_0 \leqslant 1$，$\Delta\rho/\rho_0 \ll 1$.

由式（5.2.28）可以看出，当介质存在密度和声速（或弹性模量）的微弱不均匀性时，在声波照射下会产生二次辐射. 密度的不均匀性 $\Delta\rho$ 所引起的辐射是有方向性的，体现于式中的 $\nabla(\Delta\rho)$，类似于一个偶极子声源，而声速（或弹性模量）的不均匀性 Δc（或 $\Delta\beta$）则相当于无方向性单极声源.

式(5.2.28)可以用微扰理论来求解. 设入射波为平面波，即无微扰零级解（相当于在均匀介质中的解）为

$$p_0 = A_0 \exp(-j\omega t + jkz), \tag{5.2.31}$$

可以推导出，散射波的一级近似解 p_1 应满足下面的方程：

$$\nabla^2 p_1 - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = \left[2k^2\frac{\Delta c}{c_0} + \frac{ik}{\rho_0}\frac{\partial(\Delta\rho)}{\partial z}\right]p_0 = -4\pi Q, \tag{5.2.32}$$

其中，Q 被看作是引起散射的声源密度，于是可得：

$$p_1 = \int_V \frac{Q\left(t - \dfrac{r}{c_0}\right)}{r}\,dv = -\frac{A_0}{2\pi}\int_V \left[2k^2\frac{\Delta c}{c_0} + \frac{ik}{\rho_0}\frac{\partial(\Delta\rho)}{\partial\zeta}\right] \times \frac{1}{r}\exp[jk(r+\zeta)]\,dv, \tag{5.2.33}$$

式中，V 为非均匀区域的体积，r 为由散射源 $S(\xi,\eta,\zeta)$ 到观察点 $P(x,y,z)$ 的距离，如图 5.2.5 所示.

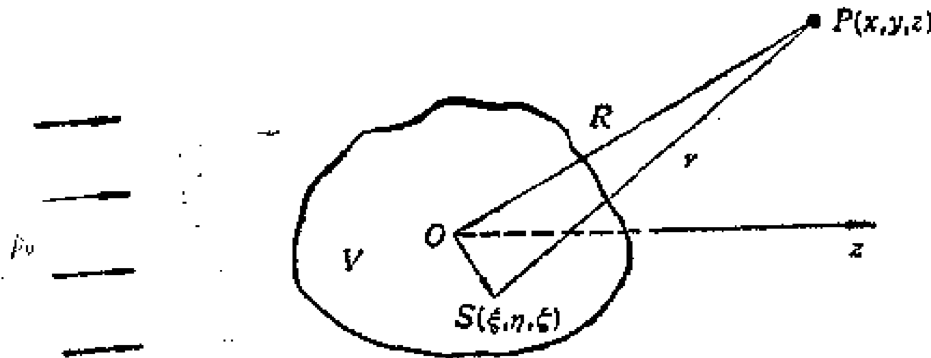


图5.2.5　散射源积分示意图

对于生物组织来说，通常是无法用一函数来确切描述 $\Delta\rho$ 与

Δc 的空间分布的，因而，也很难求出 p_1 的解. 实际上，由于生物组织非均匀性的无规性，p_1 一定是随空间位置起伏的量. 在这种情况下，我们感兴趣的是 p_1 的包络的平均值 $\langle|p_1|^2\rangle$ 及其起伏的统计规律.

为求解 $\langle|p_1|^2\rangle$，需要引入声学参量的相关函数以描述其非均匀的程度，即

$$N_{\alpha\beta}=\frac{\langle\Delta\alpha\Delta\beta\rangle}{\sqrt{\langle|\Delta\alpha|^2\rangle\langle|\Delta\beta|^2\rangle}},\tag{5.2.34}$$

$N_{\alpha\beta}$ 为声参量(如 ρ, c, β 等) α 和 β 的相关函数，如 α 和 β 为同一个量时，称为该量的自相关函数，二者若为不同的量，则称为 α 与 β 的互相关函数。

假设 $N_{\rho c}=0$，即密度的非均匀分布与声速的非均匀分布无关，且 $N_{\rho\rho}$ 与 N_{cc} 均为高斯分布，并表示为

$$N_{\rho\rho}=N_{cc}=N(q)=\exp(-q^2/d^2),\tag{5.2.35}$$

q 为所考虑的两点之间的距离。

设非均匀组织在一有限区域内，其最大线度为 L，且满足 $L\gg d$，即散射体内含有大量的非均匀单元。并假设观察点 P 到散射体中心的距离为 R (图5.2.5)，且 $R\gg kd^2$ (即远场情况)，及 $R\gg L$ 则可得

$$\langle|P_1|^2\rangle=\frac{VA_0^2k^4}{4\pi^2R^2}\left[\frac{\langle(\Delta c)^2\rangle}{c_0^2}+\frac{\langle(\Delta\rho)^2\rangle}{\rho_0^2}\sin^4\theta/2\right]$$
$$\times\pi^{3/2}d^3\exp(-k^2d^2\sin^2\theta/2),\tag{5.2.36}$$

式(5.2.36)考虑的是连续波的情况，此时，$\langle|p_1|^2\rangle$ 与散射体的总体积有关，V 表示散射体的总体积。对于脉冲情况，起作用的散射体的体积应为声脉冲在相应时刻作用的体积，此等效体积可以粗略地写为

$$V=r_b c_0 T_L,\tag{5.2.37}$$

式中，r_b 为等效声束宽度，T_L 为声脉冲宽度.

如果以体弹性模量和密度起伏来表示，式(5.2.36)的另一形式为

$$\langle |p_1|^2\rangle = \frac{VA_0^2k^4}{16\pi^2R^2}\left[\frac{\langle(\Delta\beta)^2\rangle}{\beta_0^2} + \frac{\langle(\Delta\rho)^2\rangle}{\rho_0^2}\{\cos^2\theta - 2(1-\cos\theta)^2\}\right]$$

$$\cdot\pi^{3/2}d^3\exp(-k^2d^2\sin^2\theta/2). \tag{5.2.38}$$

对于背向散射的情况，$\theta=180°$，由式(5.2.36)和式(5.2.38)可求得背向散射系数：

$$\Pi = \frac{k^2\sqrt{V}}{2\pi R}\left[\frac{\langle(\Delta c)^2\rangle}{c_0^2} + \frac{\langle(\Delta\rho)^2\rangle}{\rho_0^2}\right]^{\frac{1}{2}}\pi^{3/4}d^{3/2}$$

$$\times\exp\left(-\frac{1}{2}k^2d^2\right), \tag{5.2.39}$$

或

$$\Pi = \frac{k^2\sqrt{V}}{4\pi R}\left[\frac{\langle(\Delta\beta)^2\rangle}{\beta_0^2} - \frac{7\langle(\Delta\rho)^2\rangle}{\rho_0^2}\right]^{\frac{1}{2}}\pi^{3/4}d^{3/2}$$

$$\times\exp\left(-\frac{1}{2}k^2d^2\right). \tag{5.2.40}$$

当 $kd\ll1$ 时，

$$\Pi = \frac{k^2\sqrt{V}}{2\pi R}\left[\frac{\langle(\Delta c)^2\rangle}{c_0^2} + \frac{\langle(\Delta\rho)^2\rangle}{\rho_0^2}\right]^{\frac{1}{2}}\pi^{3/4}d^{3/2}, \tag{5.2.41}$$

或

$$\Pi = \frac{k^2\sqrt{V}}{4\pi R}\left[\frac{\langle(\Delta\beta)^2\rangle}{\beta_0^2} - \frac{7\langle(\Delta\rho)^2\rangle}{\rho_0^2}\right]^{\frac{1}{2}}\pi^{3/4}d^{3/2}. \tag{5.2.42}$$

仔细比较连续模型的背向散射系数的表示式(5.2.42)与离散模型的相应表示式(5.2.24)和(5.2.17)，可以看出，这两套结果是类似的(都是对于低频情况)．注意，式(5.2.42)中的体积压缩系数 β 与式(5.2.17)中的体积弹性模量 χ 互为倒数，即

$$\beta = \frac{1}{\chi}. \tag{5.2.43}$$

5.2.4 声衰减

超声波在介质中传播时，其强度往往随着传播距离的增大而减小．引起声强减小的主要原因有：(i) 声束扩散或衍射损失；(ii) 介质非均匀性造成的声散射损失；(iii) 声能转换成其它形式的能量(主要指热能)引起的声吸收损失．衍射损失主要取决于声

源的特性，因而通常在讨论介质特性时不予考虑．而声散射与声吸收造成的声衰减却主要取决于介质本身，且其造成的声压（平面声波）的变化按指数衰减规律，即

$$A(z)=A_0\exp(-\alpha z), \tag{5.2.44}$$

声强的变化则为

$$I(z)=I_0\exp(-\mu z), \tag{5.2.45}$$

$$\mu=2\alpha, \tag{5.2.46}$$

通常称 α 为介质的声衰减系数（或声压衰减系数），μ 为介质的声强衰减系数，并均以奈比/厘米（Np/cm）计，或以分贝/厘米（dB/cm）计，且

$$1\text{Np/cm}=8.686\ \text{dB/cm}. \tag{5.2.47}$$

在声强较低时，声衰减系数与声强无关，但它是频率的函数．在超声诊断频段（如 1MHz—10MHz），大多数生物组织的声衰减系数都较大，在实际应用中不能忽略．在这一频段，多数生物组织的声衰减系数都随频率升高而线性增加（接近于 1dB/cm·MHz，如表 5.2.1 所示）．因而，要根据超声诊断深度和信噪比的要求来选择适当的工作频段．

另一方面，由于不同生物组织的声衰减系数的大小以及随频率变化的规律都有所不同，因而声衰减系数这一参量对于定量诊断、组织鉴别有着重要意义．

下面，我们就生物组织声衰减的机理和基本规律按目前的研究结果作一些阐述．

（一）声吸收

超声波在纯弹性介质中传播时，其能量有两种形式：动能和弹性势能，这两种形式反复转换．由于介质的纯弹性性质，各点的声压和质点速度同相，总能量始终保持不变．然而，多数实际介质均不是纯弹性介质，其各点声压和质点速度间存在着弛豫现象，二者不同相，声能转化成其他形式的能量．例如，粘滞性引起声压和质点速度（或压缩率s）间的相移，其典型的 p–s 弛滞回线如图 5.2.6 所示．在纯弹性情况下，不存在弛滞现象，如 p 与 s 应同相变化，即

应沿直线3移动．当有粘滞性时，p与s总是有相位差，它们的变化沿曲线1—2移动．曲线1与2间的面积表示在一个周期内损失的声能．由介质的粘滞性所引起的声吸收系数为

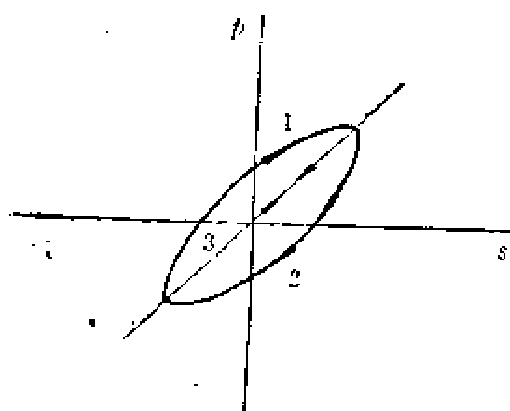


图5.2.6　典型的 p-s 弛滞回线
（直线3为无弛滞情况）

$$\alpha_v = 2\eta\omega^2/3\rho c^3, \qquad (5.2.48)$$

式中，η为粘滞系数．

生物组织的声吸收机理是复杂的，它不仅由粘滞性引起，而且与许多复杂的物理、化学弛豫过程及热传导有关．总的声吸收则为每个弛豫过程造成的声吸收的线性叠加．通常我们所关心的是声吸收的总效果，而不十分关心单个的弛豫过程，加之各种弛豫过程最终都产生热量，引起温度变化，我们集中考虑声压与温度变化间的相位延迟ϕ与声吸收的关系，可得：

$$\alpha_a = \frac{2\omega}{c}\sin[(\omega\Gamma\ln\gamma)/2(1+\omega^2\Gamma^2)^{1/2}], \qquad (5.2.49)$$

式中γ为绝热压缩系数与等温压缩系数之比，其值很接近于1．Γ为等效弛豫时间，且满足

$$\omega\Gamma = \tan\phi. \qquad (5.2.50)$$

当$\omega\Gamma \gg 1$时，$\omega\Gamma/(1+\omega^2\Gamma^2)^{1/2} \approx 1$，故(5.2.49)式可简化为

$$\alpha_a = \frac{2\omega}{c}\sin(\ln\gamma/2), \qquad (5.2.51)$$

又因为$\gamma \approx 1$，故$\ln\gamma \ll 1$，则

$$\alpha_a = \omega\ln\gamma/c, \qquad (5.2.52)$$

也就是说，吸收系数α_a与频率成线性关系．

当$\omega\Gamma \ll 1$时，则可得

$$\alpha_a = \omega^2\Gamma\ln\gamma/c, \qquad (5.2.53)$$

即吸收系数α_a与频率的平方成正比．

对于$\omega\Gamma$接近于1的情况，

$$\alpha_a = \omega \ln \nu'/c \cdot \frac{\omega \Gamma}{(1+\omega^2 \Gamma^2)^{1/2}}, \tag{5.2.54}$$

此时，α_a 与频率的关系比较复杂，它介于线性和二次方关系之间.

当我们考虑声吸收系数从很低频率($\omega\Gamma \ll 1$)到很高频率($\omega\Gamma \gg 1$)整个频段上的变化时，其经历由与频率的二次方关系到线性关系的变化. 对于超声诊断常用的频段，如从1—10MHz，多数生物组织的声吸收系数与频率的方次关系接近于 1 或略高于1. 而纯水的弛豫时间 Γ 远小于多数生物组织的 Γ 值，其声吸收系数与频率平方成比例.

根据声吸收系数和声速的实测值，用式(5.2.49)估算的水和几种生物组织的弛豫时间 Γ 及压缩系数比（亦称比热比）γ 示于表 5.2.3.

表5.2.3 几种介质的 Γ、γ 估算值*

介 质	声速 c(m/s)	Γ(μs)	γ
水**	1483	1.4×10^{-4}	1.00659
肾	1560	0.91	1.0007
心脏	1510	0.64	1.0007
脑	1570	0.15	1.0008
肝	1560	0.13	1.0009
血液	1565	0.06	1.0065

* 取自 *JASA* 第 72 卷第 6 期 C.M.Sehgal 和 J.F.Greenleaf 的文章.

** 温度为 20℃ 的数据.

实验表明，声吸收系数与温度有着密切的关系. 当温度由0℃升高至30℃时水的吸收系数(在 1MHz 时)由 66.5×10^{-5}Np/cm 降到 20×10^{-5}Np/cm. 而一些生物组织的声吸收系数却向相反方向变化，即随着温度的升高而升高. 例如，当温度由 2℃ 到 45℃ 时，小老鼠脊髓的声吸收系数由 0.034Np/cm 升高到 0.25Np/cm (1MHz 时). 这种随温度变化的不同趋势也可以由式(5.2.53)及式(5.2.51)来解释.

先看水的情况. 其声吸收系数及声速、γ 值随温度变化的测

量值及相应的 Γ 的估算值如表 5.2.4 所示.

表5.2.4 水 的 温 度 特 性*

温度T(℃)	α_a/f^2	c(m/s)	Γ(s)	γ
0°	68.5×10^{-17}	1402.7	4.2×10^{-9}	1.000583
10°	36.5×10^{-17}	1447.6	1.2×10^{-9}	1.001085
20°	24.0×10^{-17}	1482.7	1.4×10^{-10}	1.00656
30°	20.5×10^{-17}	1509.4	5.2×10^{-11}	1.01526

*取自 *JASA* 第 72 卷第 6 期 C.M.Sehgal 和 J.F.Greenleaf 的文章.

对于水，$\omega\Gamma\ll1$，其声吸收系数由式(5.2.53)表示，可见，它与 $\Gamma\ln\gamma$ 成正比. 由于 γ 值随温度升高而升高，即 $\ln\gamma$ 随温度而升高，而 Γ 则随温度升高而减小，由于 Γ 减小的速率比 $\ln\gamma$ 升高的速率要快，因而其总效果是声吸收系数随温度的升高而降低.

对于多数生物组织，在感兴趣的频段，$\omega\Gamma\gg1$，故声吸收系数由式(5.2.51)表示. 显然，其声吸收系数与 Γ 无关而仅由 $\ln\gamma$ 来决定，因而声吸收系数随温度升高而升高.

(二)声散射引起的衰减

在介质的声吸收系数不能忽略的情况下，在求解非均匀介质的声散射问题时，波动方程应作些修正. 也就是说，应以复数声速代替无吸收介质的实数声速，即

$$c=c_R-jc_I, \tag{5.2.55}$$

c_I 与吸收系数的关系式为

$$\alpha_a=\frac{c_I}{c_R^2}\omega, \tag{5.2.56}$$

或

$$c_I=\alpha_a c_R^2/\omega, \tag{5.2.57}$$

将式(5.2.55)代入 §5.2.3中的各有关散射公式，即可得有吸收介质的散射问题的解.

声散射造成声能向四面八方扩散，而引起沿主要传播方向的声能的衰减. 以连续模型的声散射为例，由于散射所引起的声强的变化为

$$\frac{\Delta_I}{I}=\frac{-\oint\langle|p_1|^2\rangle ds}{A_0^2 S},\tag{5.2.58}$$

式中，$\oint$ 表示在包围散射体的封闭曲面上积分，S 为散射体横截面积.

考虑经过长度为 Δz 的一段散射体后声强的变化，由式(5.2.36)，可以推算得

$$\frac{\Delta I}{I}=-\alpha_s\Delta z,\tag{5.2.59}$$

则

$$I=I_0e^{-\alpha_s z},\tag{5.2.60}$$

其中，

$$\alpha_s=\sqrt{\pi}\ k^2d\ \frac{\langle(\Delta c)^2\rangle}{c_0^2}(1-\exp(-k^2d^2))-\frac{\langle(\Delta\rho)^2\rangle}{\rho_0^2}Q,\tag{5.2.61}$$

为散射引起的声衰减系数，Q 的表示式较为复杂：

$$Q=4k^3\int_0^\infty q\exp(-q^2/d^2)\int_0^1 x^4\sin 2kqx\,dx\,dq,\tag{5.2.62}$$

Q 式是可积的，但最后结果太烦杂，不再列出.

应注意到，式(5.2.61)是由式(5.2.36)推导而来，故式(5.2.36)得以成立的全部假设对式(5.2.61)都有效，例如声速 c 及密度 ρ 的相关函数均为 $\exp(-q^2/d^2)$ 及 $R\gg L\gg d$ 等.

在有些情况下，$\Delta\rho/\rho_0$ 比 $\Delta c/c_0$ 小得多，此时，α_s 中与 $\Delta\rho/\rho_0$ 有关的项可以忽略，因而可得到较简单的 α_s 表示式：

$$\alpha_s=\sqrt{\pi}\ k^2d\ \frac{\langle(\Delta c)^2\rangle}{c_0^2}[1-\exp(-k^2d^2)].\tag{5.2.63}$$

此时，如果 $kd\ll 1$，即在低频极限下，

$$\alpha_s=\sqrt{\pi}\,k^4d^3\,\frac{\langle(\Delta c)^2\rangle}{c_0^2},\tag{5.2.64}$$

即散射衰减与频率的四次方成比例，此与瑞利散射一致. 如果 $kd\gg 1$，即在高频极限下，

$$\alpha_s=\sqrt{\pi}\,k^2d\langle(\Delta c)^2\rangle/c_0^2,\tag{5.2.65}$$

即散射衰减与频率平方成比例.

然而，在多数情况下，$\Delta\rho/\rho_0$ 项不能忽略，此时，α_s 与频率的关系则比较复杂.

声散射所引起的声衰减与声吸收之和构成了生物组织的总声衰减，即

$$\alpha = \alpha_a + \alpha_s. \tag{5.2.66}$$

多数生物组织在超声诊断频段的声散射衰减、声吸收及总声衰减均与频率的一次方成正比.

5.2.5 频散

声波在某些介质中传播时，其相速度随频率变化的现象称为频散. 在某些文献中，亦将某种声学性质(不仅仅是相速度)随频率变化的现象称为频散，但在这种情况下，常常标明特指的量. 例如，在谈到声衰减随频率的变化关系式时，常称“声衰减的频散”. 本节中我们指的频散则是按照最常用的定义，即指的是声速度的频散.

介质的频散特性与其衰减特性存在着一定的关系. 对于频散系数比较小的情况 $\left(\frac{dc}{d\omega}\frac{\omega_0}{c_0}\ll 1\right)$，线性声学系统的频散与声衰减系数满足 Kramers-Kronig 关系式，即

$$\frac{dc}{d\omega} = \frac{2c^2\alpha}{\pi\omega^2}. \tag{5.2.67}$$

对于只有声吸收而无散射的均匀介质，因为 $\alpha_s = 0$，故 $\alpha = \alpha_a$. 将式(5.2.54)代入式(5.2.67)，可得

$$\frac{dc}{c} = \frac{2}{\pi}\ln\gamma\,\frac{\omega\Gamma}{(1+\omega^2\Gamma^2)^{1/2}}\,\frac{d\omega}{\omega}, \tag{5.2.68}$$

则

$$\ln\frac{c}{c_0} = \frac{2}{\pi}\ln\gamma\ln\frac{\omega\Gamma + (\omega^2\Gamma^2+1)^{1/2}}{\omega_0\Gamma + (\omega_0^2\Gamma^2+1)^{1/2}}. \tag{5.2.69}$$

代入 $c = c_0 + \Delta c$，且 $\Delta c/c_0 \ll 1$，则

$$\Delta c = \frac{2c_0}{\pi}\ln\gamma\ln\frac{\omega\Gamma + (\omega^2\Gamma^2+1)^{1/2}}{\omega_0\Gamma + (\omega_0^2\Gamma^2+1)^{1/2}}. \tag{5.2.70}$$

当 $\omega\Gamma \ll 1$ 时(例如水、植物油等均匀液体),

$$\Delta c = \frac{2c_0}{\pi} \ln\gamma(\omega - \omega_0)\Gamma. \tag{5.2.71}$$

当 $\omega\Gamma \gg 1$ 时,例如多数生物组织在数兆周频段,

$$\Delta c = \frac{2c_0}{\pi} \ln\gamma \ln \frac{\omega}{\omega_0}. \tag{5.2.72}$$

对于生物组织,式(5.2.72)只考虑了声吸收相应的频散. 由于生物组织的声散射不可忽略,总频散比式(5.2.72)所描述的要大. 在超声诊断频段,多数生物组织的总声衰减系数可近似地描述成:

$$\alpha = \beta f, \tag{5.2.73}$$

式中,β 为声衰减系数斜率.

将式(5.2.73)代入式(5.2.67),可得

$$\frac{dc}{d\omega} = \frac{c^2\beta}{\pi^2\omega}, \tag{5.2.74}$$

则

$$\Delta c = \frac{c_0^2}{\pi^2} \beta \ln \frac{\omega}{\omega_0}. \tag{5.2.75}$$

实验表明,多数生物组织的频散满足 Kramers-Kronig 关系式,在超声诊断频段,式(5.2.75)近似成立.

5.2.6 非线性

在前面的讨论中,我们都将生物组织看成声的线性系统,也就是说,认为在声波传播过程中,声速度可以看成常数,与声波的幅度无关,而声压的变化与介质密度的变化成正比,即

$$\Delta p = A \frac{\Delta\rho}{\rho_0}, \tag{5.2.76}$$

式中,ρ_0 为静态密度.

同时,我们还假设质点振动位移很小,即 $\nabla \cdot \mathbf{u} \ll 1$ ($\mathbf{u}$ 为位移矢量),于是我们得到了线性波动方程,如式(5.2.13)或式(5.2.27).

线性化波动方程的求解比较容易,且对于大多数声学问题的描述(如前面各小节讨论的问题)已经够用,但它还不能描述全部

问题，例如不能反映介质的非线性特性等.

实际上，多数介质都是具有非线性特性的. 也就是说，介质各处声压和密度变化之间并非线性关系，而是幂级数关系，即

$$\Delta p = A\frac{\Delta\rho}{\rho_0} + \frac{B}{2!}\left(\frac{\Delta\rho}{\rho_0}\right)^2 + \frac{c}{3!}\left(\frac{\Delta\rho}{\rho_0}\right)^3 + \cdots, \qquad (5.2.77)$$

其中

$$A = \rho_0\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_{s,\rho_0} = \rho_0 c_0^2, \qquad (5.2.78)$$

$$B = \rho_0^2\left(\frac{\partial^2 p}{\partial\rho^2}\right)_{s,\rho_0}, \qquad (5.2.79)$$

$$c = \rho_0^3\left(\frac{\partial^3 p}{\partial\rho^3}\right)_{s,\rho_0}, \qquad (5.2.80)$$

式中，c_0 为小振幅下的声速，下标 s 表示在绝热条件下，下标 ρ_0 表示微分在 $\rho=\rho_0$ 附近进行.

如果忽略三级和三级以上的小量，则

$$\Delta p = A\frac{\Delta\rho}{\rho_0} + \frac{B}{2}\left(\frac{\Delta\rho}{\rho_0}\right)^2. \qquad (5.2.81)$$

在这种近似下，可得介质的非线性波动方程，其一维形式为

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = \frac{c_0^2}{\left(1+\dfrac{\partial\xi}{\partial x}\right)^{(B/A)+2}}\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}, \qquad (5.2.82)$$

式中，ξ 为在 x 方向的位移分量，B/A 是描述介质非线性特性的参量，称为介质的非线性参量. 对于生物组织，B/A 这个量与组织结构有着密切的关系，故 B/A 参量与其他声学参量一样对超声诊断特别是定量组织鉴别有着十分重要的意义.

由式(5.2.82)可得

$$B/A = \frac{2\rho_0 c_0^3}{\pi}\left[\frac{p_2(x)}{x p_1(0)}\right] - 2, \qquad (5.2.83)$$

式中，$p_2(x)$ 为由于非线性而产生的二次谐波的幅度，而 $p_1(0)$ 为在声源处人射声波的幅度.

非线性参数也与介质的热力学特性有关，其关系可以表示为

$$B/A = 2\rho_0 c_0 \left(\frac{\partial c}{\partial P}\right)_{\kappa} + \frac{2c_0 T^*}{cP}\left(\frac{\partial c}{\partial T}\right)_P, \qquad (5.2.84)$$

式中，κ 为体积压缩系数，P为总压力.

用声学方法[亦称有限振幅法，按式(5.2.83)计算]测量的B/A及用热力学方法[式(5.2.84)]测得的 B/A 值列于表 5.2.5.

表5.2.5 用不同方法测得的 B/A 参量的比较*

介质	B/A(热力学法)	B/A(有限振幅法)
水	5.31	5.3
牛血清蛋白(BSA38.9%)	6.68	6.64
牛肝	6.8	6.4

* 取自 F.Dunn 的结果.

显然，这两种方法所测得的结果符合较好. 牛肝的两种结果有些区别，估计原因是接收换能器与发射换能器间距离的测量误差，死的牛肝也有不同程度的变质所致.

5.2.7 多普勒效应

在声源和接收器之间存在着相对运动的情况下，所接收到的声信号的频率与声源的频率有差别，这种效应称为多普勒效应. 而接收信号频率 f_R 与声源频率 f_S 之差 f_D 称为多普勒频移，相应的差频信号称为多普勒信号.

由于多普勒效应，接收信号频率与声源及接收器的运动速度之间的关系为

$$f_R = \frac{c + v_R}{c - v_S} f_S, \qquad (5.2.85)$$

式中，v_R 和 v_S 分别为接收器朝着声源方向运动的速度及声源朝着接收器方向运动的速度，如果接收器的运动方向与其朝着声源的方向的夹角为 θ_R，声源运动方向与其朝着接收器的方向的夹角为θ_S，则式(5.2.85)应修正为

$$f_R = \frac{c + v_R\cos\theta_R}{c - v_S\cos\theta_S} f_S. \qquad (5.2.86)$$

多普勒频移则为

$$f_D = f_R - f_S = \frac{v_R\cos\theta_R + v_S\cos\theta_S}{c - v_S\cos\theta_S} f_S. \tag{5.2.87}$$

通常，接收器的运动速度远小于介质的声速，故式(5.2.87)可以简化为

$$f_D = \frac{1}{c}(v_R\cos\theta_R + v_S\cos\theta_S) f_S. \tag{5.2.88}$$

对于声波入射于运动的反射体或散射体的情况，如果声源和接收器为同一换能器，或位于很靠近的位置，且静止不动，这时，可将反射体既当作运动的接收器又当作运动声源来处理. 也就是说，对于声源来讲，此反射体接收声波，可视为运动接收器；而对接收器而言，此物体又可视为运动声源. 因而，接收器所收到的信号的多普勒频移包含了运动反射体的两种作用，故可以表示为

$$f_D = \frac{2v}{c}\cos\theta f_S. \tag{5.2.89}$$

式中，v 为反射体(或散射体)的运动速度，θ 为其运动方向与其朝着换能器方向间的夹角.

通常在超声诊断中碰到的都是换能器(声源和接收器)不动而反射(或散射)体运动的情况，例如用多普勒诊断仪检查人体内心脏、血管的运动及血流等，因而，式(5.2.89)是多普勒效应在超声诊断中应用的主要依据，即通过测定多普勒频移可以估算体内运动器官及血液的运动等.

严格说来，上述公式(5.2.85)—(5.2.89)只适用于连续波工作状态及声束为无限宽、运动物体为无限大平面，且运动速度为常数的情况. 在这种情况下，接收信号及多普勒信号均为单一频率. 这些条件中，只要有一个不满足，则所得到的多普勒信号就不是单频信号，而是有一定的谱宽. 在超声诊断的实际情况下，声束宽度和运动物体的大小都有限，即使发射声波为连续波，接收信号也会是调幅波，因而多普勒信号也有一定带宽. 为说明这一点，我们以点运动物体为例.

参看图 5.2.7. 设换能器发射一连续声波，其波形和频谱分别如图 5.2.7(b) 和(c)所示. 点物体 P 以一定速度进入声束照射区域，并散射声波，为置于与发射换能器邻近位置的接收器所接收. 由于只有当物体 P 在声束照射范围内时才有散射波存在，且发射声束的强度呈一定分布，故接收信号为一调幅脉冲，其宽度与

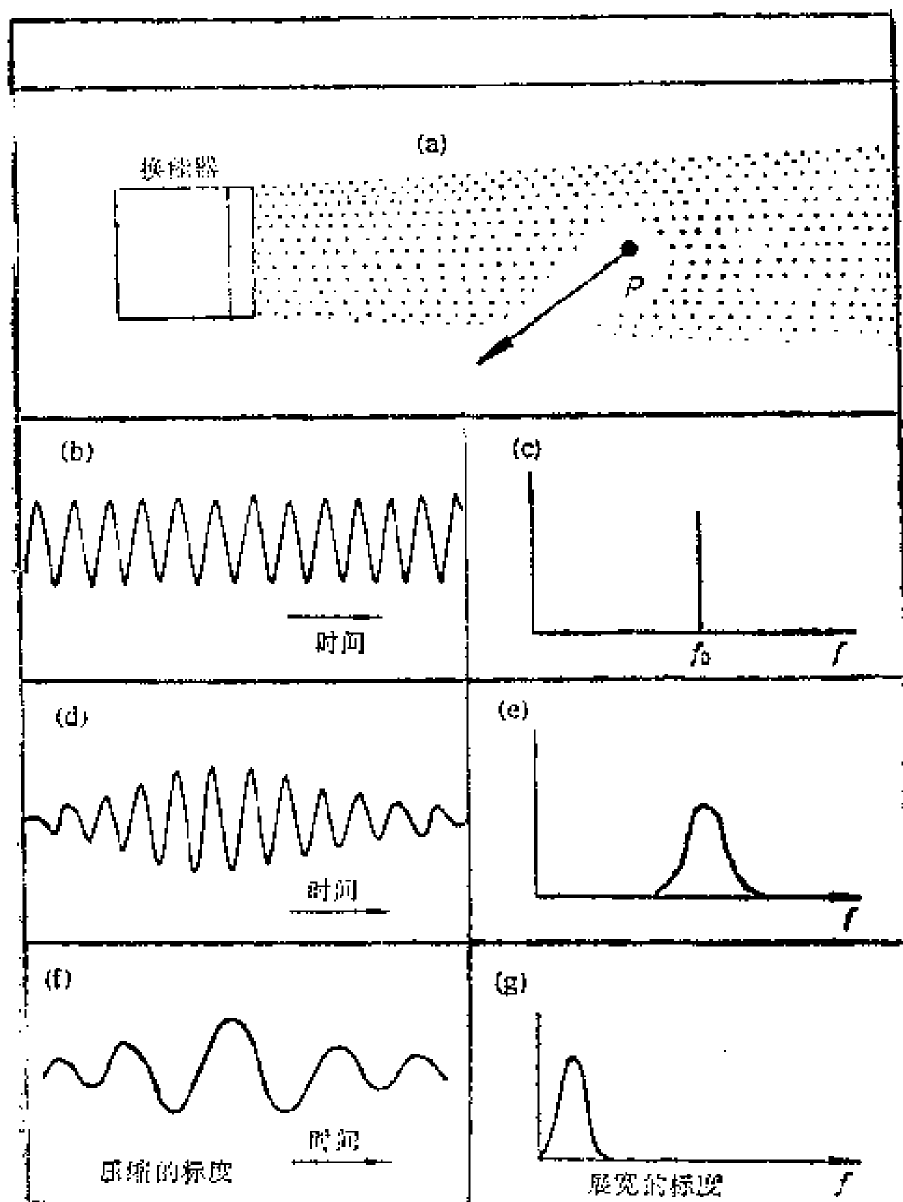


图5.2.7　多普勒信号的频谱展宽

(a) 点物体在有限宽度声束中的运动；(b) 发射声波(连续波)；
(c) 发射声波的频谱；(d) 接收信号(幅度受到调制)；
(e) 接收信号的频谱；(f) 多普勒信号；(g) 多普勒信号频谱

声束宽度及物体横向运动速度分量有关，其中心频率与声源频率的偏移取决于物体运动速度沿声束轴向分量. 接收信号的波形及其频谱如图 5.2.7(d) 和(e)所示. 经与声源激励信号的差频，所得的多普勒信号的波形和频谱示于图 5.2.7(f) 和 (g). 显然，由于声束的宽度有限造成了接收信号的调幅，从而使多普勒信号的频谱变宽. 很容易看出，声束越窄，接收信号越短，多普勒频宽越大，速度分辨率就越低. 也就是说，利用多普勒效应来估算物体运动速度时，速度分辨率随声束变窄而降低. 然而，系统的横向分辨率却随声束变窄而提高. 因而，多普勒系统的横向分辨率和速度分辨率是互相矛盾的，在实际应用中要有适当的折衷.

§5.3 用于超声诊断的换能器

5.3.1 对超声诊断换能器的基本要求

超声诊断的实现是通过各种型式的超声诊断设备来进行的. 而各种超声诊断设备的关键部件是超声换能器，亦称探头. 大多数诊断仪用的超声换能器都既作发射，又作接收. 即既向体内发射声波，又接收经体内组织调制的回声信号. 超声换能器的性能对诊断仪的质量有着决定性的影响，对于超声诊断来讲，超声波作为信息载体，我们不希望其对生物组织有任何作用或效应，因而要求射入体内的声波强度尽可能低，但又要得到能从噪声中鉴别出来的信号，也就是说，要求超声换能器有高的灵敏比和信噪比. 此外，为了获得疾病诊断(例 如癌症的早期诊断)所必要的分辨率，要求超声换能器有较高的纵向和横向分辨率等.

(一)灵敏度(插入损耗)及信噪比

一个兼作发射和接收的换能器的发收灵敏度可用其双向插入损耗来描述.

换能器的插入损耗是与激励电源的内阻有密切关系的. 为了能够有一个比较统一的评价，鉴于目前通用的标准信号源的内阻通常为 50Ω，故通常按激励电源内阻为 50Ω 时换能器的插入损耗

来评价换能器.

换能器插入损耗的测量方法如图 5.3.1 所示. 首先，选用阻值与电源内阻 R_0 相同的负载，测量负载两端的电压V_0.通常，激励电源信号为中心频率为 f 的调制方法 $E(f)$，则负载R_0 两端的电压为相似的调制方波，如图5.3.1(a)所示，且大小为

$$V_0(f)=\frac{1}{2}E(f). \tag{5.3.1}$$

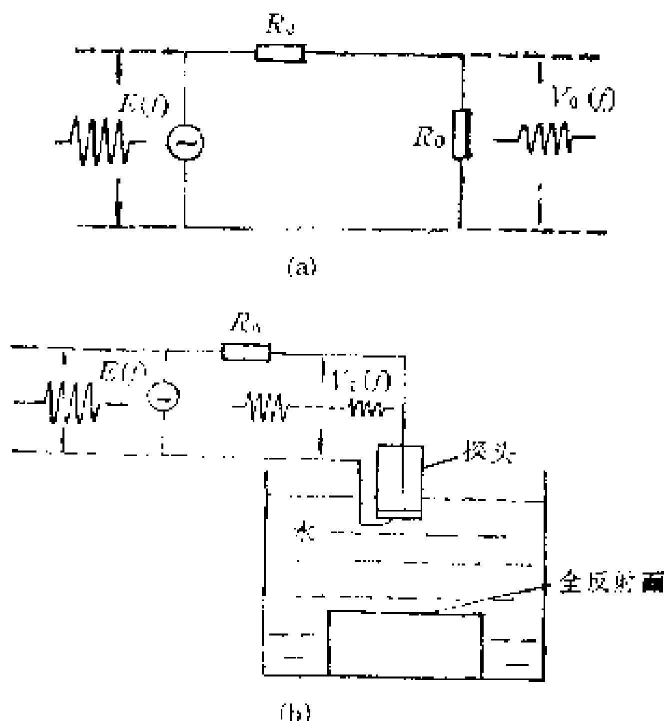


图5.3.1 换能器插入损耗的测量(负载为水) (a) 电源最大输出电功率的测量，(b) 换能器接收信号功率(经过电-声和声-电两次转换)的测量

在这种情况下，负载所得到的电功率为此电源能够提供的最大输出电功率，即

$$W_0(f)=V_0^2(f)/R_0=E^2(f)/4R_0. \tag{5.3.2}$$

然后，设我们要测量换能器向水中辐射声波时的插入损耗. 则将换能器置入水中，使其声束垂直入射于一全反射面，反射信号也为该换能器接收，如图5.3.1(b)所示. 由于在低兆赫频段水的声衰减系数很小，且使换能器与反射面的距离足够近，故水中声衰减及衍射造成的损耗均可忽略不计，则所接收到的反射信号 $V_1(f)$ 即为换能器本身由电到声再由声到电两次转换后的信号，经这两次转换后所得到的电信号的功率 $W_1(f)$ 与电源最大输出功率 $W_0(f)$之比称为换能器的插入损耗，通常以分贝数 L 来表示，即

$$L=-10\lg\frac{W(f)}{W_0(f)}=-20\lg\frac{V(f)}{V_0(f)}. \tag{5.3.3}$$

典型的超声诊断换能器插入损耗与频率的关系如图 5.3.2 所

示.

由式(5.3.3)可知,换能器插入损耗的频率特性与通常所指的换能器在频域的脉冲响应特性(或称为频率响应)之间只差一个负号. 此外,一般说来,前者是一个绝对量,而后者是一个相对量,并常常将插入损耗最小(输出信号最大)的频率 f_0 对应的频率分量作为0分贝(或幅值为1). f_0 常常称为换能器的中心频率. 换能器插入损耗的理论计算通常采用等效电路法,如采用 Mason 等效电路或 KLM 等效电路等,具体算法此处从略.

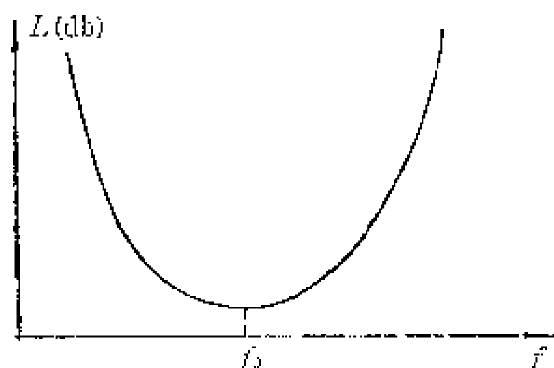


图5.3.2 典型的超声诊断换能器的插入损耗频率特性

超声诊断要求一定的信噪比. 在噪声电平一定的情况下,要求信号要大于某一定值. 增大有用信号的方法有两种,一是增加激励源电压,也就是增加发射声功率,然而这必须是有限度的,因为增加声功率一方面可能造成对人体有害,另一方面也增加了电路的难度. 第二种方法则是提高换能器的灵敏度,这是换能器好坏的一个重要标志.

换能器的灵敏度(或插入损耗)与换能器和电源内阻间的阻抗匹配密切相关. 由于医用超声换能器的声负载(生物组织)的声阻抗率与换能器材料严重失配,灵敏度往往较低.为了提高换能器的灵敏度(即减小插入损耗),需要采用声匹配和电路匹配方法. 由于换能器的输入阻抗为频率的函数,故很难实现在整个频域的阻抗匹配. 现实的办法是力求在较宽的频段内实现较好的阻抗匹配. 在这种要求下,从声阻抗匹配来讲,可以推导出,应选用薄层匹配材料,其声阻抗率 z_m 应近似为

$$z_m=(z_T z_L^2)^{1/3}, \qquad (5.3.4)$$

式中,z_T、z_L 分别为换能器及负载的声阻抗率. 匹配层的厚度则约为换能器中心频率对应声波长的四分之一. 电路匹配则包括有

源匹配和无源匹配．有源匹配比较复杂，使用较少．无源匹配电路则常用如图 5.3.3 所示的两种型式．图 5.3.3(a) 为串联式，5.3.3(b) 为并联式．这两种型式均采用两个电感、一个电容，其数值可根据对换能器插入损耗频率特性的要求，利用计算机用逼近最佳状态的迭代算法来计算，也可以通过实验调试．为了得到较好的匹配效果，换能器静电容 c_0 在中心频率 f_0 时的容抗应与电源内阻 R_0 比较接近，即 $\frac{1}{\omega_0 c_0}$ 应接近于 R_0．否则还需要用高频变压器来调整电源内阻，或重新设计换能器，使其 $\frac{1}{\omega_0 c_0}$ 与 R_0 接近．

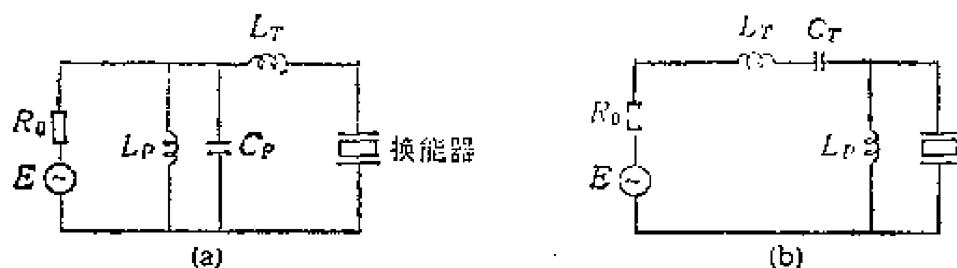


图5.3.3　几种换能器电路匹配方式
(a) 串联式；　(b) 并联式

声、电匹配可以使换能器的频带变宽．插入损耗减小，因而换能器的灵敏度提高，在同样激励源和背景噪声的情况下，信噪比也提高．

(二)脉冲响应与纵向分辨率

当激励源为一个 δ 电脉冲时，自发自收的换能器所输出的电信号(设介质中无传播损耗)称为换能器的脉冲响应，如图 5.3.4 所示．显然，换能器的输出脉冲为持续一段时间的振荡信号，振荡频率约等于换能器的中心频率 f_0．输出信号幅度大于信号最大幅度 10% 的脉冲持续时间 τ 与其中所含振荡周期数 N 间的关系为

$$\tau = N/f_0, \tag{5.3.6}$$

通常，N 可以用来粗略衡量换能器脉冲特性的好坏．N 值与换能器的相对带宽密切相关，一般说来，相对带宽大，则 N 小，脉冲窄，反之，则 N 大，脉冲宽．但是，N 值还与换能器频率响应的形状有很大关系．频响曲线越接近于高斯型，在同样相对带宽下，N 值越

小，脉冲越窄.

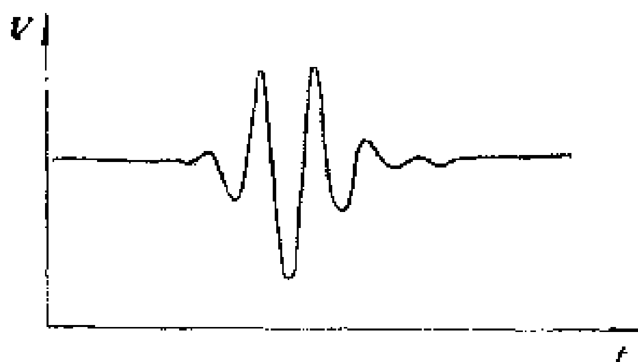


图5.3.4　换能器的脉冲响应

如前面所述，为了有一个统一的评价标准，在谈到换能器插入损耗时，通常都指电源内阻为50Ω的情况．同样，换能器的脉冲响应也是在这样条件下评价．然而，在实际的超声诊断应用中，更重要的是换能器与系统的激励电源配合时的脉冲响应，即系统的脉冲响应．而系统的纵向分辨率 d_l 则是与此脉冲响应直接相关，对于使用反射信号的情况，它可表示为

$$d_l=\frac{1}{2}c\tau=cN/2f_0. \tag{5.3.6}$$

声、电匹配不仅可以提高换能器灵敏度，而且可以改善脉冲响应特性，从而提高系统的纵向分辨率．在许多超声诊断设备中，为了简化匹配电路的调整，往往只采用一个串联电感或一个并联电感来实现电路匹配，所得到的效果也比较令人满意.

（三）声束宽度与横向分辨率

无论是超声诊断，还是超声治疗，声波的作用区域或声场分布都是很受关注的．一个有限尺寸的换能器的声场分布，可以按照惠更斯原理，将其看成许多小“点”源，通过对整个换能器区域的积分来求得．对于圆形活塞式换能器，其声场可分为近场和远场来描述．远、近场交界面离换能器表面的距离 z_0 可按下式计算：

$$z_0=(4a^2-\lambda^2)/4\lambda, \tag{5.3.7}$$

式中，a 为换能器的半径，λ 为介质中声波长.

在近场区域，无论横向还是沿轴线方向，换能器产生的声压分布都是起伏的，且质点振动速度与声压之间不同相．其平均声束宽度基本上与换能器的大小相同．在远场区域，声压沿轴向单调下降，当到换能器的距离 $r\gg z_0$ 时，声压幅度可用下式表示：

$$p(r,\theta)=\frac{1}{r}\frac{J_1(ka\sin\theta)}{ka\sin\theta}=\frac{1}{r}f(\theta).\tag{5.3.8}$$

式中，$f(\theta)$ 为换能器的指向性函数，

$$f(\theta)=\frac{J_1(ka\sin\theta)}{ka\sin\theta},\tag{5.3.9}$$

θ 为观察点到换能器中心连线与声束轴线之间的夹角，$J_1(x)$ 为第一类一阶贝塞尔函数.

一个典型的换能器的指向性图如图 5.3.5 实线所示.

在指向性图中，两个最靠近声束轴线的极小方向($\pm\theta_1$)间的声束称为主瓣. θ_1 满足：

$$\sin\theta_1=0.61\frac{\lambda}{a}.\tag{5.3.10}$$

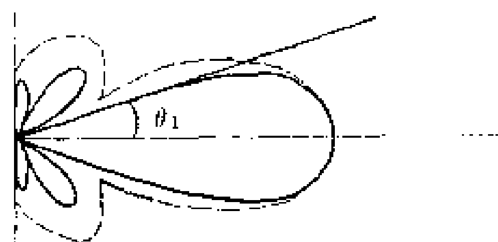


图5.3.5 换能器指向性图，实线为连续波，虚线为脉冲波

声束宽度 d_L 定义为声压幅值大于最大方向幅值的 70%(3dB 宽度)的宽度，并由下式表示：

$$d_L=\frac{\lambda z}{2a}.\tag{5.3.11}$$

在脉冲工作情况下，由于相干长度较短，因而方向性的起伏较小，即旁瓣较少，如图 5.3.5 中的虚线所示. 其主瓣张角 θ_1 及声束宽度仍可近似地根据其中心频率按式(5.3.10) 和式(5.3.11)计算.

显然，超声诊断系统的横向分辨率是由换能器的声束宽度来决定的，即可以近似地用 d_L 来表示(详见 5.5 节). 由式(5.3.11)可知，在远场中，声束宽度随着与换能器的距离的增加而增加，因而横向分辨率也随与换能器的距离而降低，而这是超声诊断设备所不希望的.

5.3.2 聚焦换能器的声场特性

平面活塞式换能器的最小声束宽度近似为换能器的横向尺

寸．在远场中，声束宽度迅速扩大，这就严重限制了系统的横向分辨率．为了提高横向分辨率，超声诊断设备多数采用聚焦换能器．最简单的聚焦换能器为球面换能器或用平面换能器加上聚焦声透镜．现以球面换能器为例来说明聚焦换能器的声场特性和主要参数．

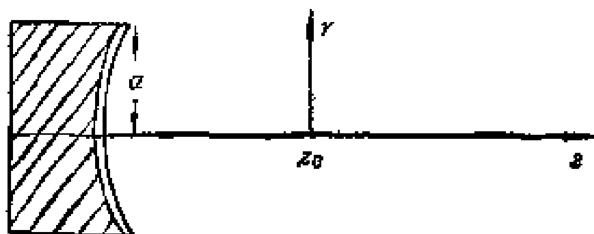


图5.3.6 球面聚焦换能器

设球面换能器的横向半径为 a，曲率半径为 z_0，如图 5.3.6 所示．

如同计算平面圆形活塞换能器的声场一样，球面换能器的声场也可根据惠更斯原理用积分方法来求得．可以证明，声束宽度最小的平面约在 $z=z_0$ 处，称为焦平面．在焦平面内声压幅度的横向分布为

$$p(z_0,r)=p_0\frac{\pi a^2}{z_0\lambda}\frac{2J_1(kra/z_0)}{kra/z_0}, \tag{5.3.12}$$

式中，r 为离开声束轴线的距离．

由式(5.3.12)，可以计算焦平面内声压横向分布曲线，如图 5.3.7 所示，图中 $\mathrm{jinc}(x)=\dfrac{J_1(x)}{x}$．并可算出，第一零点处直径为

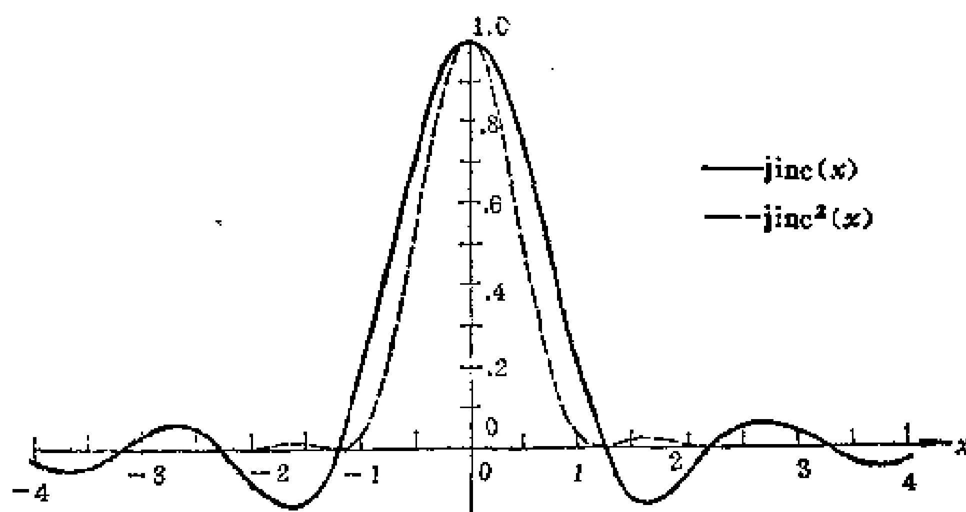


图5.3.7 球面聚焦换能器焦平面内声压的横向分布

$$d_0=\frac{1.22z_0\lambda}{a}. \tag{5.3.13}$$

在焦点附近，声压的轴向分布则如下式表示，并示于图5.3.8.

$$p(z,0)=p(z_0,0)\frac{z_0^2}{z}\operatorname{sinc}^2\left[\frac{a^2}{2\lambda z_0}\left(\frac{z}{z_0}-1\right)\right], \tag{5.3.14}$$

其中

$$\operatorname{sinc} x=\frac{\sin\pi x}{\pi x}. \tag{5.3.15}$$

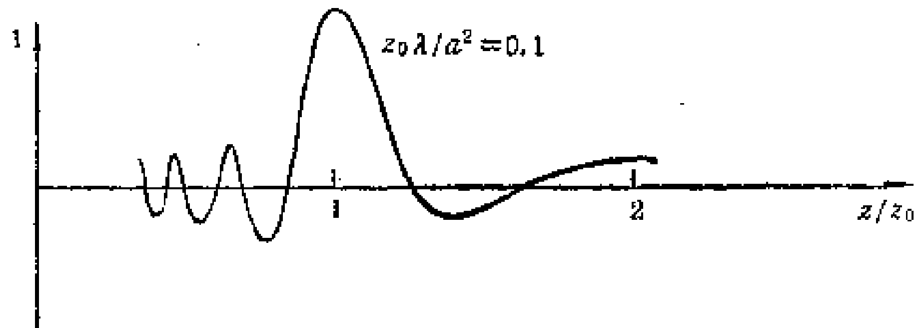


图5.3.8　球面聚焦换能器声压的轴向分布

通常用来描述聚焦换能器的参数有三个：焦距、焦点大小和焦柱长度. 焦距在前面已作了定义，对于球面换能器来讲主要取决于球半径 z_0.

焦点大小按声压幅度比最大值下降 3db 处声束的宽度来计算，其为

$$d_L=\frac{z_0\lambda}{2a}, \tag{5.3.16}$$

焦点的大小对应于在焦平面内系统的分辨率. 因而 d_L 越小，在焦平面内的分辨率就越高.

然而，对于一个诊断系统而言，需要诊断的区域是有一定的深度的. 我们所要求的不仅是在焦平面内有高的分辨率，而且在较大的深度内都有高的分辨率. 定义在焦点两侧轴线上声压幅度比焦点处声压幅度下降 3dB 的两点间的距离 d_f 为焦柱长度，则可得

$$d_f=\frac{1.8z_0^2\lambda}{a}, \tag{5.3.17}$$

或
$$d_f = 3.6\frac{z_0}{a}d_L . \tag{5.3.18}$$

为了能在较大区域内获得高的横向分辨率，要求 d_f 越大越好．然而，由式(5.3.18)可见，d_f 与焦点大小 d_L 成正比，显然对于简单的球面聚焦换能器，要想兼得小的焦点和大的焦柱长度是困难的，只能二者折中或采用较复杂的聚焦方式，如动态聚焦等．

5.3.3 电子聚焦方法

利用电子技术也可以实现声束的聚焦．实现电子聚焦需用换能器阵列．换能器线阵可以用作一维聚焦，而面阵则可用作二维聚焦．

为了说明电子聚焦方法，我们以线阵为例．

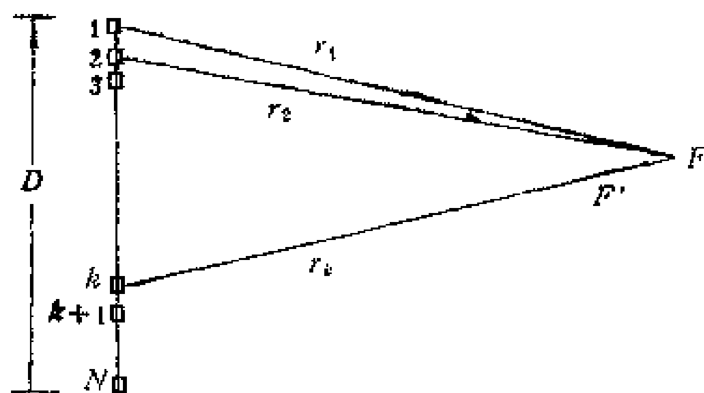


图5.3.9 电子聚焦示意图

如图 5.3.9 所示．设换能器线阵为N个单元组成，各单元为等间距排列，总孔径为 D．设所需的焦点位置在F点．从图中可见，换能器阵中各单元到F点的距离不同，记为 $r_1,r_2,\cdots,r_k,\cdots$．因而由各单元发射声波到达$F$点处的时延也不同，且分别为 $\frac{r_i}{c}$．

为了使各单元发射声波在到达F处时同相叠加以便在该点得到最大声压，我们对各单元的电激励信号引入不同的延迟，设第 k 个单元的电信号延迟为 t_0-t_k(t_0 为常数)，则F点的总声压可以表示为

$$p(z_0,t)=\sum_{i=1}^{N}\frac{A_i}{r_i}F\left(t-t_0+t_i-\frac{r_i}{c}\right),\qquad(5.3.19)$$

式中，z_0 为焦点F到换能器阵的距离，A_i 为第 i 个单元的振幅．显然，只要我们适当选择 t_i，使 $t_i-\frac{r_i}{c}$ 对每个单元都相等，则各单元发射的声波到达F点时均同相，故可以在F点聚焦．而在声场中另一点 F' 与各单元的距离 r_i' 则不满足 $t_i-\frac{r_i'}{c}$ 为常数的条件，因而到达那里的声波不同相，总声压必然小于F点的声压．

线阵的横向分辨率(沿阵列方向)为

$$d_L=\frac{0.88\lambda z_0}{D}.\qquad(5.3.20)$$

显然，线阵的横向分辨率由阵的孔径D决定，而与阵元数N无关．

应该注意到，在线阵情况下，声束除了有一个主瓣外，还有若干栅瓣，它们分布在主瓣的两旁．第 n 个栅瓣偏转的角度 $\Delta\theta_n$ 为

$$\Delta\theta_n=\frac{n(N-1)\lambda}{D}.\qquad(5.3.21)$$

栅瓣中，第一栅瓣的幅度最大．其偏转角度为

$$\Delta\theta_1=\frac{\lambda}{D}(N-1)\qquad(5.3.22)$$

在脉冲工作状态下，第一栅瓣的幅度 p_1 满足：

$$p_1\propto 振荡周期数/N.\qquad(5.3.23)$$

为了减小第一栅瓣的影响，需要降低其幅度 p_1 和增大偏转角 $\Delta\theta_1$．这就要求增加换能器阵的单元数N和减小孔径 D，及减少振荡周期数．减少振荡周期数与提高纵向分辨率的要求是一致的，应力图实现．增加换能器单元数则会增加换能器阵制作的复杂性，特别是相应电路系统的复杂性，故要有所限制．而减小孔径D则与提高横向分辨率有矛盾，故需综合考虑，折中处理．

如前所述，通常的换能器线阵只有一维聚焦能力．而超声诊断则要求系统在横向各方向均聚焦，这可以用换能器面阵来获得．但是，面阵用的单元数为 N^2，数目太大，电路十分复杂，通常不希望采用这种聚焦方式．比较可行的二维聚焦方法是混合聚焦方式，即仍采用线阵，用上述电子聚焦方法实现 x 方向的聚焦．在 y 方向，则采用机械聚焦方法．具体作法是：线阵的每一个单元选用长条形压电晶片，在 x 方向很窄(按线阵要求)，而 y 方向尺寸选大于 x 方向的尺寸，并为圆柱面，以实现 y 方向的聚焦．为使 y 方向的焦点与 x 方向的一致，圆柱面的曲率半径应与线阵电子聚焦的焦距相同．此时，y 方向的横向分辨率 d_L 为

$$d_L=\frac{z_0\lambda}{b}, \tag{5.3.24}$$

式中，b 为换能器单元在 y 方向的长度．

5.3.4 声束扫描

超声诊断往往需要检查体内一个区域，为此，必须进行声束扫描．

声束扫描的方式主要有三种，即手动扫描、机械扫描和电子扫描．

手动扫描是最简单的扫描方式，即手持单探头，根据所需要检查的区域沿体表移动探头实现声束扫描．这种扫描方式速度慢，不能用来获得动态图像，但其适用于某些静止器官的细致观察．

目前常用的扫描方式是机械扫描和电子扫描．这两种扫描方式速度快，可获得动态图像显示．

机械扫描又分为线扫描、扇形扫描、弧形扫描和圆周扫描(PPI扫描)等几种形式．线扫描通常是用一个单探头，使其旋转，其发射的声束经抛物面镜反射而得到直线扫描．扇扫描则分为摆动式和旋转式．摆动式的探头通常只用一个换能器，而旋转式常用三个或四个换能器装在一起的探头，每个换能器轮番进行所需区域的扇扫．弧形扫描为摆动式，且通常需用一水袋来实现换能器与

体表的耦合．PPI 扫描则是将探头插入体内(如直肠)，通过旋转探头得到围绕探头的 360° 范围的扫描．

电子扫描分为线扫描和扇形扫描．线扫描一般用切换扫描方式来实现．采用线阵换能器，利用电路控制使换能器阵元分组发射和接收，如在 t_1 时刻，让 1，2，3，4，5 阵元工作，在 t_2 时刻，让 2，3，4，5，6 阵元工作，……，如此类推，实现线扫描．如图 5.3.10(a) 所示．扇形扫描则用相控扫描．也就是通过调整各阵元激励脉冲的时间延迟，改变由各阵元发射声波到达某一位置时的相位关系，从而控制聚焦点和声束方位的变化．如图 5.3.10(b) 所示．设在 t_1 时刻，各阵元的时延为 Δt_{i1}，聚焦点为 F_1，声束方位角为 φ_1；在 t_2 时刻，各阵元时延调整为 Δt_{i2}，聚焦点变至 F_2，声束方位角为 φ_2，……，如此类推，实现声束的扇形扫描．

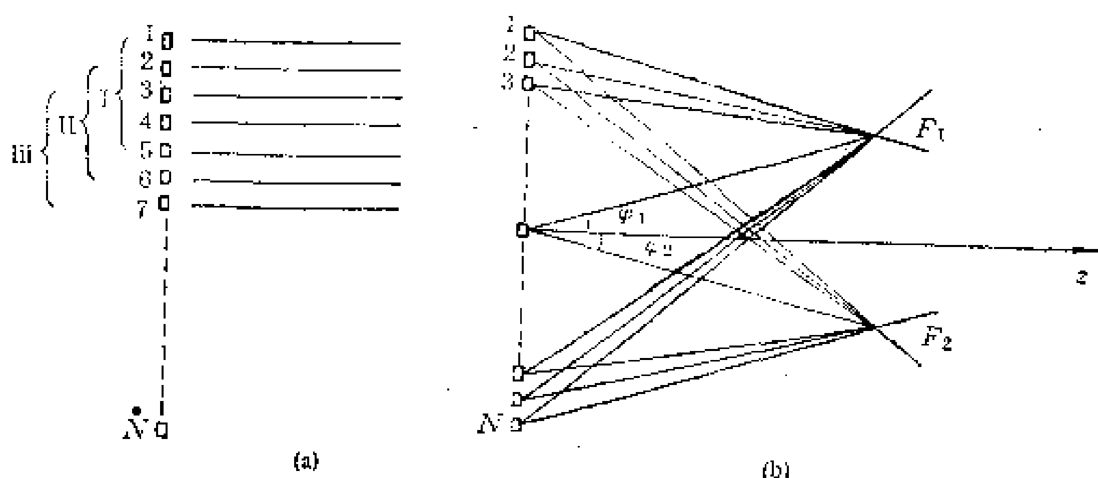


图5.3.10 声束电子扫描
(a)线扫描； (b)相控扫描

为保证相控扫描换能器在整个扫描范围内声束强度比较均匀，各换能器阵元应为接近无方向性的点源，这就要求各阵元横向尺寸小于声波长．对于切换扫描线阵，由于要求扫描线每次移动的距离小，故也要求阵元横向尺寸较小．由于阵元的厚度为半波长，因而厚度与横向尺寸接近，在这种情况下，容易出现厚度模式和横向模式的耦合．为解决这一矛盾，常常把每个小阵元再切割成若干个细条(如 4—5 个)，并在电路上并联作为一个阵元使用．

这样，由于宽度和厚度的差别较大，可以减小模式耦合，得到所需要的厚度模振动.

由于线扫描的声束是平行的，相应的图像比扇形扫描的要清晰，密度较均匀．因而，在超声诊断中，能采用线扫描的部位应尽量用线扫．但对于入口受到限制的部位(如心脏检查)，为了能够得到较大范围的探测，需用扇形扫描.

§5.4 几种超声信息显示方法

超声诊断以超声波为信息载波．在目前阶段，超声诊断的全自动化尚未实现，也就是说，超声诊断设备并不直接给出诊断结论．实际作法是将超声波探测得到的信息以某种方式显示出来，由医生观察，作出诊断．本节将介绍几种常用的超声信息显示方法.

5.4.1 A 型显示

A型显示是一维显示．它只用一个换能器(单探头，聚焦式或

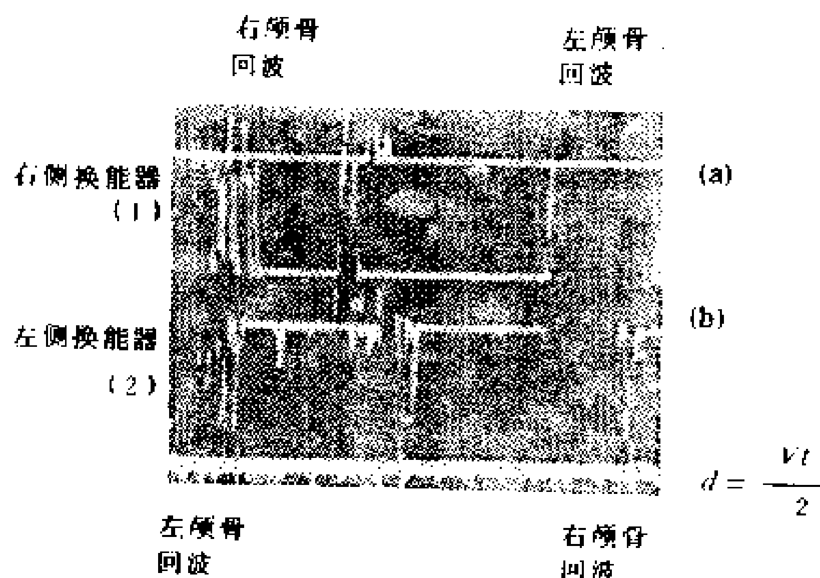


图5.4.1 脑中线定位 A 型显示
(a)正常脑中线；(b)脑中线偏移 7mm
曲线1——声波从右侧入射； 曲线2——声波从左侧入射

非聚焦式)发射一束脉冲声波至体内，并接收散射(或反射)回来的声波，转换为电压信号，在示波管屏幕上显示．纵轴表示散射或反射信号的大小，横轴表示到达时间，亦即散射源或反射界面与体表的距离．通常A型显示都是显示经检波后的视频信号，且偏变是按对数级(分贝数)表示，以显示较大的动态范围，如图5.4.1所示．用于某些特殊目的，有时也采用另一种A型显示，即高频信号线性显示，如图5.4.2所示．

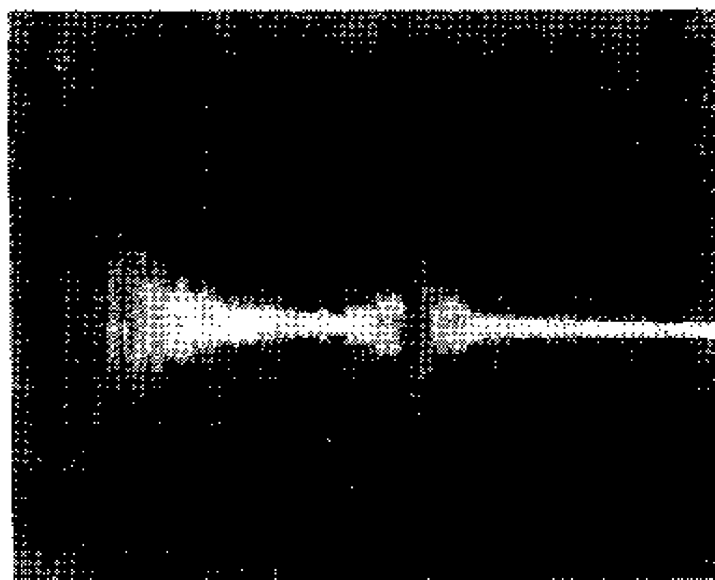


图5.4.2　肝脏的A型显示(高频线性显示)

A型显示可以进行病变和内脏器官的定位和估计大小．图5.4.1说明了如何由*A*型显示进行脑中线定位．(a)为正常脑中线的情况，可以看到，脑中线离头左侧和右侧的距离相等．而在(b)中，声波从右侧入射(曲线1)和由左侧入射时，脑中线回波到达时间不同，测量二者时间差，根据脑的声速，可算出脑中线偏离中心7mm．

5.4.2　M型显示

M型显示是运动器官或界面的一种动态显示方法．与A型一样，用一换能器发射一束脉冲声波进入体内，但其接收到的散射(或反射)回波信号被用来调制荧光屏上光点的亮度．光点的纵坐标代表与回波信号相应点到体表的距离，横坐标则表示不同时刻．这种显示方式最适用于观察运动器官的工作情况．图5.4.3为心脏二尖瓣区的M型显示，其清楚地显示出二尖瓣位移曲线，并由位移曲线形状的不同可以区分正常二尖瓣和二尖瓣狭窄等．

由M型显示得到的位移曲线，对时间微分可以得到速度曲线

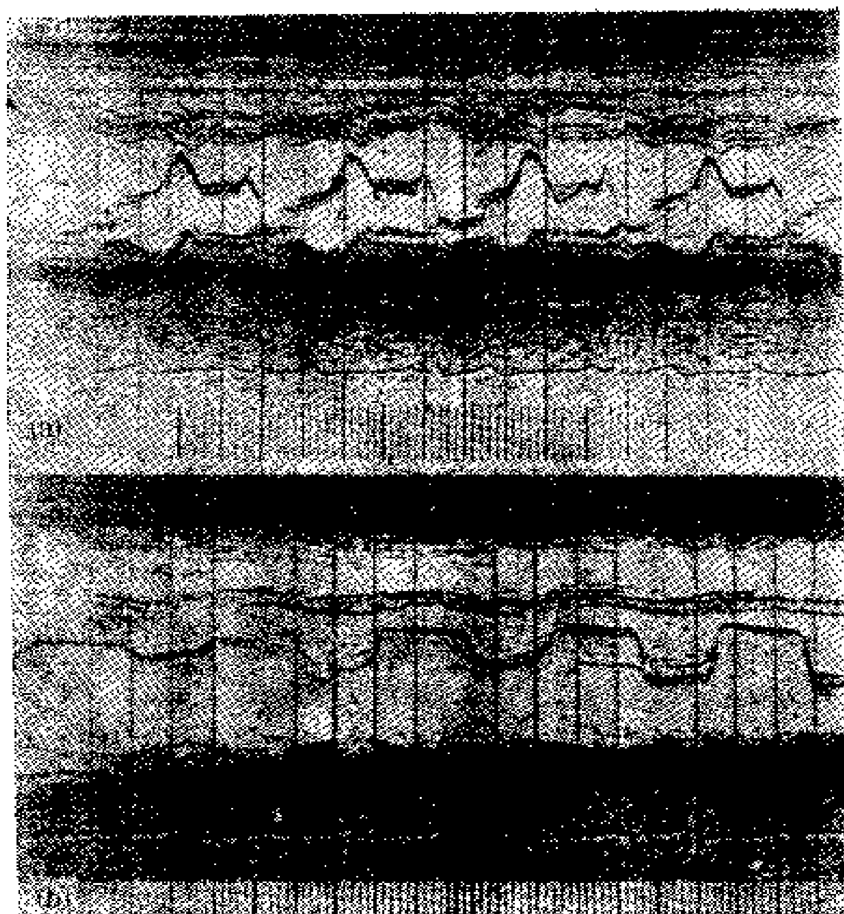


图5.4.3　二尖瓣运动的M型显示

(a) 二尖瓣区域的正常运动图；(b) 二尖瓣狭窄的运动图

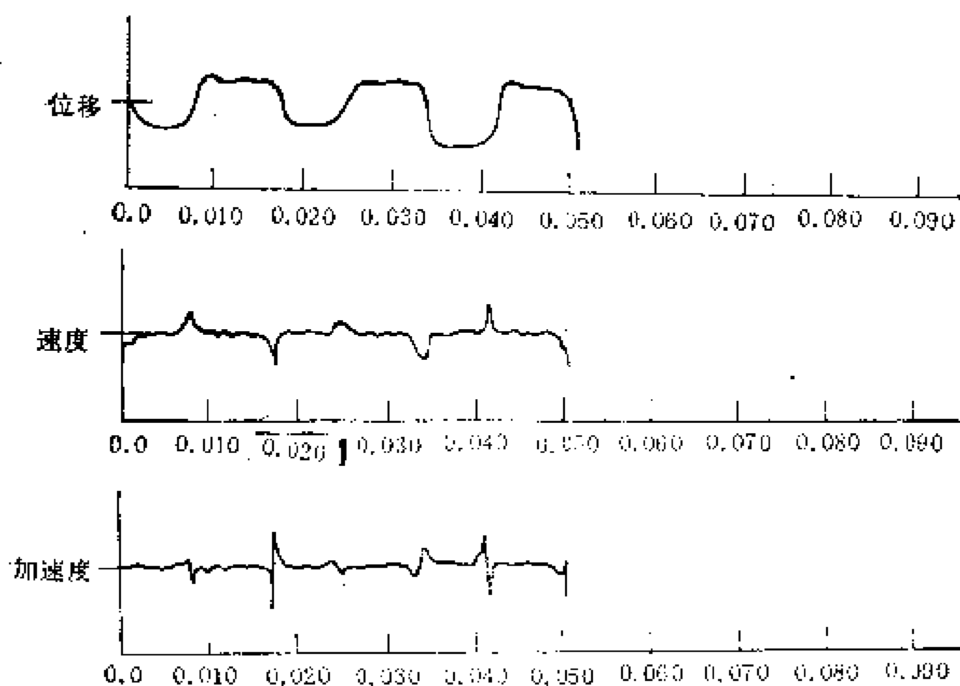


图5.4.4　二尖瓣的位移、速度、加速度(二尖瓣狭窄)

和加速度曲线，如图 5.4.4 所示．利用这一套曲线，比较容易判断某些运动器官的疾病．

5.4.3 多普勒血流显示

根据 5.2.7 节，利用多普勒效应，通过测量多普勒频移，按式(5.2.89)可以估算运动物体的多普勒运动速度．血液中有大量红血球存在，由红血球的散射回声信号的多普勒频移，可以测量红血球的运动速度，继而得到血流速度．由于在声束照射范围(或取样范围内)有许多红血球，而它们各自的运动速度是不相等的．为表示出所有这些特征，在示波管屏幕上，以纵坐标代表血流速度的大小，而光点亮度代表具有相应速度的红血球的几率或百分比，而横坐标则为时间轴，这种图形称为多普勒血流速度分布图．它显示出血流速度分布几率随时间的变化．如图 5.4.5 所示．



图5.4.5　典型的多普勒血流速度分布

多普勒血流图的另一显示方法是用纵坐标表示探测范围内的血流平均速度，横坐标为时间，因而它所表示的是血流平均速度随时间的变化曲线，称为多普勒血流图，如图 5.4.6 所示．

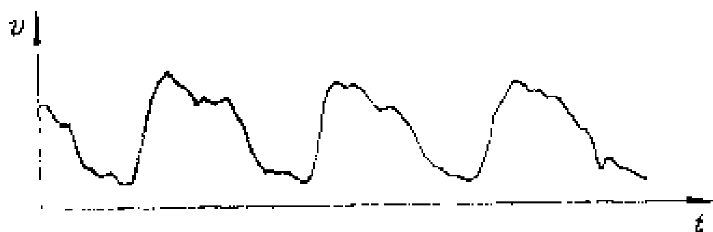


图5.4.6　典型的冠状动脉多普勒血流图

5.4.4 二维图像显示

二维图像显示是目前超声诊断中最常用的显示方法．它所显示的图像与体内某一断层相对应，光点的亮度对应于该位置回声信号的强度．多数超声诊断仪的二维图像是通过B型扫描方式获得．B扫描显示的是与声束方向平行的断层图像，纵坐标表示离体表的距离，横坐标对应横向位置．除B扫描外，各种成像方法得到的某断层的图像信号均可用二维图像显示，所显示的断面取决于成像方法．例如，C扫描的图像显示的是与声束垂直的断面，F型扫描显示的是任一曲面的图像，等等．各种成像方法将在下一节中详细讨论，此处从略．

由于用光点亮度(或灰阶)来显示的二维图像与相应断层的解剖结构相似(注意，超声图像常有假像和畸变，二者并不相同)，图象直观易懂，因而这种显示方法在目前的超声诊断设备中被广泛采用．典型的B扫描二维图像如图 5.4.7 和 5.4.8 所示．

5.4.5 三维图像显示

由于荧光屏本身是个平面显示器，真正的三维显示是难以实现的．所谓的三维图像显示通常是指按照立体投影原理，在一个平面上获得有立体感的三维物体的图像显示．为此，首先要得到物体在一个空间内的三维图像信息，或者得到若干个相邻断层内的二维图像信息，然后按照投影原理，组成一个有立体感的图像．三维图像显示的目的在于使图像更加直观，便于作出诊断．

5.4.6 定量图像显示

定量图象显示也分为二维和三维图像显示，它与通常讲的图像之间的区别在于，这种图像的光点亮度(或灰阶)与介质的某一声学参量的大小相对应．例如，声衰减系数定量图像中每光点的亮度与该位置的声衰减系数大小相应，这个图像表示的是声衰减系数的定量分布．除声衰减系数定量图像外，还有声速定量图像，

背向散射系数定量图像，非线性参量定量图像，以及多普勒血流速度定量图像等.

5.4.7 彩色编码显示



图5.4.7 母体中胎儿的B扫描超声图像

上述的图像显示方法均为黑白灰阶显示. 由于人眼对灰阶的分辨能力远不如对不同颜色的分辨能力，且对于有不同背景亮度的同样的灰阶信号，人眼的判断会有不同，而对在不同颜色背景下的同一颜色，人眼却可以给出客观评价. 鉴于这种情况，彩色显示对图像细节的鉴别



图5.4.8 新生儿头脑的B扫描超声图像

会有好处. 彩色编码显示就是指将图像信号的强弱人为地译成不同的颜色来显示，这样所得到的图像的颜色是伪彩色，它由信号的强弱和彩色编码方式来决定，而与物体本身的颜色无关. 典型的彩色编码显示图像如图 5.4.9 所示.

5.4.8 直方图显示

直方图是一种统计显示方法，它所表示的是在一定区域内，对



图5.4.9 心脏彩色编码图像

应于不同信号强度的像素的百分比．其横坐标表示信号强度，纵坐标表示像素百分比（或几率）如图 5.4.10 所示．

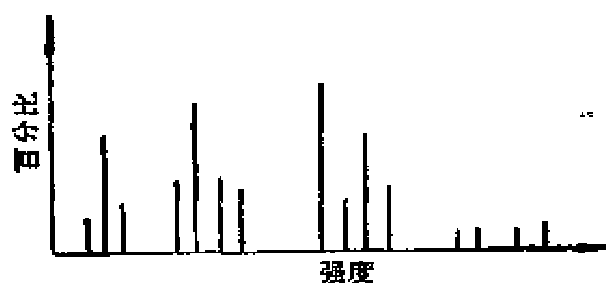


图5.4.10 直方图示意图

直方图主要表示的是介质的均匀程度，图上线条越集中，表明介质越均匀．

§5.5 超声成像方法

5.5.1 引言

超声成象亦称为声成像，或者更严格地说是指在超声频段的声成像．声成像是用声波获得物体可见图像的方法，是声学、电子学、光学、信号处理的交叉学科．由于声波可以穿透很多不透光的物体，故利用声波可以获得这些物体内部结构声学特性的信息，而

声成像技术则可将这些信息变成人眼可见的图像，即可以获得不透光物体内部声学特性分布的图像.

声成像的研究最早可以追溯到1920年，在其后一段时间内，由于技术上的种种原因，研究进展较慢. 到了60年代末期，由于电子技术、计算机技术及信号处理技术的飞速发展，声成像技术的研究恢复了生机，到70年代已形成了几种较成熟的方法，大量商品化成像设备上市，在医学诊断中得到了极其广泛的应用，在工业材料的超声检测中也逐渐得到应用.

关于声成像方法的分类问题，从不同的着眼点有不同的分类方法. 例如，根据用于成像的信号是由被成像物体反射回来的信号，还是透过物体的信号分为反射型和透射型；根据是用接收到的信号直接获得相应的图像，还是要经过较为复杂的重建过程(如计算机重建、激光重建等)分为直接成象与重建成像；……我们这里则根据声成像方法的发展过程、应用情况和与信号处理关系将其分为两大类，即常规声成像方法(包括常规声全息方法)及扫描声成像方法.

常规声成像是光学透镜成像方法直接引伸而来. 用声源"照明"物体，物体的散射声信号(背向散射或透射声信号)经聚焦声透镜在像平面上形成物体的声像，其为与物体声学特性相应的声强分布，用适当的暂时性或永久性记录介质将此声强分布转换成光学分布或电信号分布(其可方便地转换成荧光屏上的亮度分布)，即可获得可见图像.

声强记录介质的研究工作在1930至1960年间曾经十分活跃. 主要用过的声强记录介质有：感声照相底版、热塑材料、液面、悬浮粒子等. 这些记录介质的灵敏度阈值介于10^{-4}—10^{-1}W/cm^2，另外一种以压电效应为基础的 Sokolov 声像管的灵敏度阈值则约为10^{-4}W/cm^2.

常规成象方法的图像分辨率取决于单个透镜的分辨率. 如图5.5.1所示. 设透镜孔径为D，将位于A处的点物体成象于A'点. 设A'距透镜为z，由于透镜的孔径有限，所得像点并非为一个尖

镜的点，而是相应于如下分布的扩展了的像[参看5.3.1(三)节]：

$$H(x)=\mathrm{jinc}(x)=J_1(\pi x)/\pi x. \qquad (5.5.1)$$

式中，$x=Dr/\lambda z$，λ 为声波长，r 为偏离 z 轴的距离，$H(x)$ 称为透镜(或成像系统)的点扩散函数.

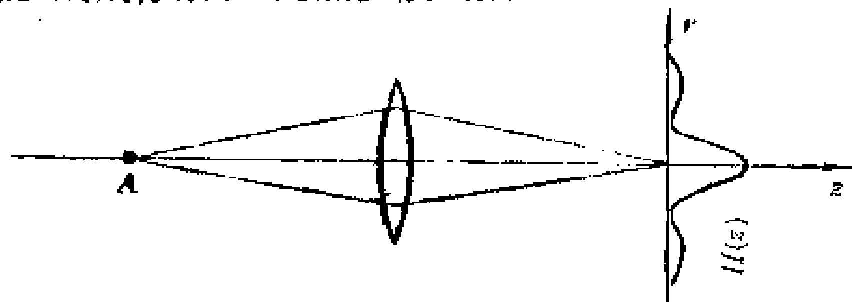


图5.5.1 透镜成像的点扩散函数

容易算出，这种常规成像系统对单点的3dB分辨率为

$$d_s=\frac{\lambda z}{D}, \qquad (5.5.2)$$

这与式(5.3.11)表示的声束宽度一致.

常规声全息方法则是由光全息方法直接引伸而来. 用声源照明物体，物体声束与空间分布均匀的参考声束干涉形成全息图，再用激光照射全息图，则可重建物体声像.

常规声成像方法(包括常规声全息方法)是早期形成的声成像方法，灵敏度、信噪比都较低，不易采用信号处理技术，改进图像质量的潜力不大，实际很少使用.

扫描声成像是通过扫描从不同位置"照明"物体和接收含有物体信息的声信号，经过相应的适当处理，获得物体声像，并在荧光屏上显示以获得可见图像.

扫描声成像方法的状况与常规声成像方法大不相同. 近十余年来，这类成像方法发展极为迅速，花样品种繁多，有些方法已定型大量生产，并获得了广泛的应用(如B型图像仪)，有些方法还处在研究和小规模试验阶段(如超声CT)；有些方法的接收声信号与欲显示的物体声像直接对应，采用信号处理的目的在于提高图像的分辨率、显示动态范围、信噪比及加强有用信息的显示等(如B

型、C型及F型图像仪等)，有些方法的接收信号需经过频谱分析才能转换成相应的图像(如超声多普勒成像)，另有些方法的接收信号则需经过复杂的计算机重建(也可用硬件实现)才能得到所需的图像(如超声CT、合成孔径成像、三维图像、扫描声全息等).下面将主要叙述这些成象方法的原理和所采用的或将要采用的信号处理技术. 为叙述方便,我们仅介绍电子扫描方式.

5.5.2 B型成像(B扫描)

B型成像方式所得到的是与声束传播方向平行的物体断面的图像. 如图5.5.2所示. 声束沿z方向传播,沿x方向扫描,逐次照射物体的不同区域,并接收声束所达区域内物体的散射声信号,

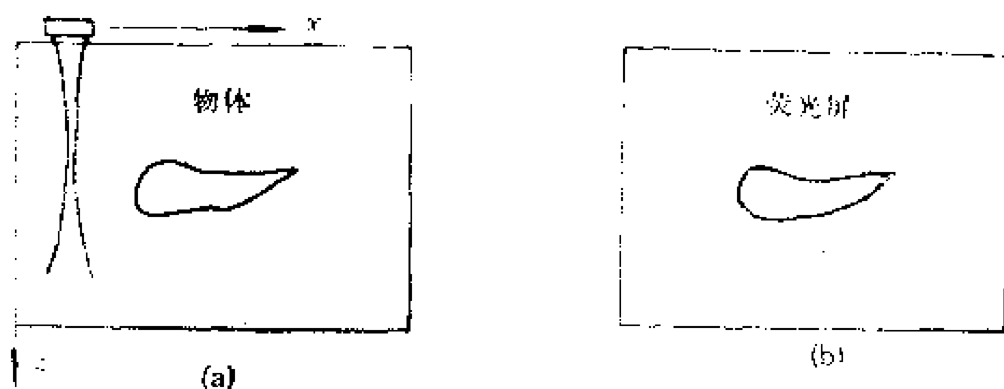


图5.5.2 B型成像示意图
(a) 声束扫描; (b) 荧光屏图像显示

将声信号幅度调制荧光屏上相应位置的光点亮度，从而获得声束扫描断面内与声散射信号幅度对应的图像(参看5.4.4节).

目前市场上提供的B型超声诊断仪采用的扫描方式主要有线扫描

《线性探头》



• 3.5 MHz 标准规格
图5.5.3 人体肝脏某断面的线扫B型图像

和扇形扫描两种(参看 5.3.4 节)．典型的线扫图像和扇扫图像分别如图 5.5.3 和5.5.4 所示．



图5.5.4　人体心脏某断面的扇扫 B 型图像

(一)点扩散函数及分辨率

B 型成像中，声束常采用电子聚焦，即用若干个换能器元构成一组，适当调整各换能器元激励信号的时延，从而实现声束聚焦（参看 5.3.3 节)．

对于包括 B 型成像在内的聚焦扫描成像系统，由于照射声束为聚焦声束（而不是象常规成像系统那样采用均匀“照明”)，接收声信号也经过同样聚焦系统聚焦，这样两次聚焦的结果使成像系统的点扩散函数为相应的常规成像系统的点扩散函数的平方．例如，对于圆形孔径的聚焦系统，其点扩散函数为

$$H_{sc}(x) = J_1^2(\pi x)/(\pi x)^2, \tag{5.5.3}$$

式中各参量的含义与式 5.5.1 中相应量相同．

因而，其单点 3dB 分辨率为

$$d_{sc} = 0.74\lambda z/D. \tag{5.5.4}$$

通常在扫描成像系统中实际采用的聚焦方式不是圆形孔径聚焦，而是在 x 方向(扫描方向)用电子聚焦、y 方向用机械聚焦(即用弧形换能器)，即聚焦换能器为矩形孔径，此时，系统的点扩散函数为

$$H(x,y) = H(x)\cdot H(y), \tag{5.5.5}$$

$$H(x) = \frac{\sin[2\pi Nl(x-x_0)/\lambda z_0]}{\sin[2\pi l(x-x_0)/\lambda z_0]}, \tag{5.5.6}$$

$$H(y)=\frac{\sin[2\pi D_y(y-y_0)/\lambda z_0]}{2\pi D_y(y-y_0)/\lambda z_0}. \tag{5.5.7}$$

式中，l 为 x 方向换能器元的间距，N 为换能器元的个数，D_y 为 y 方向换能器长度，(x_0,y_0,z_0) 为在焦平面内物点位置.

可以算出，这种成像系统在 x、y 方向的单点 3dB 分辨率为

$$d_x=0.89\lambda z_0/2Nl, \tag{5.5.8}$$

$$d_y=0.89\lambda z_0/2D_y. \tag{5.5.9}$$

系统的纵向分辨率则主要取决于所用的声电脉冲（即经过换能器电-声、声-电两次转换后的电脉冲）的长度，例如，对包络为高斯型，即

$$F(t)=e^{-(w_0t/\sigma)^2}, \tag{5.5.10}$$

的脉冲，纵向单点 3db 分辨率为

$$d_z=0.58\sigma c/w_0. \tag{5.5.11}$$

应该指出，式(5.5.3)和(5.5.6)及(5.5.7)所表示的横向点扩散函数，都是对单频连续波而言的. 对于脉冲波的情况，点扩散函数可以通过傅氏变换来得到. 图 5.5.5 给出了如式(5.5.10)所示的高斯型脉冲 $\sigma=2\pi$（相应于有了周振荡的脉冲）及 $\sigma=\infty$（连续波）的线孔径点扩散函数[对应于式(5.5.6)]. 显然，$\sigma=2\pi$ 的脉冲波情况，比连续波相应的旁瓣为低. 这一点的物理意义是十分清楚的，因为使用脉冲波成象时，距离较远的点的信号将不能叠加，从而抑制了旁瓣.

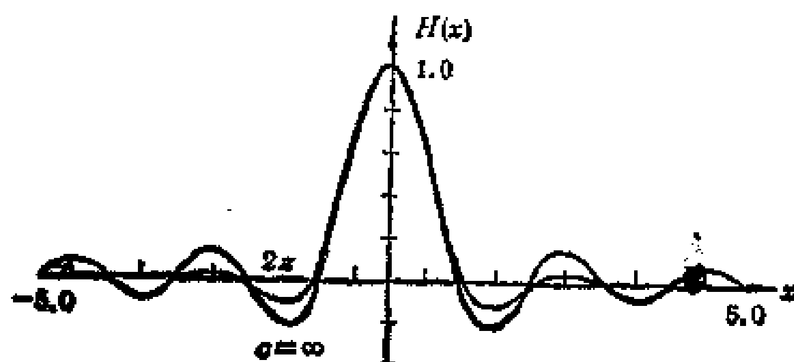


图5.5.5 高斯型脉冲 $\sigma=2\pi$ 及 $\sigma=\infty$（连续波）时，线孔径的点扩散函数

(二)信号处理

(1) 深度补偿

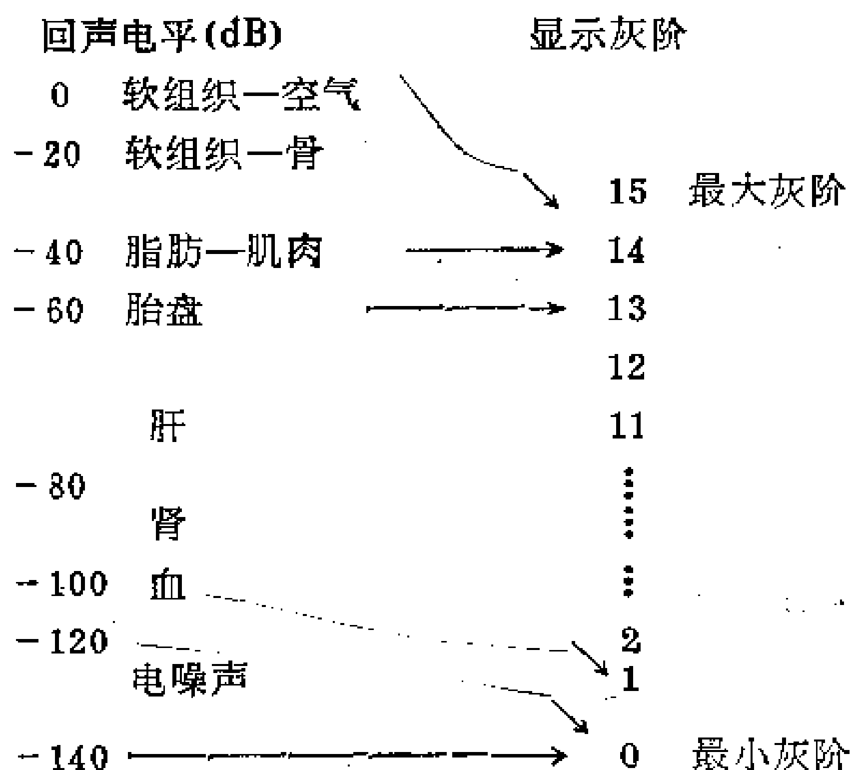
由于被成像物体的声衰减特性，来自不同深度的散射信号强弱差别很大．为了获得亮度较为均匀的图像，需要根据被成像物体的声衰减特性，对来自不同深度的散射信号给予不同程度的放大，称为深度补偿或时间补偿．目前市场上的超声诊断仪的深度补偿多数为可调的，使用者可以根据被检查对象的声衰减情况调节深度补偿曲线，以便得到最佳的图像显示效果．

(2) 对数放大

由于被成像物体例如人体组织的复杂性，各处散射或反射信号的强弱差别很悬殊，可达 120dB左右，为保证图像显示的动态范围，B型成像仪广泛采用对数放大．

(3) 编码显示

在实际诊断中，人体组织内部细节的显示很重要，因而需要将其相应的散射信号用较多的灰阶作细微显示，而对一些强的界面反射信号进行压缩，用较少的灰阶显示，为此可采用如下的编码显示(以 16 灰阶为例)



(4) 动态聚焦

由于B型成像使用聚焦声束，在焦区内分辨率较高．为了保证整个图像都有较高分辨率，较先进的B型成像采用电子动态聚焦，即在成像深度内进行多级聚焦，且聚焦点的位置可由使用者根据需要来选取．这种灵活的多级聚焦方式通常需要用计算机控制．图5.5.6为采用了动态聚焦的母体中胎儿的B型图像，左侧的“>”表示各级聚焦点的位置．

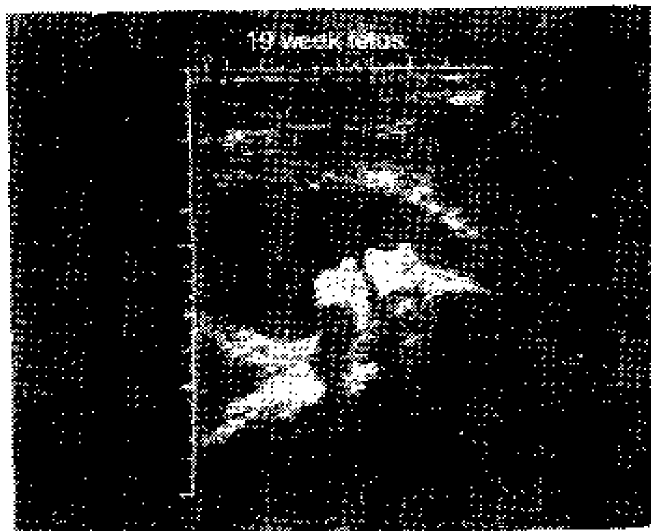


图5.5.6　采用动态聚焦的母体中19周胎儿的B型图像

B型成像的图像质量还可能通过较为复杂的图像处理方法进一步改进．例如，用空间解卷积方法可以提高横向分辨率，时间解卷积方法可以提高纵向分辨率，利用多幅图像平均方法减少斑点噪声，利用边缘加强技术可以使器官和病变的轮廓更清晰等．总之，图像处理的前景仍很广阔，图像质量尚可进一步提高．

(三)临床应用

近十余年来，B型图像仪已在超声诊断中广泛应用．B型图像仪可以给出人体不同断面的清晰图像，因而可以从形态学角度诊断多种病变特别是占位性病变，同时，可以对内脏器官及病变定位，并测量其大小、面积、体积等，因而也可以用来监视病变发展及指导穿刺．由于B型图像仪能给出实时动态图像，因而也可以观察某些运动器官如心脏、血管的运动情况，从而判断某些疾病．

(四)假像分析

由于声波的传播特性以及B型成像仪（包括换能器）的特性，所获得的图像并非与物体解剖断面完全对应，而往往会出现很多假像．

(1) 由电子线路和换能器特性引起的假像

纵向分辨率

纵向分辨率的限制可使物体的图像纵向伸展，或将纵向相邻的两个或多个物体误认为一个大物体，如图 5.5.7 所示.

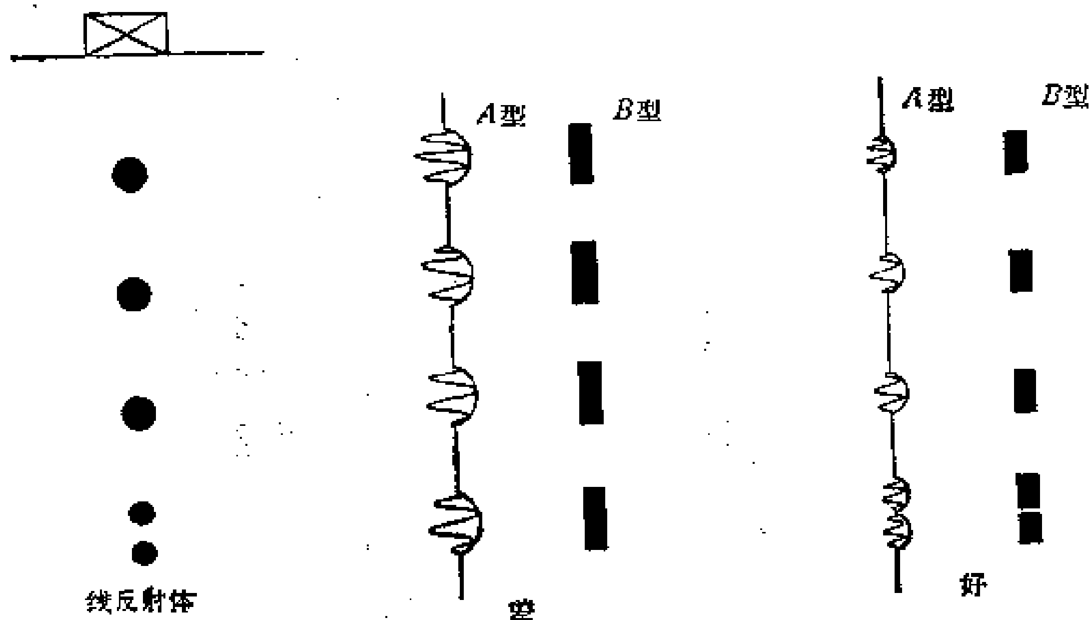


图5.5.7 纵向分辨率所引起的假像

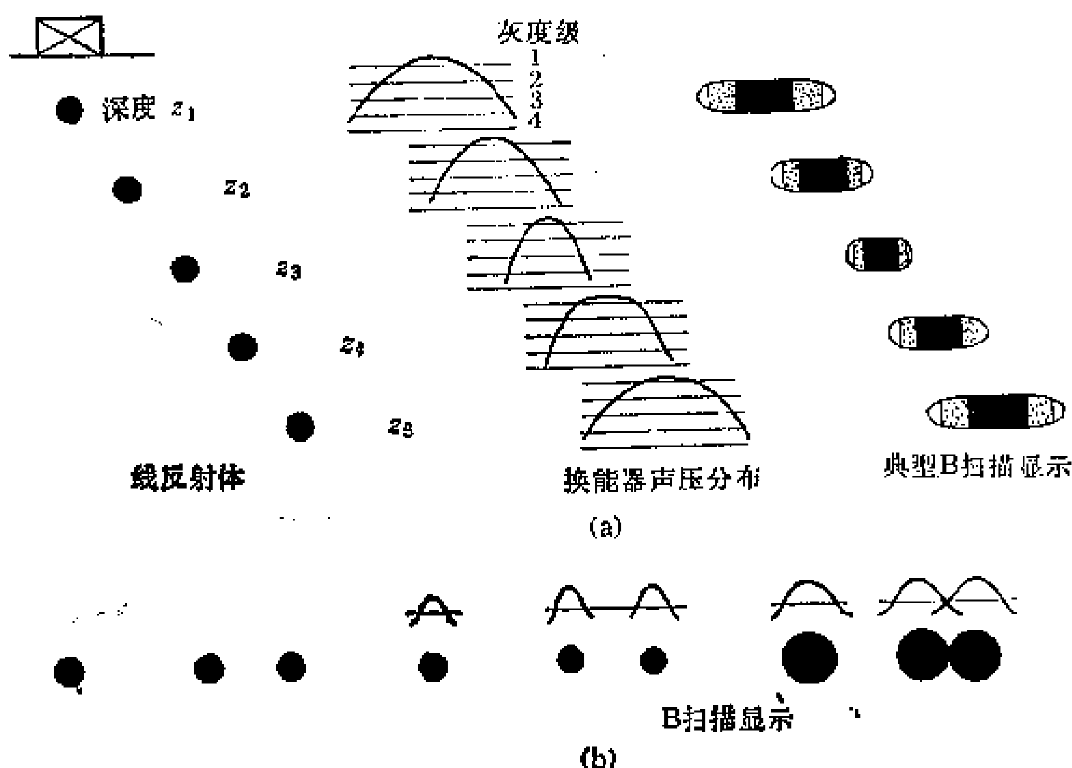


图5.5.8 不同深度处横向分辨率不同所引起的假像

横向分辨率

横向分辨率引起的假像与纵向分辨率引起的假像类似．由于采用聚焦声束，在不同深度处的横向分辨率不同，所引起的假像如图 5.5.8 所示．

旁瓣和栅瓣

单个换能器的旁瓣及阵列换能器的栅瓣均能引起假像，且与记录电平阈值有关，如图 5.5.9 所示．

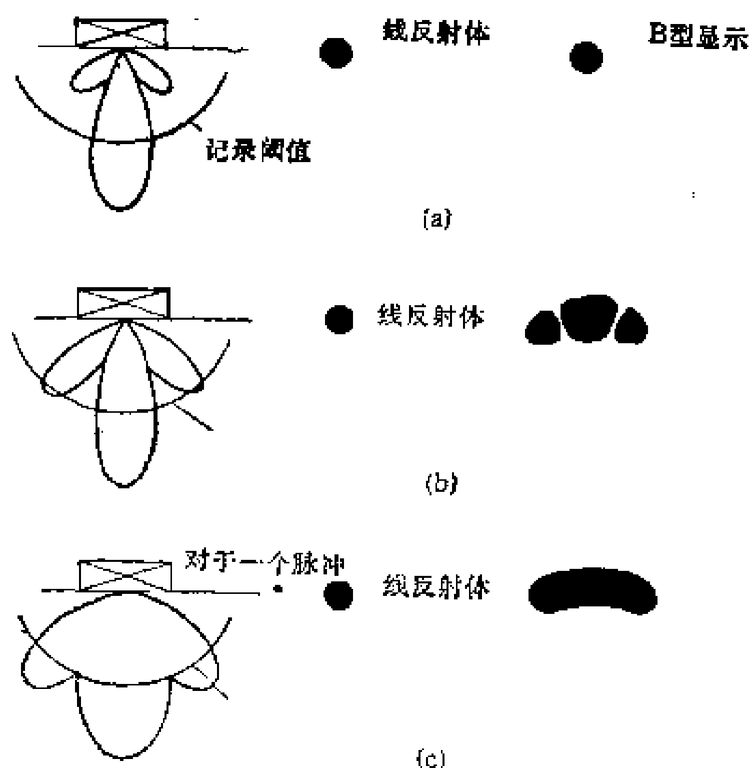


图5.5.9　换能器旁瓣引起的假像

定位误差

B 型诊断仪图像上所显示的位置是按声束向正前方传播，声传播速度按软组织平均声速来确定的．当换能器的声束偏斜，或实际组织的声速与平均声速差别较大时，均会造成定位误差．

（2）声传播特性引起的假像

声影

人体中某些组织或病变声衰减很大，如骨骼、充气器官或结石等，会造成阴影，使其后面的结构无法观察，如图5.5.10(a)所示．

多次反射

声波在某些组织内(如较大的液囊)可能发生多次反射，形成若干个界面的图像，如图 5.5.10(b)所示.

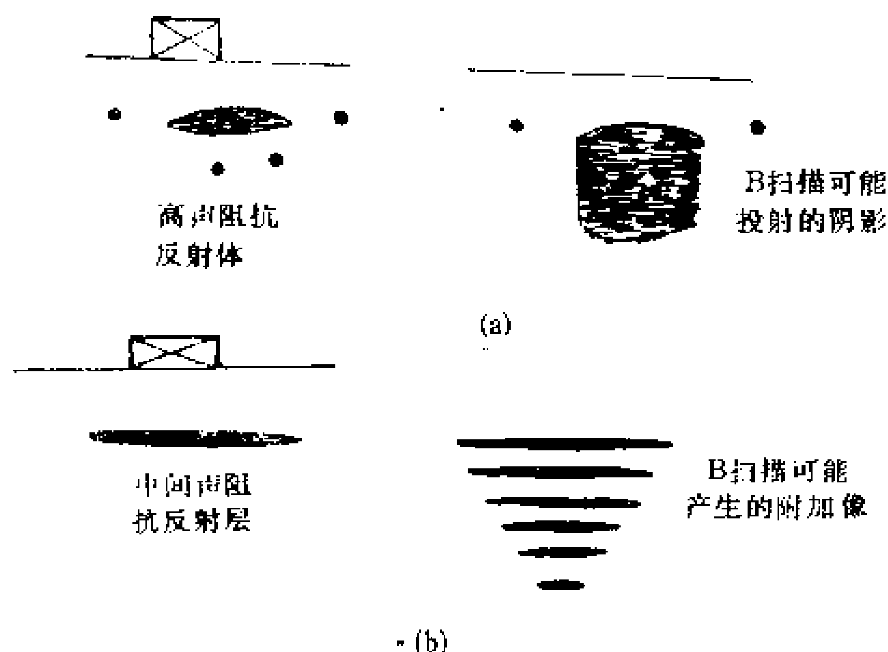


图5.5.10 声影与多次反射产生的假像
(a) 声影引起的假像；　(b) 多次反射引起的假像

镜面反射

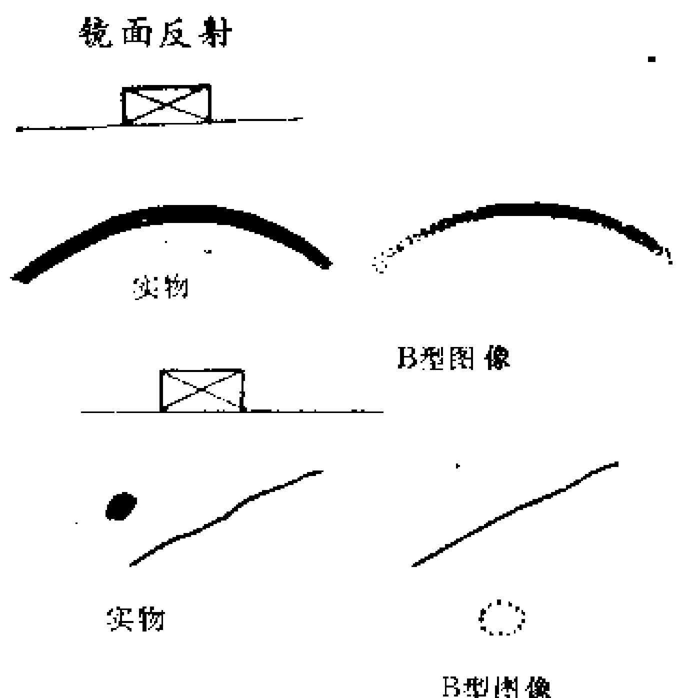


图5.5.11 镜面反射造成的假像

光滑界面的反射问题可能使一些弧形曲面不能完全显示，或造成定位的严重编差，如图5.5.11所示.

折射

声波斜入射于界面时的折射问题可能造成定位误差或局部亮度增强或减弱的问题.

总之，B型图像

与物体的解剖图之间可能存在区别，即可能存在这样那样的假像．有些由于电子线路或换能器特性引起的假像，随着仪器质量的不断提高可能逐渐减弱或消除，而声传播特性所造成的假像的消除却较为困难．当然，如果对物体的声传播特性研究比较透彻，从不同方位获得图像并加以综合分析处理，这种假像的消除也是有可能的．

5.5.3 C型成像(C扫描)与F型成像(F扫描)

C型成像方式所得到的是与声束传播方向垂直的断面的图像，如图5.5.12所示．与B型成像不同的是，C型成像中，声束不仅要沿x方向扫描，而且还要沿y方向扫描，即是面扫描，(二维扫描)，而不是线扫描(一维扫描)．为获得某一与声束垂直的断面$z=z_0$的清晰图像，扫描声束应聚焦于该平面，并由换能器接收到的散射声信号中选取对应于从$z=z_0$处散射回来信号幅度调制荧光屏上与物体(x,y)坐标相应光点的亮度，以获得$z=z_0$断面的声像显示．

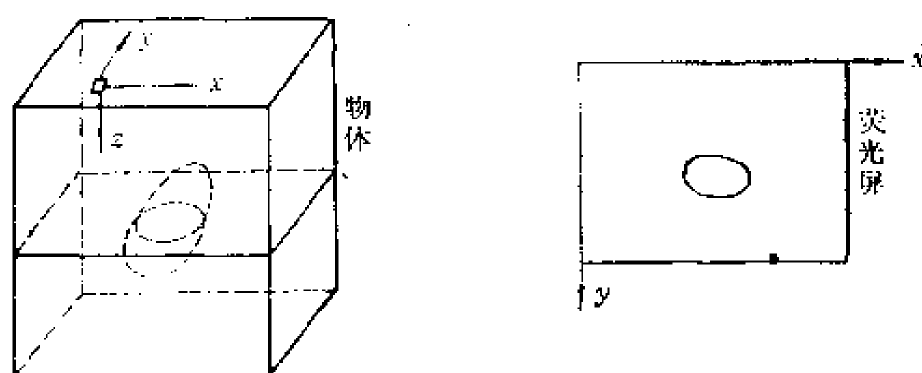


图5.5.12 C型成象

F型成像与C型成像在原理上十分相似．其区别在于，C型成像断面为与声束垂直的断面($z=z_0$，z_0为常数)，而F型成像断面可为任意平面或曲面［$z=f(x,y)$］．为保证F型成象断面内图像的分辨率，扫描声束的聚焦位置应可调，使焦点落在成像断面内，即对应于不同扫描位置的焦距z_f也应满足：

$$z_f = f(x, y). \tag{5.5.12}$$

由于C型及F型成像与B型成像的主要区别在于扫描方式和成像断面不同，在5.5.2节中对于B型成像的讨论多数都对C型和F型成像适用，因而此处不再赘述．不过由于C型和F型成像需用面扫描(电子扫描中，采用换能器面阵)，这带来电子线路和换能器制作的复杂性，且很费时，难以获得实时动态显示，这就限制了其实际应用，因而至今这两种方式的成象仪器尚未广泛进入市场．

5.5.4 超声CT成像

超声CT成像是由X光CT成象引伸而来．CT是英文Computed Tomography (计算机断层像)的缩写．用这种成象方法可获得声速、声衰减系数、声散射系数及非线性参数等量的定量图像．目前研究的超声CT成像法主要有透射型和反射型两种．而图像的重建则基于两种理论：射线理论和衍射理论．衍射理论即波动声学理论，将介质看成声学参量(密度ρ、声速c等)连续变化的非均匀体，其中声波的传播可通过波动方程的解来描述．将这种理论用于图像重建时，必须作相当的简化假定(如ρ为常数，c的变化很小等)，并采用Born近似或Ratov近似等求解波动方程的近似理论．而这些近似往往引入相当大的误差，致使衍射理论用于重建像的效果并不比射线理论高明，相反却带来重建计算的复杂性．为此，本节不准备对基本衍射理论的重建方法进行详细讨论，而将主要介绍目前使用较多的基本射线理论的图像重建方法．为了叙述方便，我们以透射型为例．

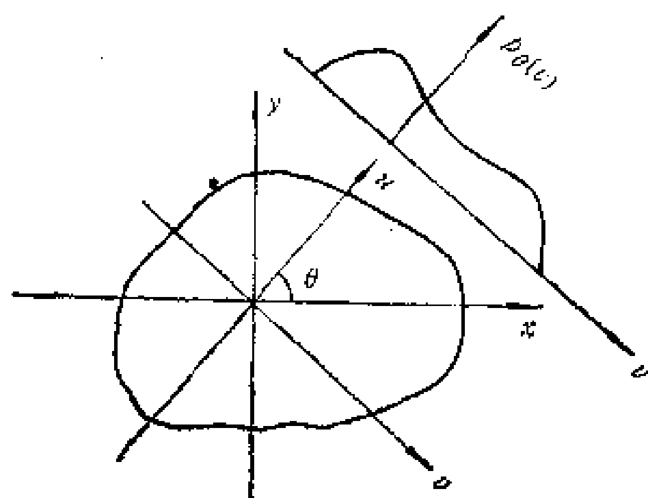


图5.5.13 超声CT成像投影数据的获得

射线理论即几何声学理论，将声波在介质中的传播看作遵守Snell定律的射线传播形式．如图 5．5．13 所示．一束平面波（或由换能器扫描产生的类似声波）沿 θ方向，透过被成像物体，产生投影$p_\theta(v)$，由换能器接收并记录．根据需要成像的声学参量的不同，$p_\theta(v)$可以是不同的量．例如，为了获得声衰减系数的重建像，$p_\theta(v)$应为透过物体后声能的损失，即

$$p_\theta(v) = -\frac{1}{2}\ln\frac{I_\theta(v)}{I_0}, \tag{5.5.13}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,du = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\cos\theta} f\left(x,\ x\tan\theta - \frac{v}{\cos\theta}\right)dx = p_\theta(v), \tag{5.5.14}$$

式中，I_0 为入射声强，$I_\theta(v)$为射线(θ,v)经物体衰减后的声强 $f(x,y)$则为声衰减系数．

如要想获得声速的重建像，则 $p_\theta(v)$应为射线(θ,v)的传播时间，而 $f(x,y)$则应为声速 $c(x,y)$的倒数，即

$$f(x,y) = \frac{1}{c(x,y)}. \tag{5.5.15}$$

为了获得投影函数 $p_\theta(v)$，从理论上讲应该连续旋转发射声束及相应的接收换能器阵，且阵元间距 Δv 要足够小．在实际成像系统中，Δv、$\Delta\theta$ 的大小要根据所需要的成象分辨率来决定．

图像的重建则是由实测得的投影函数 $p_\theta(v)$ 经过计算机计算处理得到物体参量 $f(x,y)$．常用的图像重建方法有：傅氏变换法、逆投影法及代数重建法．下面将对这些方法作简要叙述．

（一）傅氏变换重建法

傅氏变换重建法的理论基础是投影切断定理．设函数 $f(x,y)$的空间傅氏变换为 $F(u,v)$，

$$F(u,v) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x,y)e^{-j2\pi(ux+vy)}dxdy, \tag{5.5.16}$$

且 $f(x,y)$沿 y 方向的投影为 $g(x)$，

$$g(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy, \tag{5.5.17}$$

其空间傅氏变换为 $G(u)$，

$$G(u)=\int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-i2\pi ux}dx, \tag{5.5.18}$$

则 $G(u)$ 与 $F(u,v)$ 之间满足

$$F(u,0)=G(u), \tag{5.5.19}$$

此为投影切断定理.

根据投影切断定理，如果我们从不同的 θ 角方向测得足够的投影函数分别计算这些投影函数的空间傅氏变换，再根据坐标旋转公式，即可得到不同 u，v 值下物函数 $f(x,y)$ 的傅氏变换 $F(u,v)$，于是，经傅氏反变换

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi}\iint F(u,v)e^{i2\pi(ux+vy)}dudv, \tag{5.5.20}$$

即可得到 $f(x,y)$，亦称重建像.

当然，在实际计算中，投影函数的数据是有限的，即是离散化的，积分式均按有限离散量的求和来计算，故重建像也只能是近似的. 对分辨率的要求越高，取样点数越多，数据采集及重建运算都越复杂，加上波长的限制和噪声的影响，图像的分辨率和清晰度是有限制的，要综合各种因素，决定采样的适当数量，以求在最节约的情况下得到最合理的分辨率.

(二)逆投影重建法

逆投影重建法是一种最直观、易于想象的重建方法. 参看示意图 5.5.14. 假设我们从三个方向 $\theta=0°$，$45°$，$90°$ 分别得到了投影函数 $p_1(v)$，$p_2(v)$ 和 $p_3(v)$，要想重建物函数 $f(x,y)$，则可以把 $p_1(v)$，$p_2(v)$ 和 $p_3(v)$ 向着相反的方向投影回去. 把经过 (x,y) 点的所有的逆投影线相应的 $p_\theta(v)$ 值叠加，以得到简化的重建像函数 $f_s(x,y)$. 例如图中 Q 点坐标为 $(1,1)$，经过该点的逆投影线有线 $(1,-1)$，线 $(2,0)$ 和线 $(3,1)$，故可得

$$f_s(Q) = f_s(1,1) = K[p_1(4) + p_2(4) + p_3(6)], \tag{5.5.21}$$

式中，K 为一比例常数，与取样角设的多少及射线长度等有关．也就是说，简化的逆投影重建的一般式为

$$f_s(x,y) = K\sum_i p_{\theta i}(x\sin\theta_i - y\cos\theta_i). \tag{5.5.22}$$

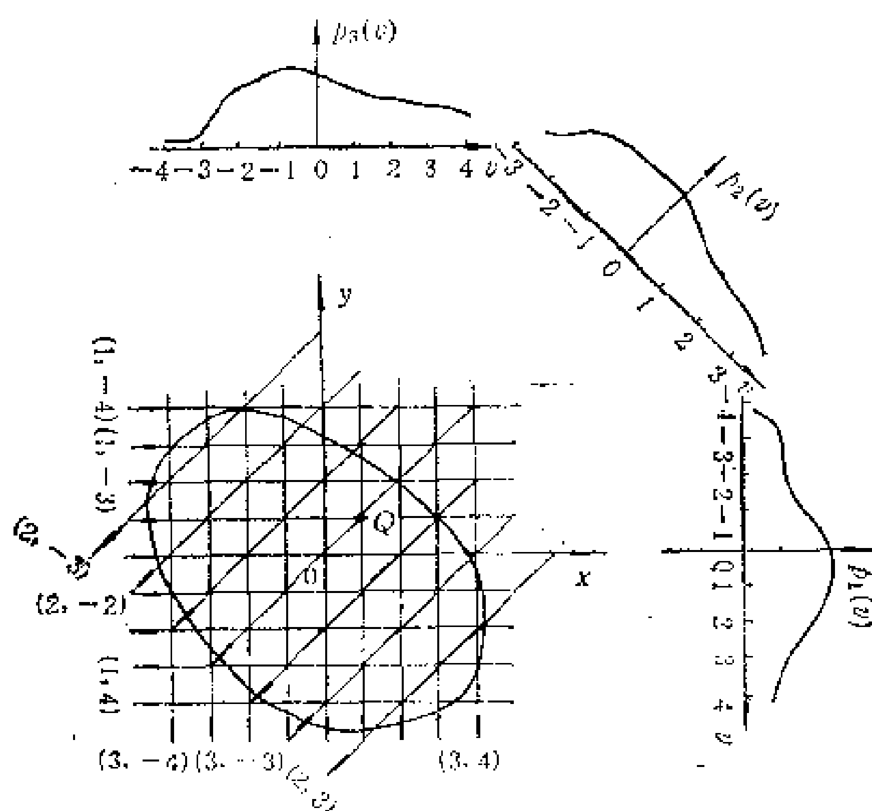


图5.5.14　逆投影重建法

可以证明式(5.5.22)的重建公式所得到的重建象与原物函数相比有较大畸变，它们二者间的关系(当 $\Delta\theta\to 0$ 时)为

$$f_s(x,y) = f(x,y)\otimes\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, \tag{5.5.23}$$

式中，⊗代表卷积．

要想重建 $f(x,y)$，不能单用式(5.5.22)那样一个简单公式，而需要解卷积，亦称为图像复原．实用起来比较方便的方法则是滤波逆投影重建法．即先求 $p_\theta(v)$ 对 v 的空间傅氏变换，进行空

间滤波，滤波函数为$|f_s|$，再求傅氏逆变换，最后对 θ 进行积分式求和，即可得到 $f(x,y)$ 重建。其公式表示如下：

$$P_\theta(f_s)=\int_{-\infty}^{\infty}p_\theta(v)e^{-j2\pi f_s v}dv, \qquad (5.5.24)$$

$$Q_\theta(f_s)=|f_s|P_\theta(f_s), \qquad (5.5.25)$$

$$q_\theta(v)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}Q_\theta(f_s)e^{j2\pi f_s v}df_s, \qquad (5.5.26)$$

$$f(x,y)=K\int_0^{\pi}q_\theta(v)d\theta=K\int_0^{\pi}q_\theta(x\sin\theta-y\cos\theta)d\theta, \qquad (5.5.27)$$

或
$$f(x,y)=K\sum_i q_{\theta_i}(x\sin\theta_i-y\cos\theta_i), \qquad (5.5.28)$$

式中，f_s 为空间频率。

显然，式(5.5.24)—(5.5.28) 所描述的滤波逆投影算法和由式(5.5.23)解卷积重建 $f(x,y)$的结果是一致的，但滤波逆投影算法实现起来较为方便，故实际上较多使用。此外，再考虑降低噪声等要求，式(5.5.25)中的滤波函数$|fs|$有时要作一些修正，以便得到更好的重建效果。

(三)代数重建法

将欲成像的物体断面分为若干个足够小的单元，例如分为 $N\times N$ 个线段为△的正方单元，设在每一小单元内，欲重建的参量为一常数，记为 f_i。在以上假设下，沿某一射线的投影函数可用沿该射线的 f_i 的取和来代替式(5.5.14)的线积分，即

$$\sum_{i=1}^{N^2}f_i l_i(\theta,v)=p_\theta(v), \qquad (5.5.29)$$

式中 $l_i(\theta,v)$ 为第 i 个单元切割射线(θ,v)的长度，如果该单元与射线(θ,v)不相交，则其长度为 0 .

式(5.5.29) 为一元线性方程式。由于有 N^2 个未知数 f_i，一般说来，至少需要有 N^2 个方程式，方可求解出 f_i的唯一解。例如，

θ、v 均取N个不同值，即可得到适当的线性方程．然后求解此线性方程组，则可得到重建像．

当N值很大时，求解线性方程组的计算量是很大的．很多人研究了不同的算法以减少解方程组的计算量．例如 Levinson 算法、最小二乘方递归算法等．

(四)几种重建方法的比较

到目前为止，人们对上述三种重建图像的方法所能提供的图像质量的优劣还是有争论的．不过，一些较初步的工作表明，滤波逆投影重建像的质量比傅氏变换重建像要好，而代数重建法则有可能得到最好的图像，因为这种方法能比较方便地利用一些待成像参量的已知信息．

就几种重建像方法的计算量而言，当N值不很大时（如$N \leqslant 100$），所需的计算时间差别不很明显，而当N值很大时，傅氏变换方法所需计算量远小于另外两种方法，代数重建法则计算量最大．详细比较见表 5.5.1．

表5.5.1 几种超声 CT 重建方法计算量的比较

重建方法	傅氏变换	滤波逆投影	代数重建（只一次迭代时）
运算数	$8N^2\log_2 N$	N^3	$2N^3$
计算时间 $N\times N=100\times 100$	1/2s	1s	2s
计算时间 $N\times N=200\times 200$	2s	8s	16s
计算时间 $N\times N=1000\times 1000$	80s	1000s	2000s

表 5.5.1 中，一次运算指的是一次乘法和一次加法，并按每一次需用 1μs 来计算．通常的 CT 成像设备采用一些专用的硬件来进行重建计算，从而提高重建速度．

此外，除本节中讨论的以线扫描方式获得投影函数外，超声 CT 成像常采用扇扫描方式，其重建方式原理上和线扫描的一样，但具体重建公式需作修正．

5.5.5 合成孔径成像

采用换能器阵列，各阵元作为点源发射，照射整个物体，接收来自物体各点的散射声信号并加以储存，然后根据各成像点的空间位置，对各换能器元接收的信号引入适当延迟，以获得被成像物体的逐点聚焦声像，这种成像方式称为合成孔径成像。

合成孔径聚焦方式又分为相延和时延聚焦两种，如图 5.5.15 所示.

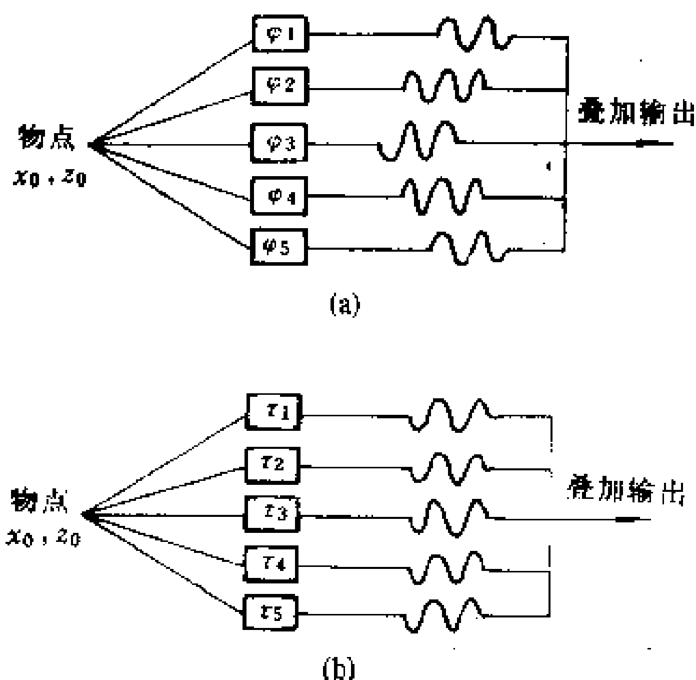


图5.5.15　合成孔径聚焦
(a) 相延聚焦；　(b) 时延聚焦

图 5.5.15(a)所示的为相延聚焦，即对各换能器阵元(1，2，…n)所接收到的由(x_0,z_0)来的散射信号引入适当的相延 φ_1，φ_2，…φ_n，然后叠加输出．当 φ_1，φ_2，…φ_n 的选择正好是按对(x_0,z_0)聚焦时，各通道的信号正好同相叠加，因而输出最大，即通过相延实现了对(x_0,z_0)点的聚焦．改变 φ_1，φ_2，…φ_n，即可移动聚焦点．图 5.5.15(b)则示出时延聚焦，即按照欲成像点的位置，适当选择各通道信号的时延 τ_1，τ_2，…τ_n，使得来自该点的信号同相叠加，从而

实现聚焦.

一般说来,采用相延的合成孔径成像,需要用较长的脉冲以保证整个孔径的有效利用,但这却会带来如全息成像的缺点. 因为相位相差若干个整周期的信号也可以同相叠加,造成孪生像的问题. 如果采用时延方式,则可使用只有一两周或数周的短脉冲,这样,距离较远的两个点的散射信号不能互相叠加,因而旁瓣问题可以减少,孪生象可以消除. 当然,如采用短脉冲,整个系统需要有足够的带宽.

由于时延聚焦比起相延聚焦来优越性较多,合成孔径成像系统多用时延聚焦.

用于获得二维断层图像的合成孔径成像系统通常采用线孔径. 图 5.5.16 为N元线阵在一个平面内(xz 平面)成像的示意图. 设换能器和物体在 y 方向均为无穷大,故此问题为二维问题. 各换能器元既作发射又作接收,用一短脉冲激励,所接收的声信号,经前置放大后记录.

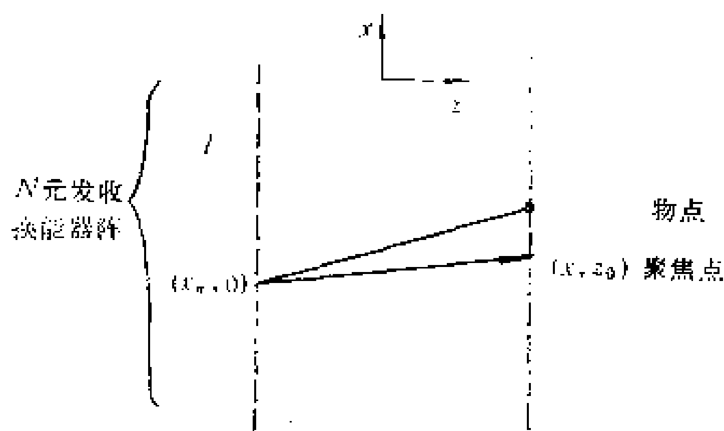


图5.5.16　N 元线阵二维成像

设物体为位于(x,z_0)的一点源,当阵元$(x_n,0)$工作时,接收信号相对于发射信号的时延为

$$t=\frac{2}{c}\sqrt{(x-x_0)^2+z_0^2}\ .\tag{5.5.30}$$

为得到整个 xz 平面内的像,需分别对该面内每一个点(x,z)聚焦,即分别引入相应的时延 t_n 于第 n 个换能器所接收的信号

$$t_n = t_0 - \frac{2}{c}\sqrt{(x_n - x)^2 + z_0^2}\ ,\qquad (5.5.31)$$

式中 t_0 为常数，引入 t_0 的目的在于保证时延 t_n 为正值，以便从电路上实现这一时延. t_0 与换能器之位置 x_n 无关，但可以根据(x, z)来选取适当的值.

延迟后的信号经过一个选通门 $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + T$，其中 T 为选取的脉冲长度，然后将各换能器对应通道的信号进行线性或非线性叠加，再用所得总信号以适当方式调制荧光屏上对应点的亮度，则可得到 xz 平面的像显示. 通常这种时延方式的合成孔径成像，也称为逆投影重建像.

合成孔径二维成像(线孔径)与采用电子聚焦的B型成像有许多类似之处. 合成孔径聚焦方式本质上与B型成像的电子聚焦相同，两种成像方法所得到的图像的内容也相同. 二者的主要区别在于，B型成像的电子聚焦对发射信号和接收信号都进行了时延聚焦，发射声束是聚焦声束，而合成孔径成像的聚焦只对接收信号进行，发射声束为扩散声束；B型成像聚焦的焦距是固定的，即便是电子动态聚焦，也只是取若干个聚焦点，其成像分辨率在焦点附近和其他位置有较大区别，式(5.5.5)—(5.5.9)所表示的点扩散函数及横向分辨率都是指在焦点处而言，而合成孔径成像则是对像平面内每一个像素点逐点进行时延聚焦，整个成象孔径内各个位置的图像分辨率比较接近，其横向点扩散函数为

$$H(x) = \frac{\sin[2\pi N l (x - x_0)/\lambda z]}{\sin[2\pi l (x - x_0)/\lambda z]},\qquad (5.5.32)$$

其横向单点3dB分辨率为

$$d_x = 0.89\lambda z/2D = 0.89\lambda z/2(N-1)l,\qquad (5.5.33)$$

式中，D为线阵的孔径，即合成孔径的大小.

合成孔径的图像重建过程中可以采用各种适用于不同成像对象的特殊处理，以提高图像的信噪比和清晰度等. 例如，为了减小旁瓣可以采用非线性叠加，为了消除镜面反射的影响，采用选择性合成等，对这些问题此处不准备详述. 此外，5.5.2 节中对于B型

成像的许多讨论也对合成孔径成像适用.

合成孔径二维成像可以实现实时成像.图 5.5.17 为一实时线阵合成孔径成像系统方框图. 整个系统的工作可分为两个过程，即数据采集和像的合成(重建).

在数据采集过程中,32单元换能器阵，由多路电子开关控制，逐一顺序发射声脉冲和接收反射声信号，并加以放大，经

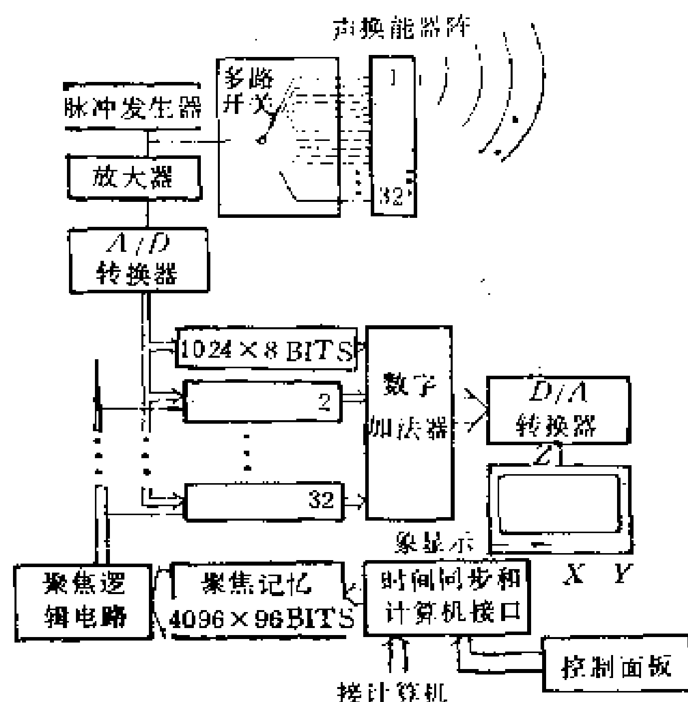


图5.5.17　实时线阵合成孔径成像系统

AD 转换器变成数字信号，顺序储存在记忆单元内. 这一过程需用的时间可以在 10ms 以下.

在数据采集完成后，利用事先储存好的对应于成像截面内各点的延时数据，自动控制与换能器之对应的各通道信号的延时，然后进入数字加法器，得到像平面内各点的像强度. 将此信号经 D/A 转换器用来调制荧光屏上对应点的亮度，得到声像的显示. 对于成像孔径为 256×256 像素，合成象的过程可以少于 20ms(用专用集成电路功能块来实现). 加上数据采集用的时间，要得到一帧象需用的时间少于 30ms，达到了实时动态显示的要求.

5.5.6　声全息成像

声全息成像是将光全息原理引进声学领域后产生的一种成像技术和数据处理手段. 早期的声全息完全模仿光全息方法，即用一参考声束与频率相同的物体声束相干，在记录平面内，叠加波为

$$U = U_0 + U_r, \qquad (5.5.34)$$

式中 U_0 为物体波，U_r 为参考波．声强度为

$$I=UU^*=|U_r|^2+|U_0|^2+U_rU_0^*+U_r^*U_0, \qquad (5.5.35)$$

式中上标*指复共轭．记录此强度，即得到全息图．用一束激光照射全息图，即可得到分别与 U_0 及 U_0^* 相应的两个像，称为孪生像．U_0 真实地反映了原物体，称为真像，其为虚像；而 U_0^* 则为其共轭像，是实像．重建时如果所用的照明波与形成全息图时所用的波束的波长相同，那就如同光全息那样，重建像为与原物完全相同的立体像．但在声全息中，为了获得可见的重建像，重建波束必须为可见光．而可见光的波长，与通常用来形成声全息图的声波波长相差数百倍，因此，重建像有严重的深度畸变，从而失去了三维成像的优点．

由于通常使用的检测声波的压电换能器，能够记录声波的幅度和相位，并将其转换成相应的电信号，目前研究比较活跃的声全息方法与光全息方法不同．只有液面法声全息基本上保留了光全息的作法．而各种扫描声全息则不再采用声参考波．

扫描声全息大致可分为两类．一类是激光重建声全息，其用一声源照射物体，物体的散射声信号被换能器阵列接收并转换成电信号，再与从某个方向入射的声波的模拟电信号相加，用叠加信号的幅度去调制荧光屏光点的亮度，即在荧光屏上形成全息图．将其拍照下来，再用激光照射全息图，即可获得重建像．

另一类扫描声全息方法是计算机重建声全息．设用一声源照射物体，物体的散射声波函数为 $U_0(x,y,z_0)$，在全息记录平面内声信号分布为 $U_H(x_H,y_H)$，它们之间的关系式为

$$U_H(x_H,y_H)=\iint U_0(x,y,z_0)e^{jk\sqrt{(x_H-x)^2+(y_H-y)^2+z_0^2}}\,dxdy, \qquad (5.5.36)$$

在远场近似条件下，

$$U_H(x_H,y_H)=\iint U_0(x,y,z_0)e^{jkz_0}e^{jk(x_H^2+y_H^2)/(2z_0)}e^{-j\frac{k}{z_0}(xx_H+yy_H)}\,dxdy$$

$$= e^{jkz_0} e^{jk(x_H^2+y_H^2)/2z_0} \iint U_0(x,y,z_0) e^{-\frac{jk}{z_0}(x x_H + y y_H)} dx dy. \tag{5.5.37}$$

显然，式(5.5.37)中的积分式为物函数 $U_0(x,y,z_0)$ 的二维空间傅氏变换形式，因而，很容易由全息函数 $U_H(x_H,y_H)$ 通过傅氏逆变换来计算 $U_0(x,y,z_0)$，亦即得到重建的像函数 $U_i(x_i,y_i,z_0)$，如下式所示：

$$U_i(x_i,y_i,z_0) = e^{-jkz_0} \iint U_H(x_H,y_H) e^{-jk(x_H^2+y_H^2)/2z_0} \times e^{j\frac{k}{z_0}(x_i x_H + y_i y_H)} dx_H dy_H. \tag{5.5.38}$$

根据式(5.5.38)，由记录的全息函数 $U_H(x_H,y_H)$，用计算机可以算出重建像函数 $U_i(x_i,y_i,z_0)$，这种重建计算实际上是空间傅氏变换.

5.5.7 多普勒成像

利用运动物体散射声波的多普勒效应，按散射声波的多普勒频移的幅度来显示图像，其图像与散射体的运动速度分布相对应(参看 5.2.7 节，多普勒效应). 如图 5.5.18 所示.

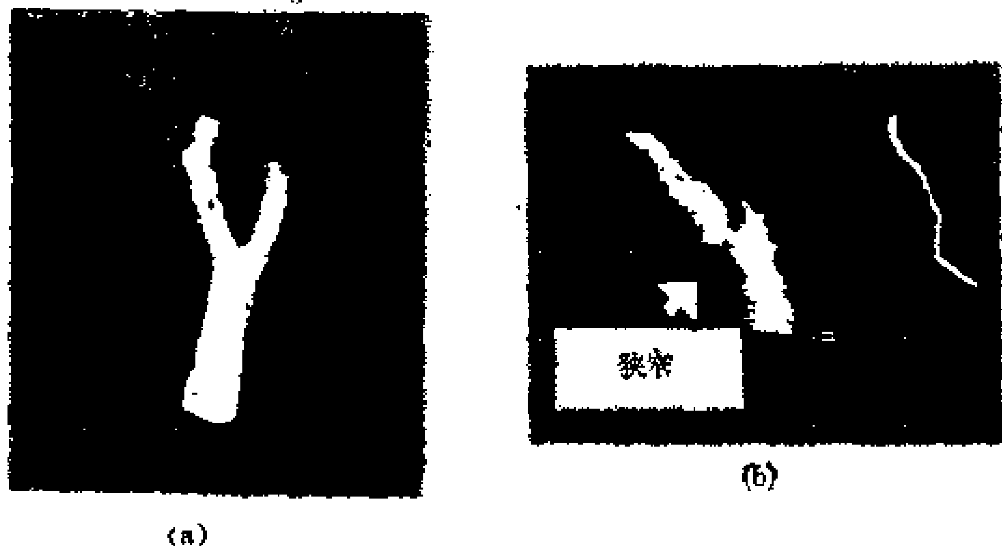


图5.5.18 用多通道连续波多普勒成象系统得到的颈动脉多普勒图像；(a)前后投影；(b)侧投影(由侧投影可看到血管狭窄部分)

多普勒成像分为连续波和脉冲波成像两种．连续波成像系统采用换能器面阵，声束沿 z 方向传播，在 xy 平面内扫描．在声束扫描区域内的运动物体散射声波经接收，进入相应的通道放大，并与主振荡器的参考信号混频，再解调得到多普勒信号，经频谱分析，可得多普勒频移．用各通道多普勒频移的大小去调制荧光屏相应光点亮度，即可得运动物体速度沿 z 方向投影图像．

脉冲多普勒成像原理如图 5.5.19 所示．当物体运动时，其散射(或反射)信号到达接收器的时间在变化．设发射换能器工作在脉冲状态，脉冲重复周期为 T_p，则对应于每一个发射脉冲该运动物体散射回来的信号的时延不同，记为 T_d．用一距离选通门选出需显示的深度的物体的散射回波信号，与主振荡器的参考信号叠加，则相应于每一次发射脉冲的散射回波与参考信号叠加得到的信号的幅度随 T_d 而变化．记录叠加信号幅度的变化，可以推算

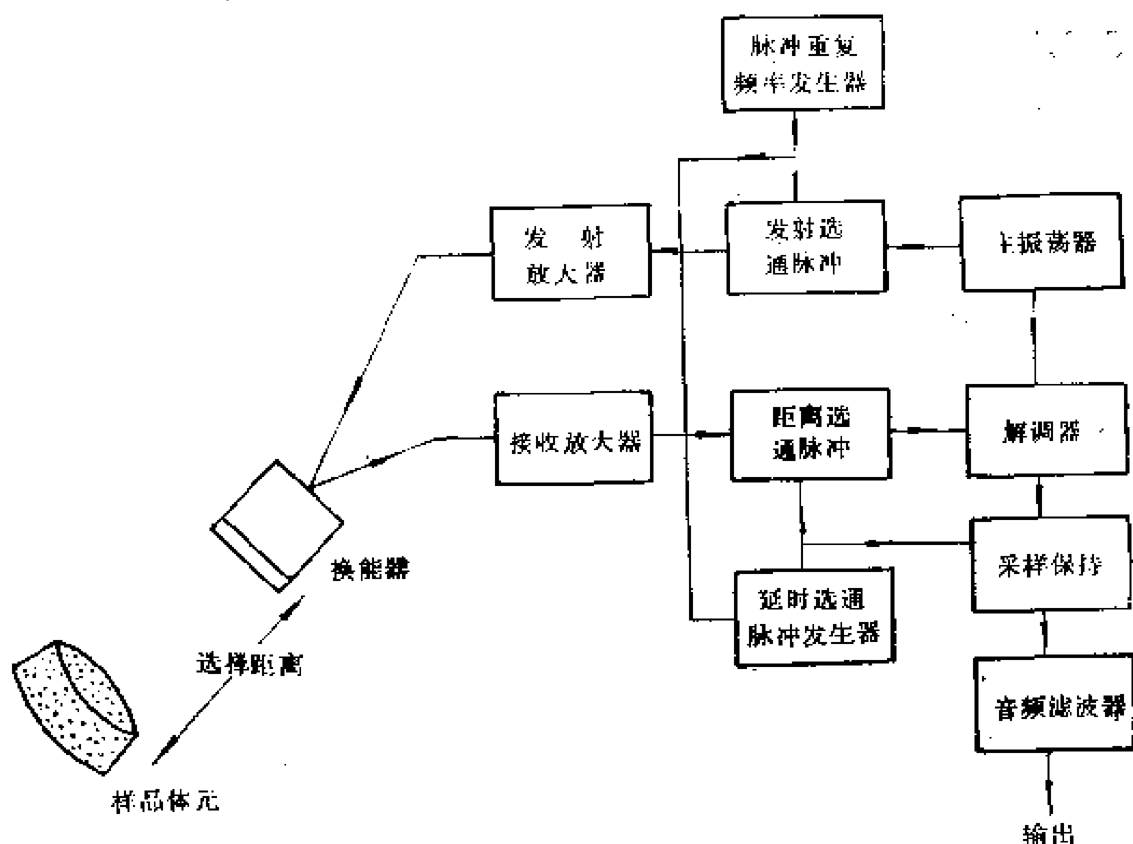


图5.5.19 脉冲多普勒成像原理

出T_d，并按如下的关系式可以测出物体运动速度v.

$$T_d=\frac{2z}{c}, \tag{5.5.39}$$

$$v=\frac{dz}{dt}=\frac{c}{2}\cdot\frac{dT_d}{dt}. \tag{5.5.40}$$

此外，由散射信号相位的变化φT_d及多与普勒频移的关系，很容易推导出脉冲多普勒的多普勒关系式，即

$$f_d=\frac{1}{2\pi}\frac{d\varphi}{dt}=\frac{2\pi}{2\pi}\frac{d(f_sT_d)}{dt}=f_s\frac{2v}{c}. \tag{5.5.41}$$

此关系式与5.2.7节中按常规的连续波多普勒效应推得的结果相同。

脉冲多普勒成象中，由于多普勒信号是按脉冲重复周期采样，根据Nyquist采样定理，这势必对最大多普勒频移f_{dmax}及物体最大运动速度v_{max}有所限制，即

$$f_{dmax}=\frac{1}{2T_p}, \tag{5.5.42}$$

$$v_{max}=\frac{1}{2}\lambda_sf_{dmax}=\frac{\lambda_s}{4T_p}, \tag{5.5.43}$$

$$\lambda_s=\frac{c}{f_s}. \tag{5.5.44}$$

上述各种超声成像方法中，由于B型和多普勒成像方法较为简单、成象设备成本较低及能够实时动态显示，自70年代以来，已在超声诊断中得到了广泛的应用，提供了大量有价值的诊断信息。随着计算机技术和图像处理技术的巧妙应用，这两种成像技术不断发展，图像质量不断提高，而且尚有改进的潜力。其他几种成象方法如C型、超声CT等由于成像方法较复杂，难以获得动态图像等一些原因，尚待进一步深入研究，照目前的状态，还不能在临床诊断中得到广泛应用。

§5.6 超声组织辨认

5.6.1 引言

目前的超声诊断主要是用B型断层图像，从形态学的角度来发现病变、进行诊断的，它只利用了人体组织的回声信号的幅度信息，而摒弃了许多其他有用信息，因而难以对组织的性质(如良性肿瘤与恶性肿瘤、正常肝与肝炎等)进行辨别.

声波在生物组织中的传播是由其声学特性参量(包括声速、声阻抗率、声衰减系数等)来决定的(参看§5.2)，不同生物组织及组织的不同病理状态与其声学参量有着定量的联系，因而通过对声波在组织中传播规律的测量，继而估算传播参量(如散射系数，界面反射系数等)及声学特性参量，有可能定量地综合判断组织性质. 研究定量测定组织声学特性参量并显示组织的超声识别特征的学科分支称为超声组织辨认.

超声组织辨认的研究开始于50年代，但由于对超声波在生究物组织中的传播规律的知识不够及技术条件的限制，这方面的研工作被推迟了20多年. 近几年来，由于超声诊断的迅速发展，对组织辨认的要求越来越迫切，因而这方面的研究工作十分活跃. 然而，至今我们对生物组织与超声波的相互作用的机理的了解还是不够的，组织辨认的工作仍然面临许多困难，然而随着这些困难的克服，它将会对超声诊断向定量化前进显示巨大的威力.

超声组织辨认的主要方法有：参量估算、结构特征和动态特征. 现分述如下.

5.6.2 参量估算

参量估算包括组织声学特性参量和传播参量的估算. 对于与频率有关的参量包括对其频率特性的估算(如声衰减系数、声散射系数等)，对于与方向有关的参量则包括对其方向性的测量(如声散射系数、界面反射系数等).

参量估算方法包括透射型和散射型两类．透射型主要是透射型超声CT成像，它通过图像重建可以得到声速、声衰减系数及其频率关系以及非线性参量等声学参量在一个断层内的分布，但由于其采用透射方法，且需要从许多不同方位来测量物体的透射声波，对于生物体的许多部位都不适用，而只适用于如乳房等少数部位的参量估算．而散射型估算方法利用的是背向散射声信号，对体内多数脏器和软组织的参量估算比较适用，本节将主要介绍散射型参量估算方法．

(一) 声衰减系数的估算

由于生物组织的声衰减特性，由不同深度散射回来的信号的特性既与组织的散射特性(取决阻抗率分布)有关，也与组织的声衰减特性有关．要由散射信号来进行超声组织辨认，则需由信号中分离(或提取)出散射系数(及阻抗率)分布和声衰减系数的分布(包括其频率特性)．这两个参量中，只要有一个量的估算问题得以解决，另一个量就很容易算出．二者在频域的关系式为

$$\Pi(f,z)\,p_0(f)\,e^{-\int \alpha(f,z)dz}e^{-jkz}=B(f,z). \qquad (5.6.1)$$

式中，z 为声传播方向的坐标，$\Pi(f,z)$ 为背向散射系数，$p_0(f)$ 为发射声波($z=0$ 处)的声压经接收换能器转换成的电信号，$\alpha(f,z)$ 为声衰减系数，而 $B(f,z)$ 为测得的背向散射信号．在此式中，声波的衍射损失未计，也可以说，此式中的 $B(f,z)$ 是经过衍射修正后的数据．

研究表明，由背向散射信号估算声衰减系数较易实现．由于声衰减系数及其频率特性对于正常组织和不同病变组织存在较大的差异，因而诊断意义较大，加之声衰减系数的估算又是声散射系数(继而声阻抗率)估算的必要前提，因而精确的声衰减系数估算方法的建立有着重要的意义．

在建立声衰减系数估算方法中，通常假定介质为统计性质均匀的，即声衰减系数与声散射系数只是频率的函数，而与空间位置无关．对于超声诊断的实际情况，我们可以把声波传播中穿过的各个不同器官或病变分别地看成均匀物体，即看作分段均匀，因而

上述假设也可以适用.

声衰减系数的估算方法主要有两种，即中心频率偏移法和回波幅度衰变法.

(1) 中心频率偏移法

假设入射声波为高斯型脉冲,其幅度频谱为(换能器双向转换已计在内)：

$$|p_0(f)| = 1/(\sigma\sqrt{2\pi})\exp[-(f-f_0)^2/2\sigma^2], \qquad (5.6.2)$$

式中，σ^2 为频谱的协方差，f_0 为中心频率.

又设介质的声衰减系数与频率的关系式为

$$\alpha(f) = \beta f^n, \qquad (5.6.3)$$

则接收到的来自深度 z 处的背向散射信号的频谱为

$$|B(f,z)| = |p_0(f)|\exp[-2\beta f^n z], \qquad (5.6.4)$$

由于入射信号的主要频谱分量集中在 $0<f<2f_0$ 的范围，f^n 可以展开为

$$f^n = f_0^n\left[1-\frac{f_0-f}{f_0}\right]^n$$

$$\simeq f_0^n\left[1-\frac{n(f_0-f)}{f_0}+\frac{n(n-1)(f_0-f)^2}{2f_0^2}\right], \qquad (5.6.5)$$

因此，

$$|B(f,z)| = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp(d)\exp[-(f-f_c)^2/2\sigma'^2], \qquad (5.6.6)$$

式中,f_c 和 σ'^2 分别为散射波的中心频率和协方差,且

$$f_c = \frac{f_0-4b\sigma^2\beta z}{1+4a\sigma^2\beta z}, \qquad (5.6.7)$$

$$\sigma'^2 = \frac{\sigma^2}{1+4a\sigma^2\beta z}, \qquad (5.6.8)$$

$$a = \frac{1}{2}n(n-1)f_0^{n-2}, \qquad (5.6.9)$$

$$b = n(2-n)f_0^{n-1}, \qquad (5.6.10)$$

$$c = \left[\frac{1}{2}n^2 - 2n + 1\right] f_0^n, \qquad (5.6.11)$$

$$d = 4c\sigma^2\beta z - \frac{(f_0 - 4b\sigma^2\beta z)^2}{1 + 4a\sigma^2\beta z}. \qquad (5.6.12)$$

当声衰减系数与频率成线性关系时，即 $n=1$，此时，上述公式可大为简化，且可得

$$f_c = f_0 - 2\beta\sigma^2 z, \qquad (5.6.13)$$

$$\sigma'^2 = \sigma^2. \qquad (5.6.14)$$

显然，测量散射回波的中心频率 f_c 随 z 的变化及协方差 σ^2 后，可根据式(5.6.13)估算 β 值.

当声衰减系数与频率成平方关系时，即 $n=2$.

$$f_c = \frac{f_0}{1 + 4\sigma^2\beta z}, \qquad (5.6.15)$$

$$\sigma'^2 = \frac{\sigma^2}{1 + 4\sigma^2\beta z}. \qquad (5.6.16)$$

由式(5.6.15)可以估算 β 值.

由于生物组织只能看成是统计特性均匀的介质，因而，在实际估算 β 值时，必须进行相当数量的空间统计平均. 此外，由于本节推导的前提是入射波为高斯型脉冲，而实际使用的声波很难完全满足这种要求，加之实际散射信号在一定的相干长度内会互相迭加，这在公式推导中也未加考虑，因而这种声衰减估算方法是不够完美的.

(2) 回波幅度衰变法

另外一种声衰减系数的估算方法是在时间域内按散射回波的幅度随深度的变化来进行的. 假设入射声波为具有任意频谱的脉冲，散射系数的频谱也取任意函数，则对应于由深度 z 处散射回来的叠加信号的频谱可以写成

$$B(f,z) = A(f)\exp[-2\alpha(f)z]\exp[-j2kz]. \qquad (5.6.17)$$

式中，$A(f)$ 应与散射系数与换能器发、收频谱特性有关. 设其为任意复函数，并仍假设

$$a(f)=\beta f^{n}, \tag{5.6.18}$$

则在时间域可将相应的背向散射信号写成

$$b(t,z)=\int B(f,z)\exp(j2\pi ft)df, \tag{5.6.19}$$

而 $b(t,z)$ 的检波幅度则为

$$b_M(z)=b(t_M,z)=\int A(f)\exp(-2\beta f^{n}z)df. \tag{5.6.20}$$

其中 $t_M=2z/c+\Delta$，且 Δ 为一常数，其取决于 $A(f)$ 的相位关系，通常满足

$$\Delta<T, \tag{5.6.21}$$

T 为等效的发射声波射频周期。

由式(5.6.20)可得

$$\frac{d[\ln b_M(z)]}{dz}=\frac{d[b_M(z)]/dz}{b_M(z)}$$

$$=-\frac{2\beta\int f^{n}A(f)\exp[-2\beta f^{n}z]df}{\int A(f)\exp(-2\beta f^{n}z)df}=-\frac{2\beta M_n(z)}{M_0(z)}, \tag{5.6.22}$$

其中，$M_n(z)$ 为对应于由深度为 z 处散射回来的叠加信号的 n 阶谱矩(下标 0 表示零阶)，且

$$M_n(z)=\int f^{n}A(f)\exp(-2\beta f^{n}z)df. \tag{5.6.23}$$

显然，如果实测背向散射信号检波后的幅度为 $b_M(z)$，且用富氏变换计算背向散射信号的频谱，则可根据式(5.6.22)估算 β 值。

对于大多数软组织所满足的关系式

$$a(f)=\beta f \tag{5.6.24}$$

的简单情况，可得

$$\beta=-\frac{d[\ln b_M(z)]}{dz}\Big/2\bar{f}(z). \tag{5.6.25}$$

其中，$\bar{f}(z)$ 为散射声波的频率重心或平均频率，即

$$\bar{f}(z)=\frac{M_1(z)}{M_0(z)}. \tag{5.6.26}$$

$\bar{f}(z)$ 的粗略测量可以用过零检测技术进行。在这种情况下，β 值的估算相当简单，有可能实现实时估算 当然，由于实际生物介质只是统计上均匀，故 β 值的估算必须采用大量的空间统计平

均，这样会使分辨率降低.

还应说明的是，在声衰减系数的估算中，均需先测量 α 与 f 的关系，即需测定 n 值，然后才能估算 β 值，并算出 $\alpha(f)$. n 值的确定可通过不同 z 处散射信号频谱的比较来进行. 根据式(5.6.17)或(5.6.4)可得

$$2\beta f^n(z_2-z_1)=\ln\left|\frac{B(f,z_1)}{B(f,z_2)}\right|=X(f). \qquad (5.6.27)$$

再对式(5.6.27)的两端取对数，得

$$n\ln f+D=\ln X(f)=Y(f). \qquad (5.6.28)$$

式中 D 为与 z_2、z_1、β 有关的量，但相对于 f 是常数.

由式(5.6.28)，显然，$Y(f)$ 与 $\ln f$ 成线性关系，求出 $Y(f)$ 对于 $\ln f$ 的曲线的斜率，则可算出 n. 与前述同理，n 值也必须经过统计平均来确定.

(二) 声散射系数的估算

前面已说明，声衰减系数的估算是声散射系数估算的前提. 在声衰减系数 α 已知的情况下，根据式(5.6.1)，声散射系数很容易算出. 不过，声散射系数的估算值也只有经过足够的统计平均才有意义. 声散射系数的大小以及与频率的关系和与角度的关系与介质的结构、相关长度及阻抗非均匀性等有关(参看 5.2.3 节)，因而也与生物组织的病理状态有较密切的联系. 故声散射系数的精确估算对于超声组织辨认十分重要.

(三) 等效声阻抗的估算

根据生物组织散射的连续模型，由非均匀介质的波动方程[参看5.2.3(二)节中式(5.2.26)]，对于入射声波为具有 $A(z-c_0t)$ 形式的短脉冲，换能器所接收到的背向散射信号可近似地写成

$$B(z,t)=\int A(2z-c_0t)h(z)dz, \qquad (5.6.29)$$

式中，

$$h(z)=\frac{d}{dz}\ln Z_e(z). \qquad (5.6.30)$$

而 $Z_e(z)$ 称为介质的等效声阻抗，且

$$Z_e(z) = \iint Z(x,y,z)B(x,y)dxdy, \tag{5.6.31}$$

式中 $Z(x,y,z)$ 为介质的声阻抗率，$B(x,y)$ 为入射声波的声束孔径函数.

由式(5.6.29)，可以由测得的背向散射信号通过解卷积求得 $h(z)$，再根据式(5.6.30)可以估算出介质的等效阻抗.

等效阻抗估算在一些眼科疾病诊断的试验中取得了成功的结果，然而，至今在其他器官的应用中尚没有得到好的结果，可见尚需进行大量研究. 等效阻抗的正确估算将对声阻抗率及声速分布的估算有重要意义.

(四)声速的估算

声速的精确估算是十分棘手的问题. 目前，声速估算主要靠透射型超声 CT 重建方法，这种方法不仅使用局限性很大，且由于声波的折射及多途传播等原因，估算误差也较大. 从背向散射信号来估算声速则更困难. 按照现在的研究进展来看，只有假定密度变化可以忽略时，或密度分布已知时，可能根据声阻抗率的估算结果来估算声速.

(五)非线性参量 B/A 的估算

非线性参量 B/A (参看 5.2.6 节) 是介质的非线性特性的量度. 对于生物组织而言，它不仅与组织的结构有关，还与其粘滞性及生理功能有关. 因而，它是超声组织辨认的一个重要参量. 近年来对这一参量的研究逐渐引起人们的重视.

介质的非线性参量可以用一束低强度的连续波作为探测波，并用一束较强的脉冲波与其垂直，二者发生非线性相互作用，使探测波的相位受到调制，且调制的程度与该脉冲波的声压及相应位置的 B/A 参量的乘积相关，因而可根据探测波的相位调制来估算 B/A.

此外，也可以用两束同方向的声波产生非线性作用来估算 B/A. 当这样两束声波相互作用时，会产生低频二级波，其幅度取决于声束传播途经上 B/A 值的积分. 用5.5.4节中介绍的超声CT

方法，从不同方向照射物体并测量二级波的幅度，就可以重建出B/A的分布.

到目前为止，B/A参量的估算工作还很初步，尚难由现有结果得出可靠的结论.

5.6.3 结构特征

生物组织的结构特征(即空间分布的均匀性、周期性等)对于区分不同组织和病变程度十分重要，如何提取组织的结构特征，用哪些空间参量来描述组织的结构，以使不同组织的区别更为明显，是研究结构特征的重要方面.

描述结构特征的最简单而常用的方法是直方图（参看5.4.8节）. 通常用的直方图表示的是B型图像中某区域中像素亮度分布的几率. 如果亮度分布非常集中，表明组织结构较均匀，反之，如果亮度分布很分散，则说明结构不均匀.

直方图不仅可用于表示B型图像亮度的分布，也可以用于表示各声学参量(估算值)的分布，从而清楚地反映声学参量空间分布的均匀程度，亦即结构的均匀程度，而这对病变程度的判别是很有用的.

除直方图外，还有很多种表示结构特征的方法. 例如，挑选出各声学参量(包括B型图像亮度)的极大值和极小值，显示其间距数量的分布规律，以便揭示结构的周期性；在背向散射信号频率域测定第一峰值的位置，显示其分布，这也与结构的周期性(或相关长度)有关；显示某些参量的方向性，反映组织的某些构成规律等等.

从结构特征来辨认组织的研究工作还比较初步，尚有大量的实验及机理研究需要进行.

5.6.4 动态特征

生物组织的动态特征也是区分病变状态的另一重要途径. 所谓动态特征包括两个方面，其一指某些运动器官及血液的运动

特性，如心脏或血管某个部位的运动情况，包括位移、速度和加速度的波形以及血流速度分布规律等．其二是指某个声学参量的动态行为，例如，肌肉收缩和放松时散射系数的变化，心脏某部位运动情况发生的变化，肝脏声衰减系数或散射系数的变化，胎头大小在生长中的变化，及某些声学参量在使用药物或某种刺激前后的变化等．

动态特征的测量通常受仪器设备的影响较小，受噪声干扰也较小，因而测量比较可靠．根据动态特征来进行超声组织辨认将会是很有希望的．

§5.7 超声的生物效应及其应用

前面的几节中我们所讨论的是生物组织对超声波的作用及如何由受生物组织调制的散射回波来提取生物组织特性问题．本节要介绍的则是超声对生物组织产生的作用，亦即超声的生物效应，并简要讨论其在医学超声中的应用．

5.7.1 超声的生物效应

超声的生物效应早已为人们所注意，1920年以前，法国物理学家 Langevin 在研究声纳时，将高强度超声射人水中，杀死了许多小鱼，就是超声生物效应的早期例证．此后，超声生物效应的研究曾十分活跃，但由于种种技术上和理论基础上的原因，这项研究工作又一度出现低潮，直至近年来方又恢复了生机．

超声的生物效应与声强、频率及生物组织本身的性质有很大关系，且有可逆效应和不可逆效应两种．可逆效应在声强度比较低的情况下发生，而声强超过一定阈值后则会产生不可逆效应．

超声生物效应按作用机理可分为：热效应、机械效应、声流效应、空化效应和触变效应等．

（一）热效应

由于生物组织的声吸收特性［参看 5.2.4（一）节］，射入组织

的部分超声能量将会变成热能，并使其温度升高．当声强一定时，对某一种组织(即 α_a 值一定)，温度变化与声波照射时间的关系如图 5.7.1 所示．

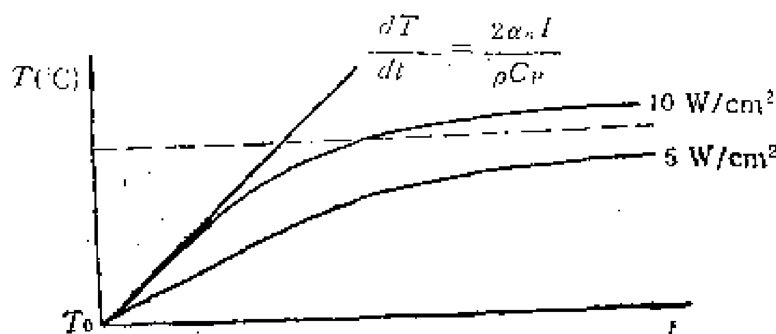


图5.7.1　生物组织在超声照射下温度的上升

图中的虚线表示生物组织发生不可逆变化的温度，例如，癌细胞在 43℃ 时受到很大损伤或死亡等．

由于超声热效应引起的温度变化的曲线的初始段接近于线性，这一段的温升可以看成是绝热过程，且温度变化斜率为

$$dT/dt = 2\alpha_a I/\rho c_p, \tag{5.7.1}$$

式中，α_a 为介质的声吸收系数，I 为人射于该处的声强，ρ 为密度，c_p 为比热．对于软组织，$\rho\approx 1\text{g/ml}, c_p\approx 4.2\text{J/g}\cdot\text{C}^\circ$，于是

$$dT/dt \sim 0.48\alpha_a I. \tag{5.7.2}$$

对声脉冲信号而言，一次脉冲作用后引起的温度升高约为

$$\Delta T = 0.48\alpha_a I\tau_p, \tag{5.7.3}$$

式中，τ_p 为脉冲持续时间．

由图 5.7.1 可知，当温度升到一定程度后(与声强度有关)，就不再随时间直线上升，而是上升速率逐渐变慢，直至趋于平衡，最后不再上升．这种现象是由于热传导所引起，当介质局部受声的照射(例如用聚焦声照射时)，或当介质的声吸收特性不均匀时，会造成温度分布的非均匀性，温度梯度越大，热传导的作用也就越明显，直至最后整个介质温度相同，达到热平衡状态．

对于热传导效应的严格分析是困难的，为了获得定性的了解，假设介质中存在半径为 R 的非均匀球形区域（聚焦声照射的非均

匀，或声吸收系数的非均匀），即周围介质没有声吸收，在不考虑对流而只考虑热传导的情况下，可得

$$T_{max}-T_0=\alpha_a IR^2/K, \tag{5.7.4}$$

式中，T_{max} 为声照射可能达到的最高温度，K为热传导系数。由于 α_a 是频率的函数，因而超声的热效应是与频率密切相关的.

（二）机械效应

当声强较低时，生物组织产生弹性振动，其位移幅度与声强的平方根成比例，但在声强足够高时，组织的机械振动则超过其弹性极限，而造成组织的断裂或粉碎，这种效应称为超声的机械效应，超声手术刀和超声碎石等都利用了这一效应。

（三）声流效应

超声入射于两不同声阻抗率的媒质界面时，动量发生变化，产生辐射压力. 当两媒质阻抗相差很大，且界面为平面时，辐射压力满足

$$F_r=\frac{IA}{c}, \tag{5.7.5}$$

式中 F_r 为辐射压力，A 为声束有效作用面积，I 为平均声强.

辐射压力对组织可产生撕力和引起声流，即引起组织的分子的移动或转动，当这种运动的幅度足够大时，会引起组织的损伤.

（四）空化效应

在液体或软组织中，存在一些小气泡（或受声波照射时形成小气泡）. 在超声波的作用下，当声压与静压力之和很小时，气泡会生长，反之则会缩小，故声波引起气泡呼吸式的振动或脉动. 在超声强弱比较低时，这种振动不很剧烈，通常不产生破坏力，称为稳态空化. 即使在稳态空化的情况下，由于声流的存在，气泡周围的应力增加，可能会造成某些生物细胞功能的改变。

当声强超过某一阈值（称为空化阈值）时，气泡的振动十分剧烈. 在膨胀期，即声压与静压力的合力趋近于零时，气泡直径迅速增大，然后，当声压改变符号时，在很大的合压力的作用下，气泡猛烈收缩，以致破裂成许多小气泡，产生强烈的冲激波和局部的高温

高压，这种现象称为瞬态空化.

空化阈值与超声波的频率有关，也与生物组织的状态有关. 在本来含有气泡(如一些多孔性的膜等)的情况下，空化阈值要低得多，空化借以开始生长的小气泡称为空化核，空化核的状态是决定空化效应强弱的主要因素.

由于瞬态空化的强烈破坏性，在超声诊断中必须防范. 实验表明，在超声诊断频段，各种生物组织的空化阈值均高于1 W/cm². 而一般超声诊断仪所用的声强通常为数10mW/cm²，因而通常不必担心瞬态空化发生.

(五)触变效应

超声波的作用还会引起生物组织结合状态的改变，如引起粘滞性降低，造成血浆变稀，血球沉淀等，这种效应称为触变效应.

在声强较低时，触变效应可能是可逆的，即在停止声照射后，组织的粘滞性、结合状态可以恢复. 然而，在声强过高时，将会造成组织的不可逆变化.

5.7.2 超声诊断的安全阈值

超声生物效应的研究表明，超声可能引起的生物组织的变化，不管是由于哪一种效应，都与声强及作用时间有关，有些效应与超声频率有着不同的关系. 尽管对超声生物效应的研究还不够充分，特别是超声对胎儿发育的潜在影响的研究还不足，因而造成医学界对于超声波用于胎儿监护常规检查有争论，但多年的实验研究和临床经验表明，只要超声波的强度和作用时间的安排遵循如图5.7.2所示的安全阈值的限制，在安全区工作，对人体及胎儿均是无害的.

由图5.7.2可知，当声强低于数10mW/cm²时，即使声照射时间很长，也不会对人体有害.

5.7.3 超声剂量学

超声强度超过一定值时，其生物效应就很明显. 正确选定超

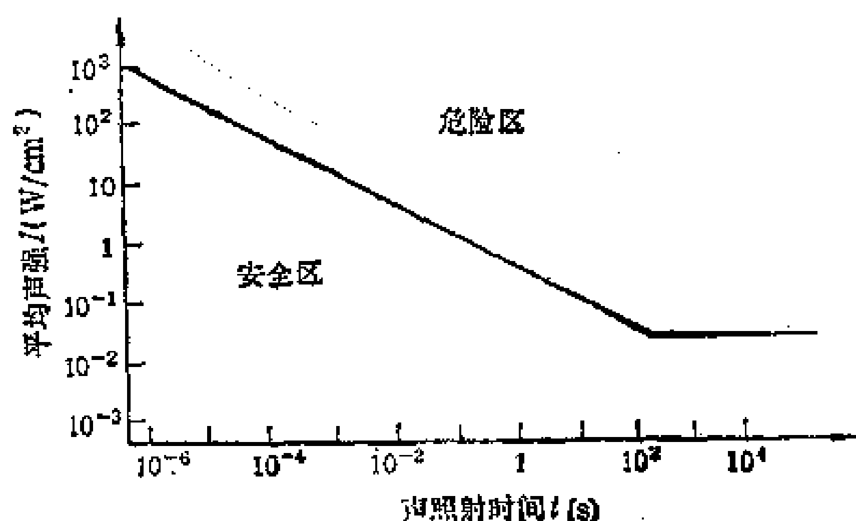


图5.7.2 超声诊断安全阈值曲线

声强度、频率和照射时间，所产生的生物效应可能会对于治疗某些疾病产生积极的贡献. 由于很多生物效应是不可逆的，如果使用不当，超声照射也可能会带来对人体特别是对胎儿的损伤，这点必须引起足够的警惕.

照射生物组织的超声波总能量，称为超声辐照剂量，或简称为超声剂量. 在不同频率下，产生同样生物效应的超声剂量可能不同. 研究生物效应与超声剂量的关系的学科分支称为超声剂量学. 超声剂量学是超声治疗的基础，目前在国际上这方面的研究十分活跃.

超声产生的生物效应不仅与生物组织受辐照的总剂量有关，更重要的是与照射剂量在空间与时间的分配有关. 对于不同生物组织，这些关系有所不同. 由于影响因素很多，目前取得的一些实验结果重复性尚不令人满意，规律性仍有待摸索，因而这方面的研究尚有大量工作可作.

5.7.4 超声治疗

超声生物效应研究的重要应用是利用超声波的能量改变生物组织的结构、状态或功能，从而治疗某些疾病，称为超声治疗. 利用较低强度的超声的“温和”的生物效应，来治疗某些疾病，称为超声理疗；反之，利用较强的超声波的剧烈作用，来切断、破坏某些组

织，则称为超声手术.

对于待治疗的病变位于体内某一区域的情况，在治疗中常希望声能集中于该病变区域，即采用聚焦声波来进行超声治疗. 用聚焦声波时，总能量消耗小，非病变区域不受损害，治疗效果较好.

(一)声束聚焦

比起超声诊断来，治疗用的超声波通常用的频率较低，而声功率则要大若干个数量级，加上希望仅病变部位受局部照射，要求声束的聚焦尖锐，焦点较小而焦区较短，因而常采用孔径较大的聚焦换能器.

早期的聚焦换能器采用声透镜聚焦，后来，发展利用球面换能器聚焦，这样可省去声透镜造成的声能损耗. 近年来，用环状换能器进行电子聚焦的方法发展较快，因为这种聚焦方式便于用电子学方法进行孔径加权，根据需要较灵活地调整聚焦特性，包括聚焦声束的横向分布和焦点位置等.

由于换能器发射声功率较大，挑选换能器材料时除了如诊断换能器那样要考虑阻抗匹配和灵敏度等外，还需选择机械Q值较高因而热损耗较小的材料.

(二)超声理疗

利用强度较低的超声波(每平方厘米数瓦以下)的热效应、机械效应等，用聚焦或非聚焦声束对疾病部位进行“加热”和机械刺激，来治疗某些疾病，称为超声理疗. 超声理疗主要包括超声按摩、超声针灸及超声热疗. 超声按摩和针灸对于治疗某些皮肤病、坐骨神经痛和某些神经疾病、脑血栓及促进伤口愈合和囊肿的吸收等都有较好的效果. 超声热疗治癌的尝试已进行了数十年，实验表明，用聚焦超声可对体表及体内深部的癌肿加温至42—43℃左右，配合化疗和放射性疗法，可有效地抑制某些癌细胞的生长，直至杀死癌细胞，而正常组织则不受影响，这表明超声治癌很有希望. 然而，问题在于，不同癌细胞对热疗的反应不同，目前尚未找到规律，对治疗机理尚缺乏了解，加之体内温度的精确测定问题尚

未得到解决，因而，超声治癌目前还不能在临床普及应用。

(三)超声手术

超声手术主要有超声碎石和超声手术刀两种。

超声碎石主要是利用聚焦的有相当高强度(数十至数百瓦/厘米²)的声波的空化作用以及机械效应使体内结石碎裂，从而自行排出体外。目前，超声粉碎肾结石和膀胱结石已在临床有较多的应用。超声碎石可使病人免受切开肾脏等手术之苦，故很有前途。

超声手术刀主要是将超声通过变幅杆聚焦于刀端，通过刀的强烈振动打碎某些软组织如肝组织、脑组织等。这种手术刀主要用于肝或脑组织内肿瘤的切除等。因为这类肿瘤易被"震"碎，而附近的血管神经等却韧性较好而不易受伤，因而被誉为无血手术刀。手术中，打碎了的组织碎屑则随时被冲洗并吸出。这种手术刀目前已在脑外科、肝外科手术中得到较多的应用。手术刀的外形如图 5.7.3 所示。

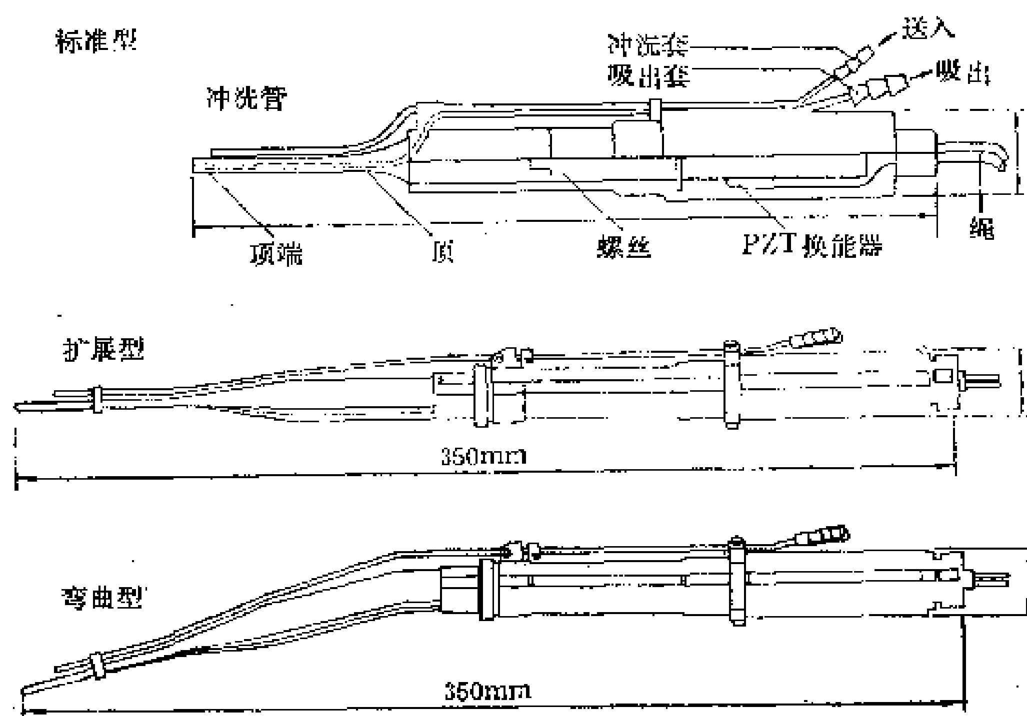


图5.7.3 超声手术刀

§ 5.8 结 束 语

医学超声是一门较新的综合性学科，近一二十年来发展十分迅速，并已在临床医学中得到广泛应用．应用和基础研究互相促进，使这门学科继续以高速度发展，显示着强大的生命力．正因为此学科是较新的发展中的学科，许多问题的研究尚不成熟．本章所涉及的内容中，许多问题仍处在研究阶段，在这里我们只是概括了目前的研究结果．随着医学超声研究工作的不断深入和发展，本章的许多内容将会不断得到丰富乃至修正．

参 考 书 目

[1] J. L. Rose and B. B. Goldberg, Basic Physics in Diagnostical Ultrasound, John Wiley & Sons, New York (1979).

[2] P. Atkinson and J. P. Woodcock, Doppler Ultrasound and Its Use in Clinical Measurement, Academic Press, London (1982).

[3] Essentials of Medical Ultrasound, Eds. M. H. Repacholi and D. A. Benwell. Health and Welfare Canada, Ottawa (1982).

[4] P. Greguss, Ultrsonic Imaging, Focal Press (1980).

第六章 声表面波

汪 承 灏

§6.1 概 述

固体是个弹性体，弹性波可以在其中传播．在第二章中已经讲到，在无限大的均匀各向同性介质中可以存在纵波和横波．如果固体有界，一个通常遇到的情况是以真空为界的半无限大介质(或与固体比较，ρc很小的气体)，这时在界面附近层的固体中可以存在一种表面波，它是沿界面传播的弹性波，其能量集中在表面附近的一层中．远离表面时，波就衰减得很小了．1885年瑞利(Rayleigh)首先对这种波给予理论上的说明，故它又称之为瑞利波．

声表面波，在很长一段时间内，仅局限于在地震学领域中进行研究，在超声学范畴，它主要应用于固体介质表面伤的检测，以及作表面波延迟线．

对各向同性介质的声表面波研讨的一个自然推广是研究各向异性介质(如晶体介质中)的声表面波．但在相当一段时期内，由于没有找到什么实际应用，讨论起来又复杂，因而它的研究处于停滞状态．

1965年，White和Volterman利用所谓叉指换能器，直接在压电晶体上有效地激发出声表面波．不久又发现，在压电晶体上传播的声表面波，在千兆赫以下的频段，其传播损耗不大．更为重要的是，利用压电晶体表面传播的声表面波，可以作出具有各种信号处理功能的众多的声表面波器件．它们在电子学诸领域如雷达，通讯，电子战和电视等方面有着广泛的应用．而制作声表面波器件的基本工艺——半导体平面工艺也已成熟．这样在需求和可能性两方面条件都已具备的情况下，声表面波很快就成为超声学中最活跃的学科分枝，并在短短的十几年内，已经走完研究，研制

到实用的阶段，一些器件也已进行了工业规模的生产.

声表面波器件的最简单的基本结构见§6.5图6.5.1. 在一个压电基底上，电信号通过发射用的叉指换能器而转变成声信号(声波)，声波传播一段距离后，到达接收用的叉指换能器，并又被转变成电信号. 在这电-声-电转变过程中，可以对信号进行加工处理.

声表面波器件之所以有广泛的用途，是因为它有下述几个特点：

(i) 声波与电磁波比较： 声波器件中用的是声波，它比电磁波的传播速度约小五个数量级，因而在相同的频率下它的波长也小五个数量级. 这样它比相应电磁波器件的尺寸也小这么多. 比如用1 km电缆线作的延迟线所获得的延迟，现在只要1 cm长的声表面波延迟线就够了. 而10cm的波导相应1 μm的叉指间隔. 这样就实现了电子器件的小型化.

(ii) 声表面波与体波的比较： 声表面波是在介质的表面进行换能及传播的. 而体波一般是通过一个换能器在固体内传播的. 因而与体波相比，声表面波所载的信息比较容易对它施加影响：信息的注入、提取、加工处理、相互作用等都是在表面进行，比较方便.

(iii) 压电介质与非压电介质比较： 由于声表面波器件是用压电介质作基底，电声信号以及声表面波的传播均在同一压电介质基底进行，并且声波的传播伴有电场，并以相同速度传播，因而就避免了声波在非压电介质中传递信号时，需另外的电声换能器来实现电声信号的转换，从而带来结构上的一系列麻烦和困难，也避免了在信号传递过程中不易进行信号处理加工这一缺点.

声表面波器件具有无源器件的许多特点，再加上制作技术上采用半导体平面工艺，给器件带来了稳定性好和一致性好等优点，从而使声表面波技术迅速地发展，构成一类新型的模拟信号处理器件. 它的频段由10MHz到1000HMz，其下限是受基底尺寸和经济性的限制，而上限是受工艺的限制.

本章将首先分析压电晶体上表面波的传播的一些波型以及它们的某些特点，尤其是与各向异性相关联的一些特点，接着研究声表面波在压电晶体表面的换能激发。我们先是最一般地讨论压电晶体的表面激发，之后分析表面波技术普遍使用的叉指换能器。为了实用上设计各种器件的需要，还叙述了各种简化分析模型。在表面波器件中，除了最通用的叉指换能器以外，还有一些常用的结构，如波导，多条带耦合器，栅阵等，我们也将在第四节中给予讨论。最后一节则涉及的是声表面波器件及其应用，其中包括声表面波器件所用的材料的选择。

§ 6.2 声表面波的传播

6.2.1 各向异性介质(晶体)

我们先讨论非压电性的晶体介质(各向异性介质)中的声表面波传播，而各向同性介质作为一种特例给出，然后再讨论压电介质中的情况。

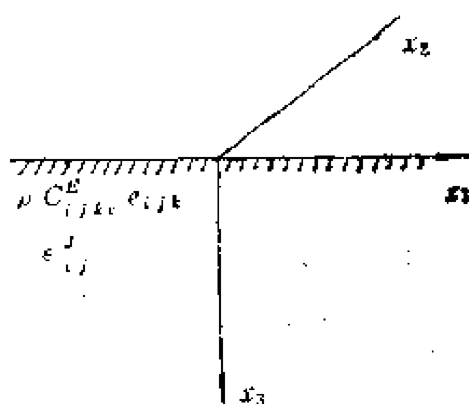


图6.2.1 坐标系的选取

取坐标系如图 6.2.1 所示：

x_1，波传播方向，

x_2，波在此方向无限广延，即波是沿 x_1 方向传播且与 x_2 无关的平头波，

x_3，与表面垂直，且指向固体内。

我们设晶体占据$x_3>0$空间，而 $x_3<0$ 是真空介质，界面在 $x_3=0$ 处，晶体密度为ρ，弹性系数为 c_{ijkl}，应力张量 T_{ij}，位移矢量 u_i，那么此时有广义胡克定律

$$T_{ij}=c_{ijkl}\partial u_k/\partial x_l,\quad (i,j,k,l=1,2,3) \qquad (6.2.1)$$

动力学方程

$$\partial T_{ij}/\partial x_j=\rho\partial^2 u_i/\partial t^2. \qquad (6.2.2)$$

由方程(6.2.1)，(6.2.2)，得波动方程

$$c_{ijkl}\partial^2 u_k/\partial x_l \partial x_j = \rho \partial^2 u_i/\partial t^2. \qquad (6.2.3)$$

我们设一个平头声表面波在一半无限介质表面上传播，自由的边界条件是法向的三个应力为零：

$$T_{3j} = 0 \quad (j = 1,2,3). \qquad (6.2.4)$$

设有简谐解：

$$u_j = B_j \exp[j(k_s x_1 + \alpha k_s x_3 - \omega t)], \qquad (6.2.5)$$

其中$k_s = \omega / v_s$为表面波波矢，ω 为圆频率，v_s 为表面波传播速度. 如果我们令总的复波矢 $\mathbf{k} = \{k_s, \alpha k_s\}$，即 $k = |\mathbf{k}| = k_s\sqrt{1+\alpha^2}$，那么波矢 $\mathbf{k}$ 在x_3方向的余弦为$\alpha/\sqrt{1+\alpha^2}$；从解的观点，我们可以称α为特征根，B_j 是待定常数，或称特征向量.

将式(6.2.5)代入式(6.2.3)中，得

$$[\Gamma_{ij}][B_j] = 0. \qquad (6.2.6)$$

其中 $[\Gamma_{ij}]$ 是克里斯多夫 (Christoffel) 矩阵，

$$\Gamma_{ij} = c_{3i3j}\alpha^2 + (c_{1i3j} + c_{3i1j})\alpha + c_{1i1j} - \delta_{ij}\rho v_s^2. \qquad (6.2.7)$$

特征向量 B_j 不全为零的条件是系数行列式为零

$$\det[\Gamma_{ij}] = 0. \qquad (6.2.8)$$

这是一个 3 × 3 阶行列式. 我们看到，对于给定一个 v_s，存在着关于 α 的六次方程式. 在通常情况下，它有 3 对共轭复根. 为了保持在 $x_3 \to \infty$ 时波动保持有界的条件，我们选取虚部大于零的三个根，即

$$\mathrm{Im}(\alpha_n) > 0. \qquad (6.2.9)$$

取 $\alpha_n = \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$，可得相应于每个 α_n 的一组特征向量 $\{B_{jn}\}$. 为了满足边界条件式(6.2.4)，要构成如下形式的解：

$$u_j = \sum_{n=1}^{3} C_n B_{jn} \exp[j(k_s x_1 + \alpha_n k_s x_3 - \omega t)], \qquad (6.2.10)$$

代入边界条件，有

$$[\Pi_{jn}][C_n] = 0, \qquad (6.2.11)$$

其中系数矩阵：

$$\Pi_{jn} = c_{3jk1} B_{kn} + c_{3jk3} B_{kn} \alpha_{mn}, \qquad (6.2.12)$$

而

$$\alpha_{mn}=\begin{cases}\alpha_n & m=n\\ 0 & m\neq n.\end{cases}$$

C_n 不全为零的条件要求系数矩阵 $[\Pi_{jn}]$ 为零，即

$$\det[\Pi_{jn}]=0, \tag{6.2.13}$$

再求出C_n，那么就得到声表面波的解．实际的求解过程是用迭代法，即给定一个v_s，求出$\{\alpha_n\}$，再求$\{B_n\}$，最后看是否满足边界条件矩阵(6.2.13)．如果满足，求出$\{C_n\}$，则得到解(6.2.10)；如果不满足边界条件矩阵(6.2.13)，就重新设定v_s，直到满足(6.2.13)为止．

6.2.2 各向同性介质

弹性系数 c_{ijkl} 可以采用简缩符号，因为它的前二个下标和后二个下标可以互换．这样我们让11→1；22→2；33→3；23→4；3→5；12→6．例如：$c_{1112}\to c_{16}$．

对各向同性介质，可以证明

$$c_{11}=c_{22}=c_{33},c_{12}=c_{21}=c_{13}=c_{31}=c_{23}=c_{32};$$

$$c_{44}=c_{55}=c_{66}=\frac{1}{2}(c_{11}-c_{12}),\text{ 其余为零．}$$

即只有两个独立度数，而此时弹性系数矩阵为

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0\\ c_{12} & c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0\\ c_{12} & c_{12} & c_{11} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{c_{11}-c_{12}}{2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{c_{11}-c_{12}}{2} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{c_{11}-c_{12}}{2}\end{bmatrix},$$

而

$$\begin{cases}\Gamma_{11}=\frac{1}{2}(c_{11}-c_{12})\alpha^2+c_{11}-\rho v_s^2,\\ \Gamma_{22}=\frac{1}{2}(c_{11}-c_{12})(\alpha^2+1)-\rho v_s^2,\\ \Gamma_{33}=c_{11}\alpha^2+\frac{1}{2}(c_{11}-c_{12})-\rho v_s^2,\\ \Gamma_{13}=\Gamma_{31}=\frac{1}{2}(c_{11}+c_{12})\alpha,\\ \Gamma_{12}=\Gamma_{21}=\Gamma_{23}=\Gamma_{32}=0,\end{cases} \tag{6.2.14}$$

Γ 行列式与一般各向异性晶体不同．由于简单，可以直接计算得出

$$\left[\frac{1}{2}(c_{11}-c_{12})\alpha^2+\frac{1}{2}(c_{11}-c_{12})-\rho v_s^2\right]^2[c_{11}\alpha^2+c_{11}-\rho v_s^2]=0, \tag{6.2.15}$$

可求出特征根：

$$\alpha_1=\alpha_2=j[1-(v_s/v_t)^2]^{1/2}, \tag{6.2.16}$$
$$\alpha_3=j[1-(v_s/v_l)^2]^{1/2}.$$

这里 $v_t=\left[\frac{c_{11}-c_{12}}{2\rho}\right]^{1/2}$ 是固体中横波速度；$v_l=(c_{11}/\rho)^{1/2}$ 是固体中纵波速度．

进而可求出特征向量

$$\begin{cases}B_{11}=0, & B_{21}=1 & B_{31}=0\\ B_{12}=-j[1-(v_s/v_t)^2]^{1/2}, & B_{22}=0 & B_{32}=1\\ B_{13}=1, & B_{23}=0 & B_{33}=j[1-(v_s/v_l)^2]^{1/2}.\end{cases} \tag{6.2.17}$$

那么相应的边界条件矩阵为

$$\begin{bmatrix}0 & B_{32}+B_{12}\alpha_2 & B_{33}+B_{13}\alpha_3\\ \alpha_1 & 0 & 0\\ 0 & c_{12}B_{12}+c_{11}B_{32}\alpha_2 & c_{12}B_{13}+c_{11}B_{33}\alpha_3\end{bmatrix}=0,$$

即：

$$\alpha_1\begin{bmatrix} B_{32}+B_{12}\alpha_2 & B_{33}+B_{13}\alpha_3 \\ c_{12}B_{12}+c_{11}B_{32}\alpha_2 & c_{12}B_{13}+c_{11}B_{33}\alpha_3 \end{bmatrix}=0. \qquad (6.2.18)$$

其解有两个：

(i) $\alpha_1=0, v_s=v_t$，即表面波速度等于横波速度. 而$C_2=C_3=0, C_1\neq 0$那么

$$\begin{cases} u_1=0, \\ u_2=C_1\exp[j(k_s x_1-\omega t)], \\ u_3=0 \end{cases} \qquad (6.2.19)$$

所以这时仅有 x_2 方向分量，而且在x_3方向不衰减，这就是普通的横波，它是体波并不是表面波. 这表明自由界面的边界条件，允许横波(SH 型) 无衰减的传播，而一般说对于纵波或 SV 型横波则是不允许的.

(ii)

$$\begin{bmatrix} B_{32}+B_{12}\alpha_2, & B_{33}+B_{13}\alpha_3 \\ c_{12}B_{12}+c_{11}B_{32}\alpha_2, & c_{12}B_{13}+c_{11}B_{33}\alpha_3 \end{bmatrix}=0,$$

即

$$\begin{bmatrix} 2-(v_s/v_t)^2, & 2j[1-(v_s/v_t)^2]^{1/2} \\ 2j[1-(v_s/v_l)^2]^{1/2}\rho v_l^2, & -\rho v_l^2[2-(v_s/v_t)^2] \end{bmatrix}=0.$$

由此得到表面波即瑞利波 (Rayleigh wave) 声速方程，

$$[2-(v_s/v_t)^2]^2=4[1-(v_s/v_t)^2]^{1/2}[1-(v_s/v_l)^2]^{1/2}. \qquad (6.2.20)$$

上式在计算瑞利波速度时比较复杂，为此，可由下列近似式作出估计：

$$v_s=\frac{0.87+1.12\sigma}{1+\sigma}v_t, \qquad (6.2.21)$$

σ为泊松比，它在 0—0.5 之间变化，所以 v_s 在 $0.87v_t$—$0.95v_t$ 之间变化。

由此可得

$$C_1=0,$$

$$C_2/C_3=-j[1-(v_s/v_t)^2]^{1/2}/[1-(v_s/v_l)^2]^{1/2}, \qquad (6.2.22)$$

以及位移表达式

$$\begin{cases}u_1 = c\{\exp[-[1-(v_s/v_l)^2]^{1/2}k_s x_3] - A\exp[-(1\\ -(v_s/v_t)^2)^{1/2}k_s x_3]\}\cdot\exp[j(k_s x_1-\omega t)],\\ u_2 = 0,\\ u_3 = -jc[1-(v_s/v_l)^2]^{1/2}\{\exp[-[1-(v_s/v_l)^2]^{1/2}k_s x_3]\\ -\left(\dfrac{1}{A}\right)\exp[-(1-(v_s/v_t)^2)^{1/2}k_s x_3]\}\cdot\exp[j(k_s x_1-\omega t)],\end{cases}$$

其中 $A=[1-(v_s/v_l)^2]^{1/4}[1-(v_s/v_t)^2]^{1/4}$，$c$ 是待定常数。

由上面的解可以知道，各向同性固体介质中的瑞利波有如下特点：

(a) 只有 x_1 和 x_3 方向两个分量，即与横波（在 x_2 方向）解耦。质点振动在波传播和表面法线的平面内。

(b) 在表面上，u_3 振幅与 u_1 振幅之比为

$$|\hat{u}_3/\hat{u}_1| = \left[\frac{1-(v_s/v_l)^2}{1-(v_s/v_t)^2}\right]^{1/4} > 1 \quad (\because v_l > v_t). \qquad (6.2.23)$$

(c) 从相位来说，在表面上相对于我们坐标方向，u_3 落后 u_1 的角度为 $\pi/2$。

总起来，表面波的质点振动位移是一个椭圆，在表面上，位移最高处的质点向波的后方运动，图 2.2 中给出一个位移随深度分布的质点位移分布图

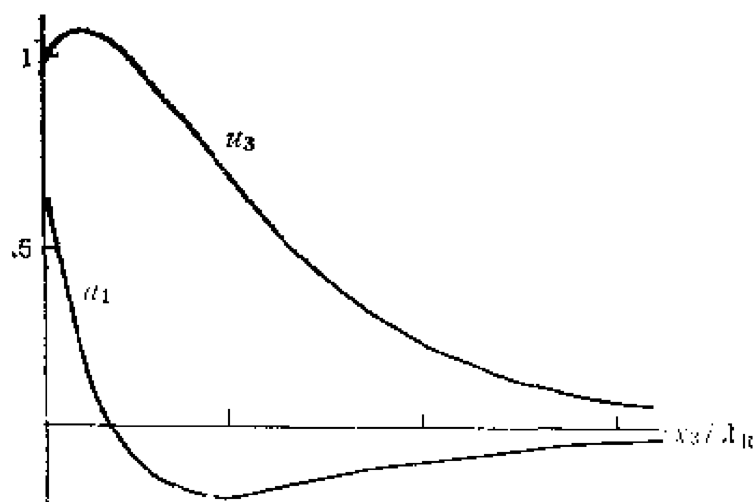


图6.2.2 表面波的质点位移随深度的分布

最后，我们来看一下能流密度随深度的分布，以说明表面波能量集中在表面层附近的特点．从位移分布的特点，我们已经看到（图 6.2.2），虽然质点位移随深度的加深不一定是简单单调地趋于零，但是最终总是趋于零．我们更深入一些看能量的分布情况，由于表面波是沿 x_1 方向传播的，对于一个平头波，当然在 x_2 方向无能流，而在 x_3 方向，由于波将衰减到零，因而也是没有能流，故只在 x_1 方向有能流．根据坡印廷定律，时间简谐场的复坡印廷矢量 $\mathbf{p}$ 即功率流密度为

$$\mathbf{p} = -\frac{1}{2}\mathbf{v}^{*}\cdot\mathbf{T}, \tag{6.2.24}$$

其中，$\mathbf{v}=\dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$ 为质点振动速度，$\mathbf{T}$ 为应力张量．对于表面波，$\mathbf{p}$ 只有 x_1 方向的分量 p_1，

$$p_1 = -\frac{1}{2}(v_1^{*}T_{11} + v_3^{*}T_{31}). \tag{6.2.25}$$

可以证明，对于各向同性介质，

$$p_1(x_3) = \frac{\rho\omega^2}{2}\left(\frac{v_l^2}{v_s}\right)|u_1|^2 + \frac{\rho\omega^2}{2}\left(\frac{v_t^2}{v_s}\right)|u_3|^2 + \frac{j\omega}{2}\left[\rho(v_l^2 - 2v_t^2)u_1^{*}\frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \rho v_t^2 u_3^{*}\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right]. \tag{6.2.26}$$

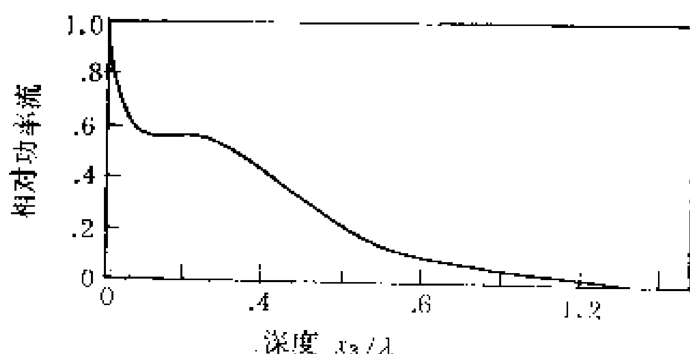


图6.2.3　声表面波功率流随深度的分布

图 6.2.3 给出功率流分布图，从图中我们可以看到，表面波传播的能量是集中在表面的一个波长范围内，一般说集中的能量在 90% 以上，而在单位宽度上的总的能流通量为

$$p_a = \int_{-\infty}^{0} p_1(x_3)\,dx_3. \tag{6.2.27}$$

6.2.3 压电介质

在准静电近似下，压电介质的压电方程：

$$\begin{cases} T_{ij} = c^E_{ijkl}\dfrac{\partial u_k}{\partial x_l} + e_{kij}\dfrac{\partial \phi}{\partial x_k}, \\ D_i = e_{ikl}\dfrac{\partial u_k}{\partial x_l} - \varepsilon^s_{ik}\dfrac{\partial \phi}{\partial x_k}, \end{cases} \tag{6.2.28}$$

其中 ϕ 为电势，e_{ijk} 为压电系数，ε^s_{ik} 为介电常数，D_i 为电位移.

动力学方程（牛顿方程）为

$$\partial T_{ij}/\partial x_j = \rho \partial^2 u_i/\partial t^2. \tag{6.2.29}$$

在考虑绝缘介质不存在自由电荷时，电荷方程（高斯方程）为

$$\partial D_i/\partial x_i = 0. \tag{6.2.30}$$

由此，我们得到压电介质中耦合波动方程：

$$\begin{cases} c^E_{ijkl}\dfrac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_l} + e_{kij}\dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x_k \partial x_i} - \rho\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \\ e_{ikl}\dfrac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_l} - \varepsilon^s_{ik}\dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x_k \partial x_i} = 0. \end{cases} \tag{6.2.31}$$

在研究压电介质中的表面波时，我们考虑压电介质占据 $x_3>0$ 区域（见图 6.2.1），而在 $x_3<0$ 区域为真空. 设其中电势为$\hat{\phi}$；$\hat{D}_3 = -\varepsilon_0\dfrac{\partial \hat{\phi}}{\partial x_3}$，而满足拉氏方程：

$$\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x_i \partial x_i} = 0. \tag{6.2.32}$$

我们来讨论两种最重要的介面情况. 一种边界是自由的，其含义是应力为零，电势和电位移连续；另一种边界是金属化表面，即表面存在一层很薄的（质量可忽略）金属导体的情况，这意味着边界处应力为零以及 $\phi=0$（说 $\phi=\text{const}$ 也是一样，这并不失一般性），下面我们将分别给予讨论.

(一)自由表面

$$
\text{边界条件}\begin{cases} T_{3j}=0\,(j=1,2,3), \\ \phi=\hat{\phi}, \\ D=\hat{D}. \end{cases} \tag{6.2.33}
$$

我们设解为

$x_3>0$

$$
\begin{cases} u_j=B_j\exp[j(k_s x_1+\alpha k_s x_3-\omega t)], \\ \phi=B_4\exp[j(k_s x_1+\alpha k_s x_3-\omega t)]. \end{cases} \tag{6.2.34}
$$

代入耦合波动方程中去,得到

$$
[\Gamma_{mp}][B_p]=0 \quad (m,p=1,2,3,4), \tag{6.2.35}
$$

其中

$$
\begin{cases} \Gamma_{ij}=-c^{E}_{3i3j}\alpha^2-(c^{E}_{1i3j}+c^{E}_{3i1j})\alpha-c^{E}_{1i1j}+\delta_{ij}\rho v^2,\,(i,j=1,2,3) \\ \Gamma_{i4}=\Gamma_{4i}=-e_{3i3}\alpha^2-(e_{1i3}+e_{3i1})\alpha-e_{1i1}, \\ \Gamma_{44}=\varepsilon^{s}_{44}\alpha^2+(\varepsilon^{s}_{31}+\varepsilon^{s}_{13})\alpha+\varepsilon_{11}, \end{cases} \tag{6.2.36}
$$

由 B_p 不全为零条件可得系数行列式:

$$
\det[\Gamma_{mp}]=0. \tag{6.2.37}
$$

这一个 4×4 的行列式,是 α 的八次方程,它有四对共轭复根. 为了满足在 $+\infty$ 处的场有限的条件,选择$\mathrm{Im}(\alpha_n)>0$ 的四个根.

而对 $x_3<0$,$\hat{\phi}$ 的解可写成

$$
\hat{\phi}=B_6\exp(k_s x_3)\exp[j(k_s x_1-\omega t)].
$$

但是,实际上考虑在边界处 $\hat{\phi}=\phi$ 的条件,所以

$$
\hat{\phi}(x_1,x_3,t)=\phi(x_1,0,t)\exp(k_s x_3). \tag{6.2.38}
$$

这时对余下的四个边界条件,即$T_{3j}|_{x_3=0}=0$,及$\hat{D}|_{x_3=0}=D|_{x_3=0}$. 我们设 u_j 及 ϕ 的线性组合解为

$$
\begin{cases} u_j=\sum\limits_{n=1}^{4}C_n B_{jn}\exp[j(k_s x_1+\alpha_n k_s x_3-\omega t)], \\ \phi=\sum\limits_{n=1}^{4}C_n B_{4n}\exp[j(k_s x_1+\alpha_n k_s x_3-\omega t)]. \end{cases} \tag{6.2.39}
$$

代入上述四个边界条件,得到

$$[\Pi_{mn}][C_n]=0, \tag{6.2.40}$$

其中

$$\begin{cases}\Pi_{jn}=c_{3jk1}B_{kn}+c_{3jk3}B_{km}\alpha_{mn}+e_{3j1}B_{4n}+c_{3j3}B_{4m}\alpha_{mn},\\ \Pi_{4n}=e_{3j1}B_{jn}+e_{3j3}B_{jm}\alpha_{mn}-\varepsilon_{33}B_{4m}\alpha_{mn}-(\varepsilon_{31}+j\varepsilon_0)B_{4n}.\end{cases}$$

由 C_n不全为零的条件得到

$$\det[\Pi_{mn}]=0. \tag{6.2.41}$$

实际的求解过程中，也是采用迭代法，即选择 v_s，得出 $\{\alpha_n\}$ 及 $\{B_{mn}\}$，使之满足方程(2.3.9)，那么式(6.2.36)就是所求的解. 由式(6.2.35)及(6.2.36)，ϕ 的解为

$$\phi=\left(\sum_{n=1}^{4}C_nB_{4n}\right)\exp(k_sx_3)\exp[j(k_sx_1-\omega t)]. \tag{6.2.42}$$

这样，我们就求出了声表面波的解.

（二）金属化表面

这是在 $x_3=0$ 的边界条件：

$$\begin{cases}T_{3j}=0,\\ \phi=0.\end{cases}$$

我们看到，由于金属导体的屏蔽，实际上使得真空（$x_3<0$）中的场与晶体（$x_3>0$）中的场无关. 我们只须求解晶体中的场.

这时，我们仍可设解的形式为式(6.2.34)，由系数行列式(6.2.37)求出满足辐射条件的特征根$\{\alpha_n\}$，再由式(6.2.35)求出特征向量$\{B_n\}$，求出满足边界条件的矩阵(6.2.41)的表面波速度v_s. 而最后得到形式如式(6.2.39)的解. 唯一不同的是边界条件的系数矩阵元的 Π_{4n}. 此时由 $\phi=0$ 条件，得

$$\Pi_{4n}=B_{4n}, \tag{6.2.43}$$

而 Π_{jn} 仍与自由表面相同.

我们以在表面波器件中常用的$YZ-LiNbO_3$为例、我们给出自由表面及金属化表面位移及电势的分布，这时位移 u_2 与之解耦，所以表面波中只有 u_1，u_3 及 ϕ 的分布，参见图 6.2.4.

由解及上述例子表明，表面波传播速度虽然不能直接由解析式得到，但它是非色散的. 质点位移及电势并不一定单调地随距

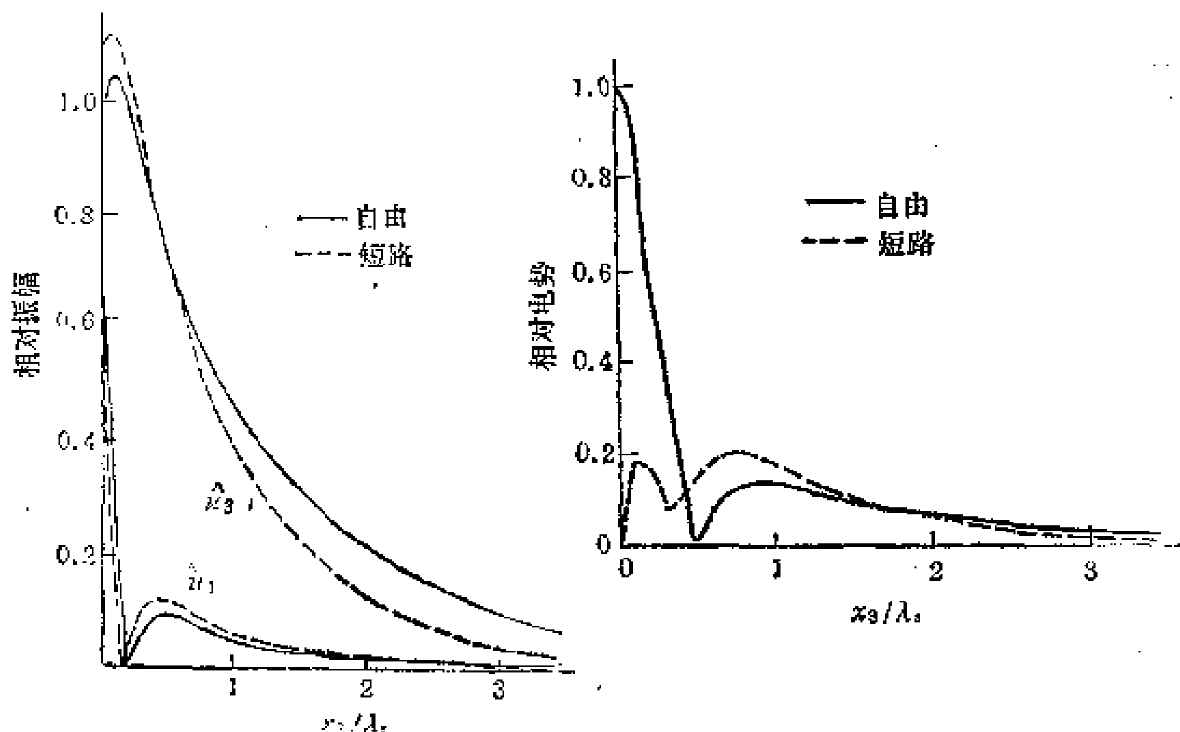


图6.2.4 YZ-$LiNbO_3$声表面波的空间分布

表面的距离减小，但最终将趋于零．另外质点位移之间及它们与电势的相位差是比较复杂的，因而质点位移在空间的轨迹亦是很复杂的．此外，由于像 $LiNbO_3$ 这样的压电介质，此时表面波中不但有弹性波的传播，而且伴随有电场分布的传播，它也以表面波的速度传播．

(三)漏波(又称为伪表面波)

最初在研究各向异性介质声表面波时，就曾经发现，在某些切割的某些传播方向上，没有一个实数 k_s(即实数 v_s) 能够满足边界条件．历史上曾称之为"禁带"，即在这些方向上不能够传播声表面波．后来，有人发现如果在k_s上引入一个不大的虚部，即使之成为复数，就能够满足边界条件了．复数 k_s(或 v_s) 意味着波传播时将是衰减的，物理上的解释是：这种表面波一边传播，一边向内辐射体波．或者说一个这种表面波和一个体波的组合，才能够满足此时的边界条件．由于一边传播一边向体内辐射体波，我们就称之为漏波，或伪表面波．例如在 $LiNbO_3$ 晶体 y 旋转 64° 切割而

在 x 方向传播的就是这种波.

(四) B–G 波

B–G 波或称电声波是在一些高对称压电介质中存在的波，它是质点振动方向与传播方向垂直而与表面平行的纯切变波，而且是与电耦合的一种表面波. 当压电耦合不存在，它就退化为切变体波. 它可以看成是一种特殊类型的压电介质中的表面波.

我们以 6mm 类晶体为例，将旋转对称轴 x_2 处在平面内并与传播方向垂直(见图 6.2.1)，此时压电方程为

$$\begin{cases} T_{i2} = c_{44}^{s}\dfrac{\partial u_2}{\partial x_i} + e_{15}\dfrac{\partial \phi}{\partial x_i}, \\ D_i = e_{15}\dfrac{\partial u_2}{\partial x_i} - \varepsilon_{11}^{s}\dfrac{\partial \phi}{\partial x_i}, \end{cases} (i = 1, 3) \tag{6.2.44}$$

$$\hat{D}_i = -\varepsilon_0 \partial\hat{\phi}/\partial x_i.$$

a) 自由表面，其边界条件(独立的)

$$\begin{cases} T_{32} = 0, \\ \phi = \hat{\phi}, \\ D_3 = \hat{D}_3. \end{cases} \tag{6.2.45}$$

解为

$$u_2 = A\exp(-k_3 x_3)\exp[j(k_s x_1 - \omega t)],$$

$$\phi = A\left(\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}^{s}}\right)\left[\exp(-k_3 x_3) - \frac{1}{1+\varepsilon_{11}^{s}/\varepsilon_0}\right.$$

$$\left.\times \exp(-k_s x_3)\right]\cdot\exp[j(k_s x_1 - \omega t)], \tag{6.2.46}$$

$$\hat{\phi} = A\left(\frac{e_{15}}{\varepsilon_0 + \varepsilon_{11}^{s}}\right)\exp(k_3 x_3)\exp[j(k_s x_1 - \omega t)].$$

其中，

$$k_3 = k_s\cdot\frac{K_{15}^2}{[1+(\varepsilon_{11}^{s}/\varepsilon_0)]},\ k_s = k_t\bigg/\left[1 - \frac{K_{15}^4}{(1+\varepsilon_{11}^{s}/\varepsilon_0)^2}\right]^{1/2},$$

$$k_t = \omega/v_t, \tag{6.2.47}$$

$$v_t = (c_{44}^{D}/\rho)^{1/2};\ K_{15}^2 = e_{15}^2/\varepsilon_{11}^{s}c_{44}^{D};\ c_{44}^{D} = c_{44}^{E} + e_{15}^2/\varepsilon_{11}^{s}.$$

b) 金属化表面，边界条件为

$$\begin{cases} T_{32} = 0, \\ \phi = 0. \end{cases} \tag{6.2.48}$$

则其解为

$$u_2 = A\exp(-k_2 x_3)\exp[j(k_s x_1 - \omega t)],$$

$$\phi = A\left(\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}^s}\right)[\exp(-k_2 x_3) - \exp(-k_s x_3)] \times \exp[j(k_s x_1 - \omega t)], \tag{6.2.49}$$

其中 $k_2/k_s = K_{15}^2, k_s = k_t/(1-K_{15}^4)^{1/2}; k_t = \omega/v_t, v_t = \sqrt{c_{44}^D/\rho}$.

我们从上面可以看出，对于不存在压电耦合的情况，即 $K_{15} \to 0$，这时对自由表面 $k_3 \to 0$. 金属化表面 $k_2 \to 0$，同时，B-G 波波矢 $k_s = k_t$，即为横波传播的波矢. 即此时，一方面传播速度退化为横波传播速度；另一方面，因为 k_3 或 $k_2 \to 0$，即 u_2 不随深度衰减，所以此时 B-G 表面波退化为体横波.

还需指出的是，在这种情况下还存在有瑞利波模式，不过是纯力学的. 它具有 u_1 和 u_3 分量，而与 u_2 和 ϕ 的 B-G 波模式解耦，即这时存在两种表面波模式.

6.2.4 表面覆盖薄层介质

我们在前面所述的都是均匀介质，如果介质不均匀，表面波的传播会出现更为复杂的现象. 不均匀介质中最简单的一种，也是在声表面波技术中有实用意义的一种，是在一均匀半空间介质上，覆盖一均匀薄层的情况，而且，我们讨论两层介质都是各向同性介质的简单情况.

(一) Love 波

我们在前面各向同性介质中讨论了表面波的解，曾提到仅有 x_2 方向分量的水平极化的切变波即 SH 波，是与 Rayleigh 表面波解耦的，而且它不随深度衰减，即是普通的体横波. 但是如果在一均匀各向同性半空间之上覆盖另一种均匀各向同性的薄层，情况将会不同，而有可能存在 SH 型的表面波，称为 Love 波.

设有如图6.2.5所示的坐标系，半无限固体层Ⅰ仍占据 $x_3>0$ 半空间，另一固体层Ⅱ占据 $(-h,0)$ 层. 我们在Ⅰ及Ⅱ中设解，

$$\begin{cases} u_2^{\rm I} = Ce^{-\alpha^{\rm I} k_L x_3} \cdot e^{jk_L x_1}, & (6.2.50) \\ u_2^{\rm II} = (Ae^{j\alpha^{\rm II} k_L x_3} + Be^{-j\alpha^{\rm II} k_L x_3})\, e^{jk_L x_1}, & (6.2.51) \end{cases}$$

所需满足的有效边界条件是

$$\begin{cases} x_3 = -h, T_{23}^{\rm II} = 0, \\ x_3 = 0, T_{23}^{\rm I} = T_{23}^{\rm II}, u_2^{\rm I} = u_2^{\rm II}. \end{cases} \quad (6.2.52)$$

那么，可以证明，此时的频率方程为

$$\mathrm{tg}\,\alpha^{\rm II} k_L h = \frac{\alpha^{\rm I} \rho (v_t^{\rm I})^2}{\alpha^{\rm II} \rho (v_t^{\rm II})^2}, \quad (6.2.53)$$

图6.2.5　固体上覆盖一层固体情况的坐标

其中 $\alpha^{\rm I} = \sqrt{1 - \left(\frac{v_L}{v_t^{\rm I}}\right)^2}$, $\alpha^{\rm II} = \sqrt{\left(\frac{v_L}{v_t^{\rm II}}\right)^2 - 1}$.　(6.2.54)

而位移分布为

$$\begin{cases} u_2^{\rm I} = Ce^{-\alpha^{\rm I} k_L x_3}\, e^{jk_L x_1}, & (6.2.55) \\ u_2^{\rm II} = C[\cos\alpha^{\rm II} k_L (h + x_3)/\cos\alpha^{\rm II} k_L h] \cdot e^{jk_L x_1}, & (6.2.56) \end{cases}$$

其中 v_L 为 Love 波声速，$v_t^{\rm I}$ 为介质Ⅰ(基底)的横波声速，$v_t^{\rm II}$ 为介质Ⅱ(覆盖层)的横波声速.

从频率方程(6.2.53)，(6.2.54)可以看出实际可能的解，即可以存在 Love 波的条件是

$$v_t^{\rm II} < v_L < v_t^{\rm I}.$$

也就是说，要求覆盖层必须是低声速层. 此时可以存在Love波. 而当覆盖层是高声速层时，即 $v_t^{\rm II} > v_t^{\rm I}$ 时，则没有适当的解. 又由于频率方程是个超越方程，它必然是频散的，即声速随频率变化而变化，而且必然是多模的，即对某给定的频率(在固定的层厚时)，或者更确切的说在某固定 $k_L h$，通常有好几个模式(不同的声速)满足频率方程. 与单一均匀半空间不同，具有覆盖层的半空间，其表面波一般都是频散和多模的。

在图6.2.6中，是熔融石英基底上覆盖一金层的前四个Love

波模式的频散曲线，它们的声速随 $k_L h$ 变化，变化的范围在基底介质的横波速度和覆盖层介质的横波速度之间．图 6.2.7 中给出了前两个模式 Love 波在不同的 $k_L h$ 的位移随深度的分布．由图可见，当厚层或高频时，即 $k_L h$ 很大，可能存在的模式较多，而 Love 波能量多集中于覆盖层之中；当薄层或低频即 $k_L h$ 较小时，可能存在的模式较少甚至可能只存在一种模式，此时可以认为其他模式为漏波模式，而 Love 波能量则更多地分布在基底层中．

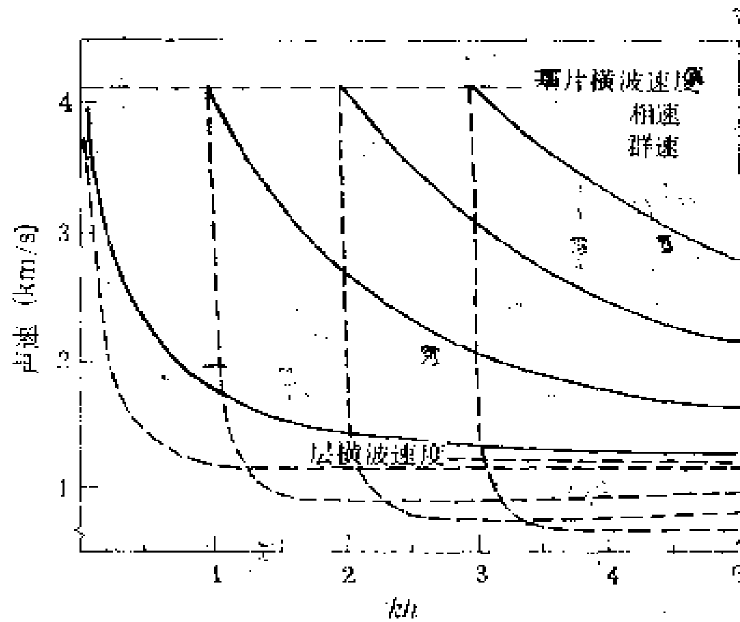


图6.2.6　在熔融石英基底上覆盖金层时的Love波归一化频散曲线

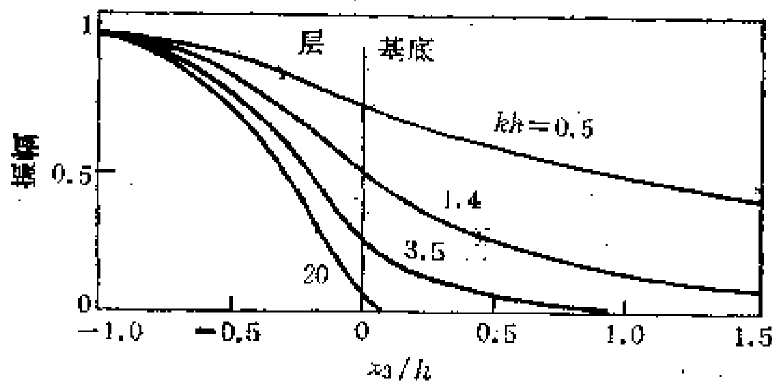


图6.2.7　在熔融石英基底上覆盖金层时的Love波的位移随深度分布曲线

(二) 广义 Rayleigh 波

在各向同性半空间讨论中，曾指出表面波（它实际上可以认为是纵波和SV横波组合而成的）与 SH 横波解耦．在前面一段(一)

中，我们已指出，对于半空间上覆盖一固体层情况，SH 横波模式对应于 Love 波. 现在我们来讨论表面波(Rayleigh 波)所对应的广义 Rayleigh 波.

现在先看一看一固体层(固体板)中存在的弹性波的情况. 一固体板，两板面自由，这时沿板有两种波型，一为 SH 波，一为所谓 Lamb 波，它是由纵波和 SV 波组合而成的. Lamb 波有时称为板波. 板波是频散和多模的，我们往往把 Lamb 的模式分成两组：一组称之为对称模式；另一种称之反对称模式. 对称模式中位移瞬时分布相应于板中心是对称的，而反对称模式的位移瞬时分布是反对称的. 显然对称模式在板内有 $2n(n=0,1\cdots)$ 个节点；而反对称模式在板内有 $2n+1$ 个节点.

我们回过头来说明半空间覆盖一固体层的 Rayleigh 型波. 它对应半空间中 Rayleigh 波和板中 Lamb 波，也有人称这种表面波为广义Lamb波. 而前面所述的 Love波则对应于半空间的 SH 波和板中 SH 波模式.

我们下面来叙述一下 Rayleigh 型波的图像. 由于问题复杂性和数学上的繁琐，我们只作一个定性的说明. 在层状半空间中对 Rayleigh 波而言，基底介质中横波速 $v_s^{\rm I}$ 和覆盖层介质的横波速度 v_s 是一个重要的判据(与Love波一样)，他们所对应的两个极限情况如下：

当 $v_s \gg v_s^{\rm I}$，即覆盖层是高速层时，只存在一个 Rayleigh 型波的解.

当 $v_s \ll v_s^{\rm I}$，即覆盖层是低速层时，可能有无限个解，即是多模的. 对应于 Lamb 波，分成 M_{1i} 系列和 M_{2i} 系列，它们分别相应于对称模式和反对称模式. M_{1i} 系列在表面的质点位移与半空间情况一样是后退椭圆型，而 M_{2i} 系列则相反，它与 Love 波情况相类似. 当 $kh\to 0$ 时，只有 M_{11} 模式即基底介质的 Rayleigh 波模式存在，高阶的 M_{1i} 模式和所有 M_{2i} 模式均不存在(即无衰减的传播)，或以漏波形式存在. 当层厚逐渐增加(kh 逐渐增加)到某一定值，此时 M_{11} 可以存在，M_{21} 也可以存在. 我们称M_{21} 模为妹

泽波(Sezawa 波). 再增加层厚,出现 M_{21}, …而当厚度很大和频率很高时,即 $kh \to \infty$ 时, M_{11} 模化为覆盖层材料的 Rayleigh 波,而其余模式都退化为覆盖层无限厚时的横波. 而对于 $v_s^I \sim v_s^{II}$ 情况,由于比较复杂,我们暂不讨论.

上述讨论中,我们都是针对各向同性介质,对于各向异性介质,一般地说 Love 波模式和 Rayleigh 波模式会存在耦合,而对压电介质,还会存在声电耦合,情况就更复杂了,我们将不作讨论.

6.2.5 各向异性介质(包括压电介质)声表面波的一些特性

声表面波作为一种波动,当然在阻抗不连续处会发生反射、折射、衍射等波动现象. 但是对声表面波,这些现象规律都是很复杂的,研究起来是相当困难的,有些只能作一些唯象的描述.

此外,对于各向异性介质,包括压电介质,其中波的传播规律,包括声表面波,与各向同性介质也有不同的地方.

我们在这里讨论两个问题:一是波束偏斜;另一是衍射.

(一)波束偏斜

在各向异性介质中,可以想象,波在各个方向的传播速度一般说是不一致的. 实际与之相关连的能量传播方向(即群速方向)与波传播相速方向也往往不一致,这就产生了所谓波束偏斜. 这两个方向的夹角 ψ,称为功率流角. 这样相速 v_s 与群速 v_g 之间存在关系:

$$v_s = v_g \cos\psi. \qquad (6.2.57)$$

对于 $\psi = 0$ 的方向,即群速与相速方向一致,我们称之为纯模方向.

如果我们在纯模方向 θ_0 附近,相速随 θ 变化 $v_s = v_s(\theta)$;可以证明功率流角满足:

$$\mathrm{tg}\psi = \frac{1}{v_s}\frac{dv_s}{d\theta}, \qquad (6.2.58)$$

因而在纯模方向 ($\psi = 0$) 有

$$(dv_s/d\theta)_{\theta=\theta_0} = 0.$$

因此在 θ_0 附近一个小角度范围内，可采用抛物线近似

$$V_s(\theta)=v_s(\theta_0)\left[1+\frac{\gamma}{2}(\theta-\theta_0)^2\right], \qquad (6.2.59)$$

而 $$r\doteq\partial\psi/\partial\theta, \qquad (6.2.60)$$

（因为在 $\psi=0$ 附近，$\psi\doteq\frac{1}{v}\frac{dv_s}{d\theta}$，而由(6.2.59)式，$\frac{dv_s}{d\theta}=v_s\gamma(\theta-\theta_0)$，即 $\psi\doteq\gamma(\theta-\theta_0)$，所以 $\gamma\doteq\frac{\partial\psi}{\partial\theta}$.）

在上式中，γ 称为各向异性因子．显然 $\gamma=0$ 相应于各向同性介质；而 $\gamma>0$ 时，在纯模方向 θ_0 速度极小，在偏离纯模方向时，能流方向更加偏离纯模方向；当 $\gamma<0$ 时，在纯模方向 θ_0 速度极大，在偏离纯模方向时，能流方向更加接近纯模方向．

图 6.2.8 给出 y 切 $LiNbO_3$ 晶体的表面波速度及功率流角随角度的变化．

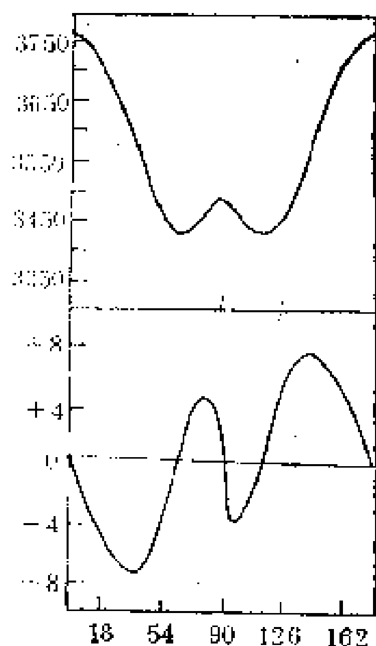


图6.2.8 Y切割$LiNbO_3$晶体中表面波速度及功率流角的角分布

（二）波束衍射

衍射是波动的一个基本现象，当然声表面波也不例外．我们来考虑一个有限孔径的换能器产生声表面波的衍射现象．

为了简单起见，我们用标量理论近似．我们假定，用一个标量来表征，在表面任何一点的波，比如说用垂直表面的位移分量 u_3 来表征，并且忽略深度的变化，因而问题就转化为一个二维标量波的衍射问题，这很类似于光学上单缝的衍射．设在 $x=0$ 处分布为 $u(0,y)$，我们来讨论 $x>0$ 的场．设 $u(x,y)$ 满足波动方程

$$\partial^2u/\partial x^2+\partial^2u/\partial y^2=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=-k^2u. \qquad (6.2.61)$$

其中 c 为声速，k 为波矢．现在作傅氏变换．

$$F(x,k_y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}u(x,y)\exp(-jk_y y)dy$$

代入上式，有 $\quad d^2F/dx^2+(k^2-k_y^2)F=0.$

设解为 $$F(x,k_y)=F(k_y)e^{jk_x x}, \tag{6.2.62}$$

其中 $$k_x{}^2=k^2-k_y^2, \tag{6.2.63}$$

$$F(k_y)=F(0,k_y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}u(0,y)e^{-jk_y y}dy. \tag{6.2.64}$$

我们可得解

$$u(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}F(k_y)\exp[j(k_x x+k_y y)]dk_y\ (x>0). \tag{6.2.65}$$

这里 $k=k(\theta)$，θ是坐标 (x,y) 的方向角．由于介质是各向异性的，k 便是 θ 的函数．在光学中这就是所谓的平面角谱理论，$F(k_y)$ 称为权函数．

我们假定

$$u(0,y)=\begin{cases}1 & |y|<a\\ 0 & |y|>a,\end{cases} \tag{6.2.66}$$

即在 $|y|<a$ 有均匀同位相的"照度"，而之外"照度"为零．那么权函数

$$F(k_y)=\sin(k_y a)/(k_y a). \tag{6.2.67}$$

这是一个 Sinc 函数，$F(k_y)$ 作为 $k_y/k_0(k_0=k(0))$ 的函数．可以看到，孔径 $2a$ 大于几个波长时，权函数 $F(k_y)$ 集中在 k_y/k_0 很小的值，也就是说，在式(6.2.67)中，只在 θ 角度的 k_y 很小的范围，对场 $u(x,y)$ 有主要贡献．所以可采用抛物线近似，由式(6.2.52)，

$$v_s=v_0\left(1+\frac{\gamma}{2}\theta^2\right), \tag{6.2.68}$$

那么 $\quad k_x\doteq k_0[1-(1+\gamma)(k_y/k_0)^2]^{1/2}.$

因而衍射积分场为

$$u(x,y)=\exp(jk_0x)\int_{-\infty}^{\infty}F(k_y)$$

$$\times\exp\left\{j\left[-\frac{k_y^2}{2k_0}(1+r)x+k_y y\right]\right\}dk_y \tag{6.2.69}$$

特别当$\gamma=-1, k_x \doteq k_0$时，

$$u(x,y)=u(0,y)\exp(jk_0x)。\qquad(6.2.70)$$

这意味着，场保持孔径的"剖面"形状不变，而与距离无关，即没有衍射．在各向异性介质中，在这种切割下，$\gamma=-1$，我们称这种切割为最小衍射切割．与各向同性介质（$\gamma=0$）相比，各向异性介质中，若$\gamma>0$，衍射增加，$\gamma<0$衍射减小，当$\gamma=-1$将近似没有衍射．对$Bi_{12}GeO_{20}$晶体，在最小衍射切割方向，可将衍射减小百倍，这在声表面波器件中是很有益处的．因为衍射不但因波束扩张而引起所谓衍射损耗，而且会使器件的特性产生附加的振幅和相位畸变．

§6.3 声表面波的激发，叉指换能器

在固体中产生或接收声波（声信号），方便的方法当然是在固体表面激励和接收．而无论传播声波的固体介质是作为检测对象也好，或者是用作信号处理的介质也好，产生或接收弹性波（声信号）通常都是由电信号转换成声信号，或者相反．即电→声或声→电这样一个过程．而这种电声转换通常是用电声换能材料作的电声换能器来实现的，最常用的是压电材料作的压电换能器．

声表面波作为弹性波的一种，当然也需要压电换能器来激发或接收．接下去的问题是，采用何种方法和结构能有效地和方便地激发（或接收）声表面波．

6.3.1 声表面波的产生方法

（一）在非压电基底介质上激发

在非压电基底上，必须通过压电换能器来激励，但是还没有直接有效地产生声表面波的换能器结构．比如在表面的一个点源或线源都可以产生声表面波，但是同时也产生体波，因此需要采取一些结构，使之较有效地产生表面波．

楔形换能器　如图6.3.1(a)所示，一体波换能器贴在一楔状

固体块上，换能器在楔状固体块中产生体波．当体波传到楔状与介质的交界面时，如果

$$v_1/\sin\theta = v_s, \tag{6.3.1}$$

其中 v_1 为楔状块材料的体波速度，v_s 为待激发固体介质中表面波速度，θ 为入射角，这时根据式（6.3.1）楔中体波波长沿界面的投影，恰好等于待激发固体介质中声表面波的波长，此入射角 θ 亦被称为临界角 θ_{cr}．前面我们已经提到，固体中声表面波的速度要比体波慢，所以产生表面波的必要条件是待激发固体的体波速度要比楔状块中的体波速度要大，因为 $\sin\theta$ 总是小于1的．这样，就能有效地在待激发固体介质中激发出声表面波，而不会激发出体波．

梳状换能器 一体波换能器粘贴在一个梳状结构上，如图 6.3.1 (b) 所示．此时让梳状结构的周期间隔等于待激发固体中表面波波长．这种结构，由于在待激发固体表面上，梳状结构的激发是同相的，因此除了沿表面激发出声表面波外，在垂直表面的方向上还有一个较强烈的体波被激发出来．

另一种类似的梳状结构，是在压电晶体表面上，用金属电极制成叉指换能器（有关叉指换能器详见下面）．电信号激励下，在相邻的金属电极（叉指）间得到反相的振动．如果把这种换能器倒扣

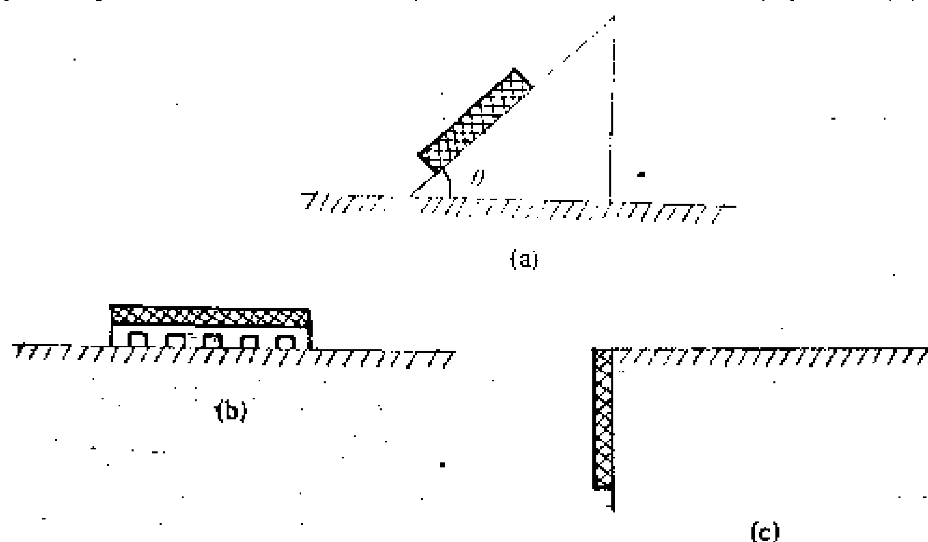


图6.3.1 几种激发声表面波的方法
(a)楔形结构；(b)梳状结构；(c)边缘激发结构

粘接到待激发固体介质表面上，则叉指电极构成"梳状结构"，电极之间距离应等于待激发固体介质中声表面波波长之半，即半个波长．由于相邻电极是反相激发的，那么不会在垂直表面的方向激发出体波来．

边缘粘接换能器 如图6.3.1(c)所示，在一待测固体介质一平面边缘上(侧面)，贴接一体波换能器，来激发声表面波。

除了上述三种，还有一些其他方法，其中有非电声换能方法，例如光热法．一强激光入射到涂上梳状吸热层的固体介质表面，由于涂有吸热层与不涂吸热层的地方光热转换不一样，因而形成一个梳状的激发源．

(二)在压电基底介质上的激发

由于压电介质也是个弹性体，因此上述在非压电基底介质激发表面波的方法，对压电介质也同样适用．

如果压电介质作传播介质基底，那么这个基底介质本身也可以作换能介质，叉指换能器就是根据这种想法提出的．如果我们在压电基底表面，沉积两个电极，那么在这两个电极间加上一个交变电压，就会在电极间的压电介质中产生一个交变电场．这很类似于一个体波压电换能器(见图6.3.2)．从表面换能观点来看，与体波换能器一样，由于在电极区加电压后，介质表面和真空的界面两边产生了电位移梯度，形成面电荷，构成了一个激发源，而在介质内激发弹性波，它包括表面波和体波．为了更有效地激发表面波，采用

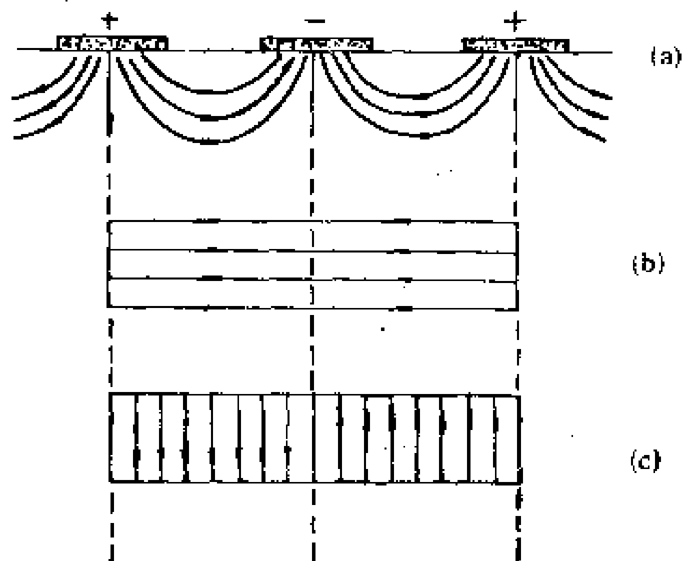


图6.3.2 叉指换能器和等效的体波换能器
(a)实际声分布；(b)共线场分布；(c)交叉场模型

由多组通常是等间距的一对电极，并且间隔地与一所谓汇流条相连。这样两组电极，分别通过各自的汇流条与电源相连．这种象手指相互交叉的所谓叉指换能器，当电信号加上以后，就能有效地向两边发射声表面波，声表面波沿压电基底介质传播一定距离后，在另一端被一接收叉指换能器所接收，将声信号再转换成电信号．

叉指换能器是制作在有一定取向、表面被仔细抛光的压电单晶表面上，叉指的宽度与间隔通常取成等宽度．一根叉指和下一个间隔的宽度，也就是相邻叉指中心的距离对应所要激发表面波的同步频率下的半波长．现在通用的声表面波器件的频率范围约10 MHz到1000MHz，而典型使用的压电单晶的声表面波传播速度约3000 m/s，因此叉指的指宽（同步频率的 1/4 波长）约为 75 μm到0.75 μm．通常用半导体微细加工平面工艺把叉指电极沉积在压电晶体表面上，电极材料通常是铝或金．

压电晶体上作为激发源（或接收器）的叉指换能器，在声表面波技术中几乎成为唯一换能器结构．其他前述的非压电固体中的激发表面波的换能结构都不被采用．声表面器件中有不少器件，如带通滤波器，延迟线等器件，压电晶体表面常常唯一的结构就是一对一作发射一作接收的叉指换能器．另外一些器件，如栅阵器件中有栅阵，弹性卷积器中有束压缩和波导结构，但发射表面波的仍是叉指换能器．叉指换能器在声表面波技术中如此重要，其原因除了能有效方便地实现电声转换以及电-声-电过程能在同一基底上完成以外，它基本上可看成一种横向滤波器，可以方便实现对信号的幅度和相位加权，并且每对叉指基本上可以视为独立的．这给器件设计带来很大的灵活性，而且可以获得优异的性能．

6.3.2 压电晶体表面激发的一般分析

在压电晶体表面，如果有一个力学扰动，由于压电体也是一个弹性介质，同一般固体一样，在压电介质中会产生弹性波，它包括表面波和体波．而一个表面电场的扰动，通过压电体的压电耦合也可以激发出弹性波场来．这个弹性波场，除力学量的传播外还

伴有电学量的传播. 在本节中，我们将一般性地讨论压电介质的表面激发问题. 表面激发不局限于叉指换能器那样电激发源，而是一个广义力源，它包括力源和电源激发，弹性波场也不局限于表面波，它包括了体波.

压电晶体表面边界，除了与一般固体表面那样有所谓自由表面(即一固体半空间以真空或气体为界)外；还有另一特殊的表面，即所谓金属化表面，就是在压电介质半空间表面覆上一层无穷薄的理想导体层. 下面我们将按这两种情况讨论，且仅限于简谐源激发.

(一) 自由表面

设在半无限压电晶体介质表面 $x_3=0$ (参见图 6.2.1)无扰动边界的条件是

$$\begin{cases}\text{应力为零} \quad T_{3j}=0,\ (j=1,2,3), \\ \text{法向电位移连续} \quad D_3-\hat{D}_3=0, \\ \text{电势连续} \quad \phi-\hat{\phi}=0.\end{cases} \tag{6.3.1}$$

如果表面存在扰动，即有广义力，那么下述情况单独存在或并存.

$$T_{3j}\neq 0,$$

和/或

$$D_3-\hat{D}_3\neq 0,$$

$$\phi-\hat{\phi}\neq 0.$$

为了简便起见，我们先讨论一维分布(x_1 方向)源. 它在x_2方向为均匀无限广延. 由于仅讨论简谐源，所以场的所有量，例如位移 u_j，可以写成 $u_j=u_j(x_1,x_3)e^{i\omega t}$ 形式…….

我们为求解这种广义激发源所激发的弹性波场，先对压电晶体中耦合波动方程(6.2.27)作傅氏变换：

$$\begin{aligned}\tilde{U}_j(\beta,x_3)&=\int_{-\infty}^{+\infty}u_j(x_1,x_3)e^{-j\beta x_1}dx_1, \\ \tilde{\phi}(\beta,x_3)&=\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(x_1,x_3)e^{-j\beta x_1}dx_1, \\ \hat{\phi}(\beta,x_3)&=\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{\phi}(x_1,x_3)e^{-j\beta x_1}dx_1.\end{aligned} \tag{6.3.2}$$

此时耦合波动方程(6.2.37)由偏微分方程化为常微分方程，我们

设解(略去时间因子)

$$\begin{cases}\bar{U}_j(\beta,x_3)=B_j e^{j\alpha\beta x_3},\\ \bar{\phi}(\beta,x_3)=B_4 e^{j\alpha\beta x_3},\end{cases}\tag{6.3.3}$$

因而得到

$$[\Gamma_{mp}][B_p]=0,\ (m,p=1,2,3,4),\tag{6.3.4}$$

其中

$$\begin{cases}\Gamma_{ij}=-c^E_{3i3j}\alpha^2-(c^E_{1i3j}+c^E_{3i1j})\alpha-c^E_{1i1j}+\delta_{ij}\rho\omega^2/\beta^2,\\ \Gamma_{i4}=\Gamma_{4j}=-e_{3i3}\alpha^2-(e_{1i3}+e_{3i1})\alpha-e_{1i1},\\ \Gamma_{44}=\varepsilon^s_{33}\alpha^2+(\varepsilon^s_{13}+\varepsilon^s_{31})\alpha+\varepsilon_{11}.\end{cases}\tag{6.3.5}$$

我们看到，式(6.3.5)与式(6.2.32)几乎一样，只是由 ω^2/β^2 代替了 U^2_s. B_p 不全为零条件是

$$\det[\Gamma_{mp}]=0.\tag{6.3.6}$$

这是一个关于 α 的八次方程，通常是四对共轭复根. 由于要满足 $x_3\to\infty$ 的辐射条件,我们取四个根的判据是

$\beta<0$ 取 $\mathrm{Im}(\alpha_n)<0$的根；$\quad (n=1,2,3,4)$，
$\beta>0$ 取 $\mathrm{Im}(\alpha_n)>0$的根.

所以(6.3.3)式的全解表达如下：

$$\begin{cases}\bar{U}_j(\beta,x_3)=\sum\limits_{n=1}^{4}C_n B_{jn}e^{j\alpha_n\beta x_3},\\ \bar{\phi}(\beta,x_3)=\sum\limits_{n=1}^{4}C_n B_{4n}e^{j\alpha_n\beta x_3}.\end{cases}\tag{6.3.7}$$

在上式中，B_{jn} 和 B_{4n} 是对于特征根 α_n 的特征向量. α_n 确定后，除 B_{1n} 外,其余的可由式(6.3.4)确定. 需要说明的是,由于 C_n 和 B_{1n} 均是待定常数，我们不失一般性，可设 $B_{1n}=1$，因而 B_{jn} 和 B_{4n} 都确定了. 下面的任务就是确定 C_n，它将由边界条件给出.

对于真空中电势 $\hat{\phi}$，可设解

$$\hat{\phi}(\beta,x_3)=B_5 e^{j\alpha_5\beta x_3},\tag{6.3.8}$$

代入(6.2.28)的傅氏变换中,并考虑到 $x_3\to-\infty$时$\hat{\phi}$ 有限，要求：

$$\begin{cases}\beta<0 \text{ 时 } \alpha_5=+j,\\ \beta>0 \text{ 时 } \alpha_5=-j\end{cases}$$

这样解可写成：

$$\tilde{\hat{\phi}}(\beta,x_3)=B_5e^{\beta x_3}. \quad (6.3.9)$$

由边界激发源 T_{3j}, $D_3-\hat{D}_3$, 及 $\phi-\hat{\phi}$ 等来确定 C_n.

我们对T_{3j}, D, $\hat{D}$, ϕ, $\hat{\phi}$等作傅氏变换并由式(6.2.24)将(6.3.7)代入，则得到

$$\tilde{T}_{3j}(\beta,x_3)|_{x_3=0}=\tilde{\Pi}_{jn}C_n, \quad (6.3.10)$$

其中 $\tilde{\Pi}_{jn}=j\beta\{c_{3jk1}B_{kn}+c_{3jk3}B_{kn}+e_{3j1}B_{4n}+e_{3j3}B_{4n}\}$.

对(6.2.24)和 $\hat{D}_3=-\varepsilon_0\dfrac{\partial\hat{\phi}}{\partial x_3}$ 作傅氏变换，并由(6.3.9)考虑到

$$\tilde{\hat{D}}_3(\beta,x_3)=-\varepsilon_0|\beta|\tilde{\hat{\phi}}(\beta,x_3), \quad (6.3.11)$$

故
$$[(\tilde{D}_3-\tilde{\hat{D}}_3)+\varepsilon_0|\beta|(\tilde{\phi}-\tilde{\hat{\phi}})]_{x_3=0}=\tilde{\Pi}_{4n}C_n, \quad (6.3.12)$$

$$\tilde{\Pi}_{4n}=j\beta\{e_{3j}B_{jn}+e_{3j3}B_{jn}-\varepsilon_{33}B_{4n}-(\varepsilon_{31}+j\frac{|\beta|}{\beta}\varepsilon_0)B_{4n}\}.$$

$$(6.3.13)$$

设 $\tilde{T}_{m(\beta)}$ 为

$$[\tilde{T}_{m(\beta)}]=\begin{bmatrix}\tilde{T}_1(\beta)\\ \tilde{T}_2(\beta)\\ \tilde{T}_3(\beta)\\ \tilde{T}_4(\beta)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\tilde{T}_{31}(\beta,0)\\ \tilde{T}_{32}(\beta,0)\\ \tilde{T}_{33}(\beta,0)\\ (\tilde{D}_3(\beta,0)-\tilde{\hat{D}}_3(\beta,0)+\varepsilon_0|\beta|(\tilde{\phi}(\beta,0)-\tilde{\hat{\phi}}(\beta,0))\end{bmatrix}$$

$$(6.3.14)$$

而$\tilde{T}_{3j}(\beta,0)=\tilde{T}_{3j}(\beta,x_3)|_{x_3=0}$等等，则

$$[\tilde{T}_m(\beta)]=[\tilde{\Pi}_{mn}][C_n]. \quad (6.3.15)$$

反解之，求得 $[C_n]$：

$$[C_n]=[\tilde{\Pi}_{nm}]^{-1}[\tilde{T}_m(\beta)], \quad (6.3.16)$$

而 $$[\tilde{\Pi}_{nm}]^{-1}=[W_{nm}]/\det[\tilde{\Pi}_{mn}], \tag{6.3.17}$$

W_{nm} 为 $[\tilde{\Pi}_{mn}]$ 的代数余子式．这样，我们令

$$\{\bar{U}_m(\beta,x_3)\}=\{\bar{U}_1(\beta,x_3),\bar{U}_2(\beta,x_3),\bar{U}_3(\beta,x_3),\bar{U}_4(\beta,x_3)\}$$
$$=\{\bar{U}(\beta,x_3),\bar{U}_2(\beta,x_3),\bar{U}_3(\beta,x_3),\bar{\Phi}(\beta,x_3)\},$$

由式(6.3.7)得到

$$[\bar{U}_m]=[\bar{G}_{mp}][\bar{T}_p], \tag{6.3.18}$$

其中 $\bar{G}_{mp}$ 称为 β 空间的格林函数(张量)

$$\bar{G}_{mp(\beta,x_3)}=\sum_{n=1}^{4}\frac{B_{mn}W_{np}}{\det[\tilde{\Pi}_{mn}]}e^{j\alpha_n\beta x_3}. \tag{6.3.19}$$

我们对式(6.3.18)作反傅氏变换，可求出弹性波场的解．类似地令 $\phi(x_1,x_3)=U_4(x_1,x_3)$，则有

$$U_m(x_1,x_3)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\bar{G}_{mp}(\beta,x_3)\bar{T}_p(\beta)e^{j\beta x_1}d\beta, \tag{6.3.20}$$

而 $$\bar{T}_p(\beta)=\int_{-\infty}^{\infty}T_p(x_1',0)e^{-j\beta x_1'}dx_1'. \tag{6.3.21}$$

我们得到由广义表面力源 $\{T_p\}$ 所激发的广义弹性波场：

$$U_m(x_1,x_3)=\sum_{p}^{4}\int_{-\infty}^{\infty}G_{mp}(x_1-x_1',x_3)T_p(x_1',0)dx_1'. \tag{6.3.22}$$

其中广义格林函数 $G_{mp}(x-x_1',x_3)$ 为

$$G_{mp}(x_1-x_1',x_3)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}G_{mp}(\beta,x_3)\cdot e^{j\beta(x_1-x_1')}d\beta$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\sum_{n}^{4}\frac{B_{mn}W_{np}}{\det[\tilde{\Pi}_{mn}]}e^{j(\alpha_n\beta x_3+\beta(x_1-x_1'))}\right)d\beta. \tag{6.3.23}$$

广义力 $\{T_p\}$ 的前三项 T_j 是

$$\{T_j\}=\{T_1,T_2,T_3\}=\{T_{31}(x_1,0);T_{32}(x_1,0);T_{33}(x_1,0)\},$$

而第四分量 T_4 为电源，即

$$T_4(x_1,0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}T_4(\beta)e^{j\beta x_1}d\beta$$

$$= [D_{3(x_1,0)} - \hat{D}_{3(x_1,0)}] + \varepsilon_0 H_t[E_1(x_1,0) - \hat{E}_1(x_1,0)],$$
(6.3.24)

其中 $E_1 = -\dfrac{\partial\phi}{\partial x_1}, \hat{E}_1 = -\dfrac{\partial\hat{\phi}}{\partial x_1}$,而

$$H_t(f(x)) = -\frac{1}{\pi}\left[f(x) * \frac{1}{x}\right]$$

是 Hilbert 变换。

由式(6.3.22)可见,由广义力$\{T_p\}$在压电晶体半空间所激发的弹性波场就是这个广义力$T_p(x_1)$与广义格林函数$G_{mp}(x_1x_3)$在表面x_1上的卷积.如果把场$\{u_3\}=\mathbf{u}$和力$\{T_p\}=\mathbf{T}$看成矢量,而把广义格林函数$\{G_{mp}\}=\mathbf{G}$看成张量,那么式(6.3.22)可简写为

$$\mathbf{U} = \mathbf{G} * \mathbf{T}. \qquad (6.3.25)$$

其中 * 表示点乘卷积。

广义格林函数 $G(x_1,x_3)$,除了空间参量(x_1,x_3)外,它将完全由材料性质和取向所确定。我们可以完全独立于表面激发广义力之外来进行讨论。它实际上描述了表面源激发下弹性波场的特性。因为,显然它等于当表面力源为 δ 源时所激发的弹性波场.对广义格林函数 G_{mp} 仔细研究可以证明,实际上它包括三部分:(i)表面波部分,(ii)体波部分,(iii)与静电场相关连的部分.

表面波 我们先来研究最为关心的激发声表面波场.

广义格林函数的积分中,被积函数中极点的贡献就是表面波场. 被积函数的极点满足:

$$\det[\Pi_{mn}(\beta)] = 0, \qquad (6.3.26)$$

其解为 $\beta = \pm k_s$,而 k_s 恰为表面波波数. 利用留数定理,相应格林函数的表面波部分为

$${}_sG_{mp}(x_1,x_3) = j\sum_n^4 \frac{B_{mn}(\pm k_s)W_{np}(\pm k_s)}{\left\{\dfrac{d}{d\beta}(\det\Pi)\right\}_{\beta=\pm k_s}} e^{j(\alpha_n(\pm k_s)\cdot(\pm k_s)x_3 \pm k_s x_1)},$$
(6.3.27)

$\pm k_s$ 表示正向和反向的表面波. 这时相应表面广义力所激发的表

面波场为

$${}_SU_m(x_1,x_3)=\int_{-\infty}^{\infty}{}_SG_{mp}(x_1-x_1',x_3)\bar{T}_{p(x_1')}dx_1$$

$$=j\sum_p^4\left(\sum_n^4\frac{B_{mn}(k_s)W_{np}(k_s)}{\left\{\frac{d}{d\beta}\det\Pi\right\}_{\beta=k_s}}e^{j(\alpha_n(k_s)k_sx_3+k_sx_1)}\right)\bar{T}_p(k_s).$$

(6.3.28)

下面为简便起见，我们仅取 $+k_s$，实际还有 $-k_s$ 项）或者简写为

$${}_SU_m(x_1,x_3)=\sum_p^4{}_SG_{mp}(x_1,x_3)\bar{T}_p(k_s),\qquad(6.3.29)$$

或者 $${}_SU_m(x_1,x_3)=\left(\sum_p^4{}_SG_{mp}(x_3)\cdot\bar{T}_p(k_s)\right)e^{jk_sx_1},\qquad(6.3.29a)$$

其中

$${}_SG_{mp}(x_3)=j\sum_n^4\frac{B_{mn}(k_s)W_{np}(k_s)}{\left(\frac{d}{d\beta}\det\Pi\right)_{\beta=k_s}}e^{j\alpha_n(k_s)\cdot k_sx_3}.$$

因而，对表面源所激发的表面波场可以由式(6.3.28)或式(6.3.29)给出.

体波（远场） 在广义格林函数的被积函数中，除极点除外，还有分支点.在远处，可用鞍点法取积分主要部分，这恰为远场的体波. 为方便起见我们取极坐标 $x_3=r\sin\theta$；$x_1=r\cos\theta$. 在远处，格林函数的体波部分 ${}_BG_{mp}(r,\theta)$ 为

$${}_BG_{mp}(r,\theta)\sim j\sqrt{\frac{1}{2\pi r}}\sum_n^3\frac{1}{\sqrt{a_n}}\frac{B_{mn}(k_3^n)W_{np}(k_3^n)}{\det[\Pi(\beta)]_{\beta=k_1^n}}$$

$$\cdot e^{[jr(k_3^n\sin\theta+k_1^n\cos\theta)-j\pi/4]},\qquad(6.3.30)$$

其中，$a_n=\{|d^2[\alpha_n(\beta)\beta]/d\beta^2|_{\beta=k_1^n}\}\cdot\sin\theta$；$k_3^n$ 为第 n 个体波在 x^3 方向分量. k_1^n 为第n个体波在x_1方向的分量，

$$k_1^n=[\alpha_{n(\beta)}\beta]_{\beta=k_1^n}.$$

它们满足条件

$$dk_1^n/dk_3^n=-\text{ctg}\theta,\qquad(6.3.31)$$

如果让 θ' 为倒速度图中相速度波矢曲线切线的方向角，那么，$dk_3^n/dk_1^n = \mathrm{tg}\theta'$，因此$|\theta-\theta'|=\frac{\pi}{2}$.

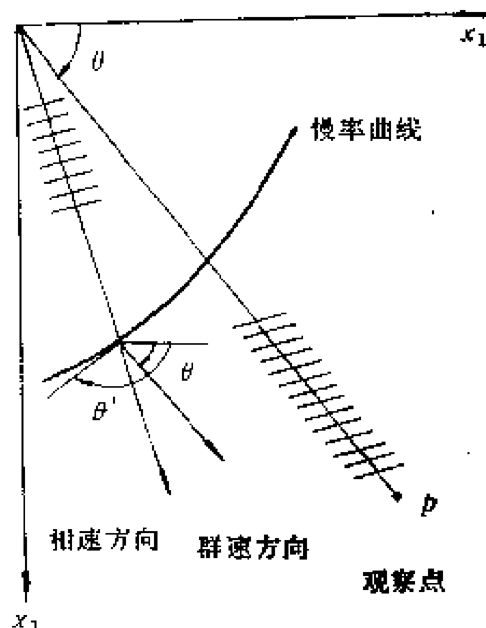


图6.3.3 鞍点条件说明：到观察点(方向角θ)的波是能流方向在θ方向的波

这就是说，相速度波矢曲线切线方向与观察点的矢径方向 θ 相垂直，如图 6.3.3，其物理意义为在观察点 P（方向为 θ）来的波并不是相速在θ方向的波，而恰是群速(能流)方向在 θ 方向的波．即我们观察到的是能流，一般说来，各向异性介质与各向同性介质不同，能流方向与相速方向并不一致，除非在纯模方向上．

在远场体波可以写成如下解析形式：

$$
{}_BU_{m(r,\theta)} \sim \sum_{p}^{4}\sum_{n}^{3} {}_BG_{mp}^{(n)}(r,\theta)\,\tilde{T}_p(k_3^n), \qquad (6.3.32)
$$

其中

$$
{}_BG_{mp(r,\theta)}^{(n)} \sim j\sqrt{\frac{1}{2\pi r a_n}}\frac{B_{mn}(k_3^n)W_{np}(k_3^n)}{\det[\Pi(k_3^n)]}e^{[jr(K_1^n\sin\theta+k^n{}_3\cos\theta)-j\pi/4]}.
$$

这样我们看到，弹性波场声表面波部分和远场体波部分，分别由式(6.3.28)，(6.3.32)以解析式求得，而其中广义格林函数的表面波部分${}_sG_{mp}(x_1,x_3)={}_sG_{mp}(x_3)e^{jk_sx_1}$，和远场体波部分${}_BG_{mp}^{n}(r,\theta)$可分别由式(6.3.26)，(6.3.29)求出．而如前所述，只要选定材料和取向，就可予先求出：表面波${}_sG_{mp}(x_3)$共有16个数，参量x_3仅出现在指数上．体波${}_BG_{mp}^{(n)}(r,\theta)$共有 4 × 4 × 3 = 48个指向性图案．当表面广义力给出时，我们只需独立地求出它们的傅氏变换：对表面波 $\tilde{T}_p(k_s)$ 有四个数，$\tilde{T}_p(k_3^n)$ 共有 4 × 3 = 12 个指向性图案．最后，我们由式(6.3.28)和(6.3.32)可求出弹性波场来．

静电场

广义 Green 函数可以写成

$$G_{mp}(x_1,x_3)=\sum_{n}^{4}G_{mp}^{(n)}, \qquad (6.3.33)$$

$$G_{mp}^{(n)}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{B_{mn}W_{np}}{\det[\Pi]}\exp[j\beta(\alpha_n x_3+x_1)]d\beta. \quad (6.3.34)$$

对于 $G_{mp}^{(n)}$ 的前三个 $G_{mp}^{(j)}(j=1,2,3)$ 实际上我们已讨论过

$$G_{mp}^{(j)}={}_{s}G_{mp}^{(j)}+{}_{B}G_{mp}^{(j)},$$

${}_{s}G_{mp}^{(j)}$ 为表面波前三个分波[见 (6.3.27) 式]，而 ${}_{B}G_{mp}^{(j)}={}_{B}G_{mp}^{(n)}$ [见 (6.3.30) 式] 为对应三个体波. 第四个分量 ($n=4$) 有些不同，${}_{s}G_{mp}^{(4)}$ 为表面波第四个分波. 其余部分，由于 α_4 总是复数，因此相应于静电场所引起的一个凋落模式，用 ${}_{E}G_{mp}$ 表示，即

$$G_{mp}^{(4)}={}_{s}G_{mp}^{(4)}+{}_{E}G_{mp}.$$

对于 ${}_{E}G_{mp}$，我们不作一般讨论，而仅研究不存在压电耦合的特殊情况. 这时广义格林函数 G_{mp} 只存在 $G_{ij}(i,j=1,2,3)$ 和 G_{44}，而 G_{4j} 和 G_{j4} 均为零. 这意味着，由于不存在压电耦合，弹性波场由力源可以激发，而电场此时"激发"的场，我们看到它就是静电场. 因为此时 ${}_{s}G_{44}^{(4)}=0$ 及 $G_{44}^{(j)}=0(j=1,2,3)$，

$$G_{44}=G_{44}^{(4)}={}_{E}G_{44}.$$

由广义格林函数表达式(6.3.22)经过计算可以得出：

$$G_{44}(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\exp j(\alpha^{(\pm)}\beta x_3+\beta x_1)}{|\beta|(\varepsilon_0+\varepsilon_p^s)}\right]d\beta, \quad (6.3.35)$$

其中 $\alpha^{(\pm)}=-\frac{\varepsilon_{13}^s}{\varepsilon_{33}^s}\pm j\frac{\varepsilon_p^s}{\varepsilon_{33}^s}$；$\varepsilon_p^s=\sqrt{\varepsilon_{11}^s\cdot\varepsilon_{33}^s-(\varepsilon_{13}^s)^2}$；且当 $\beta>0$，α 取 $\alpha^{(+)}$；$\beta<0$，α 取 $\alpha^{(-)}$，由此电势 ϕ 为

$$\phi(x_1,x_3)=\int_{-\infty}^{\infty}G_{44}(x_1-x_1',x_3)T_4(x_1')\,dx_1'. \qquad (6.3.36)$$

如果只有表面电荷 $T_4(x)=D_3(x_1)-\hat{D}_3(x_1)=\sigma(x_1)$，那么

$$\phi(x_1,x_3)=\int_{-\infty}^{\infty}G_{44}(x_1-x_1',x_3)\sigma(x_1')\,dx_1'. \qquad (6.3.36a)$$

在 $x_3=0$ 表面的电势为 $\phi(x_1,x_3)=\phi(x_1)$，且

$$\phi(x_1)=\int_{-\infty}^{\infty}G_{44}(x_1-x_1',0)dx_1', \qquad (6.3.36b)$$

其中表 格林函数 $G_{44}^s(x-x_1)=G_{44}(x_1-x_1',0)$，

$$G_{44}(x-x_1',0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(j\beta x_1)}{|\beta|(\varepsilon_0+\varepsilon_p^s)}d\beta.$$

式(6. 36b)实际上也可以由解介质静电场的拉氏方程求得.

最后，我们举一个例子来说明表面激发所产生的弹性波场.一个6mm 类晶体，其旋转对称轴是在表面内，且与传播方向垂直，即处在 x_2 轴(参见图 6.2.1). 这里式(6.3.5)的[Γ]矩阵可分为两个独立的解耦模式，[Γ_1]，[Γ_2] 分别对应压电耦合模式和非压电耦合模式.

压电耦合模式

$$[\Gamma_1]=\begin{vmatrix}-c_{44}^E\alpha^2-c_{44}^E+\rho\omega^2/\beta^2 & e_{15}\alpha^2-e_{15}\\ -e_{15}\alpha^2-e_{15} & \varepsilon_{11}^s\alpha^2+\varepsilon_{11}^s\end{vmatrix}.$$

此时起作用的广义力为 $T_2=T_{32}$ 和 $T_4=\sigma+H_t(E_1-\hat{E}_1)$. 我们得出表面波(B-G 波) Green 函数为

$${}_SG_{22}^{(\pm)}(x_1,x_3)=\mp j\frac{K_{15}^2}{c_{44}^D(1+\varepsilon_{11}/\varepsilon_0)}\cdot\frac{e^{-k_s x_3}e^{\pm jk_s x_1}}{(1-K_{15}^4/(1+\varepsilon_{11}/\varepsilon_0)^2)},$$

$${}_SG_{24}^{(\pm)}(x_1,x_3)=\frac{e_{15}}{\varepsilon_0(1+\varepsilon_{11}/\varepsilon_0)}\cdot{}_SG_{22}^{(\pm)}(x_1,x_3),$$

$${}_SG_{42}^{(\pm)}(x_1,x_3)=\mp j\frac{K_{15}^4}{e_{15}(1+\varepsilon_{11}/\varepsilon_0)}$$

$$\times\frac{\left(e^{-k_1 x_3}-\frac{1}{(1+\varepsilon_{11}/\varepsilon_0)}e^{-k_8 x_3}\right)e^{\pm jk_s x_1}}{(1-K_{15}^4/(1+\varepsilon_{11}/\varepsilon_0)^2)}.$$

$${}_SG_{44}^{(\pm)}(x_1,x_3)=\frac{e_{15}}{\varepsilon_0(1+\varepsilon_{11}/\varepsilon_0)}\cdot{}_SG_{42}^{(\pm)}(x_1,x_3),$$

上式中 k_s, k_8 和 k_{15} 见式(6.2.47).所激发的表面波(B-G)波场为

$$\begin{bmatrix}{}_Su_2^{(\pm)}(x_1,x_3)\\ {}_S\phi^{(\pm)}(x_1,x_3)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}{}_SG_{22}^{\pm}(x_3), & {}_SG_{24}^{\pm}(x_3)\\ {}_SG_{42}^{\pm}(x_3), & {}_SG_{44}^{\pm}(x_3)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{T}_2(\pm k_s)\\ \bar{T}_4(\pm k_s)\end{bmatrix}e^{\pm jk_s x_1}$$

体波(远场) Green 函数:

$${}_BG_{mn}\sim\frac{e^{j3\pi/4}}{\sqrt{2\pi}}g_{mn}(\theta)\frac{e^{jk_tr}}{\sqrt{k_tr}},$$

其中$k_t=\omega/\sqrt{C^D_{44/\rho}}$,而 $g_{mn}(\theta)$ 为

$$\begin{cases}g_{22}(\theta)=-\dfrac{j}{C^D_{44}}\dfrac{1}{(1-j|\mathrm{ctg}\theta|\cdot K^2_{15})/(1+\varepsilon_{11}/\varepsilon_0)},\\ g_{24}(\theta)=\dfrac{e_{15}}{(\varepsilon_0+\varepsilon^s_{11})}\cdot g_{22}(\theta),\\ g_{42}(\theta)=\dfrac{e_{15}}{\varepsilon^s_{11}}\cdot g_{22}(\theta),\\ g_{44}(\theta)=\dfrac{e^2_{15}}{\varepsilon^s_{11}(\varepsilon_0+\varepsilon^s_{11})}\cdot g_{22}(\theta).\end{cases}$$

所激发的体波远场为

$$\begin{bmatrix}{}_Bu(\theta,\gamma)\\ {}_B\phi(\theta,\gamma)\end{bmatrix}\doteq\frac{e^{j3\pi/4}\cdot e^{jk_tr}}{\sqrt{2\pi k_tr}}\begin{bmatrix}g_{22(\theta)},g_{24(\theta)}\\ g_{42(\theta)},g_{44(\theta)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{T}_2(k_t\cos\theta)\\ \bar{T}_4(k_t\cos\theta)\end{bmatrix}.$$

决定 Green函数指向性的是 $g_{mn(\theta)}$.由于一般材料$K^2_{15}/(1+\varepsilon_{11}/\varepsilon_0)\ll1$,所以除非 $\theta\to0$或 π 时$g_{mn}\to0$ 外,其他 θ 角处几乎是没有指向性的.

非压电耦合模式

$$[\Gamma_2]=\begin{vmatrix}-C^E_{66}\alpha^2-C^E_{11}+\rho\omega^2/\beta^2 & -(C^E_{11}-C^E_{66})\alpha\\ -(C^E_{11}-C^E_{66})\alpha & -C^E_{11}\alpha^2-C^E_{66}+\rho w^2/\beta^2\end{vmatrix}.$$

此时起作用的广义力为 $T_1=T_{31}$ 和 $T_3=T_{33}$, 可以得出,表面波的 Green 函数为

$${}_SG^{\pm}_{11}(x_1,x_3)=(-\pi)\left[(c^E_{33}-c^E_{13})\alpha^{(\pm)}_{2e}\quad\left(e^{-k_1x_3}+\frac{2\alpha^{(\pm)}_{1e}\alpha^{(\pm)}_{2e}}{1-\alpha^{(\pm)2}_{2e}}\right.\right.$$

$$\left.\left.\times e^{-k_2x_3}\right)\right]\frac{e^{jk_ex_1}}{\Delta(k_3)},$$

$${}_SG^{\pm}_{13}(x_1,x_3)=-\frac{c^E_{66}(1-\alpha^{(\pm)4}_{2e})}{(c^E_{33}-c^E_{13})\alpha^{(\pm)}_{2e}}\cdot{}_SG^{\pm}_{11}(x_1,x_3),$$

$${}_SG^{(\pm)}_{1}(x_1,x_3)=(-\pi)\left[(c^E_{33}-c^E_{13})\alpha^{(\pm)}_{1e}\alpha^{(\pm)}_{2e}\left(e^{-k_1x_3}-\frac{2}{1-\alpha^{(\pm)2}_{2e}}\right.\right.$$

$$\times e^{-k_{\mathrm{II}}x_1}\Big)\Big]\frac{e^{jk_3x_1}}{\Delta(k_3)},$$

$${}_SG_{33}^{(\pm)}(x_1,x_3)=-\frac{c_{66}^E(1-\alpha_{2s}^{(\pm)2})}{(c_{33}^E-c_{13}^E)\alpha_{2s}^{(\pm)}}\cdot{}_SG_{31}^{(\pm)}(x_1,x_3),$$

其中，$\alpha_{1s}^{(\pm)}=\pm\sqrt{1-(v_s/v_1)^2}$，$\alpha_{2s}^{(\pm)}=\sqrt{1-(v_s/v_3)^2}$，

$$v_1=\sqrt{c_{11}^E/\rho}\quad v_3=\sqrt{c_{66}^E/\rho},$$

而 v_s 满足方程

$$2\sqrt{1-\left(\frac{v_S}{v_1}\right)^2}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{v_S}{v_3}\right)^2}-\left[2-\left(\frac{v_S}{v_3}\right)^2\right]$$

$$\times\left[\frac{1}{1-c_{13}^E/c_{33}^E}\left(\frac{v_S}{v_3}\right)^2-1\right]=0,$$

$$k_I=\sqrt{k_s^2-k_1^2},\ k_{\mathrm{II}}=\sqrt{k_s^2-k_3^2};\ \Delta=v_{66}^E[2(v_{33}^E$$

$$-c_{13}^E)(\alpha_{2s}^{(\pm)}/\alpha_{1s}^{(\pm)}+\alpha_{1s}^{(\pm)}/\alpha_{2s}^{(\pm)}+2c_{13}^E$$

$$-2c_{33}^E+k_3^2k_1^2c_{33}^E/k_s^4).$$

这样激发的表面波场为

$$\begin{bmatrix}{}_Su_1^{(\pm)}\\{}_Su_3^{(\pm)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}{}_SG_{11}^{(\pm)}(x_3) & {}_SG_{13}^{\pm}(x_3)\\{}_SG_{31}^{(\pm)}(x_3) & {}_SG_{33}^{\pm}(x_3)\end{bmatrix}e^{\pm jk_sx_1}\begin{bmatrix}\bar{T}_{31}(\pm k_s)\\\bar{T}_{33}(\pm k_s)\end{bmatrix}.$$

体波(远场)格林函数 ${}_BG_{mn}$ 分为纵波和横波

$${}_BG_{mn}={}_BG_{mn}^{(L)}+{}_BG_{mn}^{(T)}.$$

纵波 Green 函数

$${}_BG_{mn}^{(L)}\doteq\frac{e^{j3\pi/4}}{\sqrt{2\pi}}g_{mn}^{(L)}\cdot\frac{e^{jk_1r}}{\sqrt{k_1r}},$$

其中 $g_{mn}^{(L)}$:

$$g_{11}^{(L)}=(c_{33}^E-c_{13}^E)\alpha_2^{(L)}\Delta_{L(\theta)},\ g_{31}^{(L)}=\alpha_1^{(L)}\cdot g_{11}^{(L)},$$

$$g_{13}^{(L)}=-c_{66}^E(1-\alpha_2^{(L)})^2\Delta_{L(\theta)},\ g_{33}^{(L)}=\alpha_1^{(L)}\cdot g_{13}^{(L)},$$

其中，$\alpha_1^{(L)}=\mathrm{tg}\theta,\ \alpha_2^{(L)}=\sqrt{\left(\frac{c_{11}^E}{c_{66}^E}\right)/\cos^2\theta-1}$，

$$\Delta_L(\theta)=j\frac{\alpha_1^{(L)}}{c_{66}}\cdot\frac{1}{2(c_{33}-c_{13}^E)\alpha_1^{(L)}\alpha_2^{(L)}-(1-\alpha_2^{(L)2})\cdot(c_{13}+\alpha_1^{(L)2}c_{33})},$$

$g_{mn}^{(L)}$的指向性图案如图 6.3.4(a) 所示，此时材料为 PZT-5H.

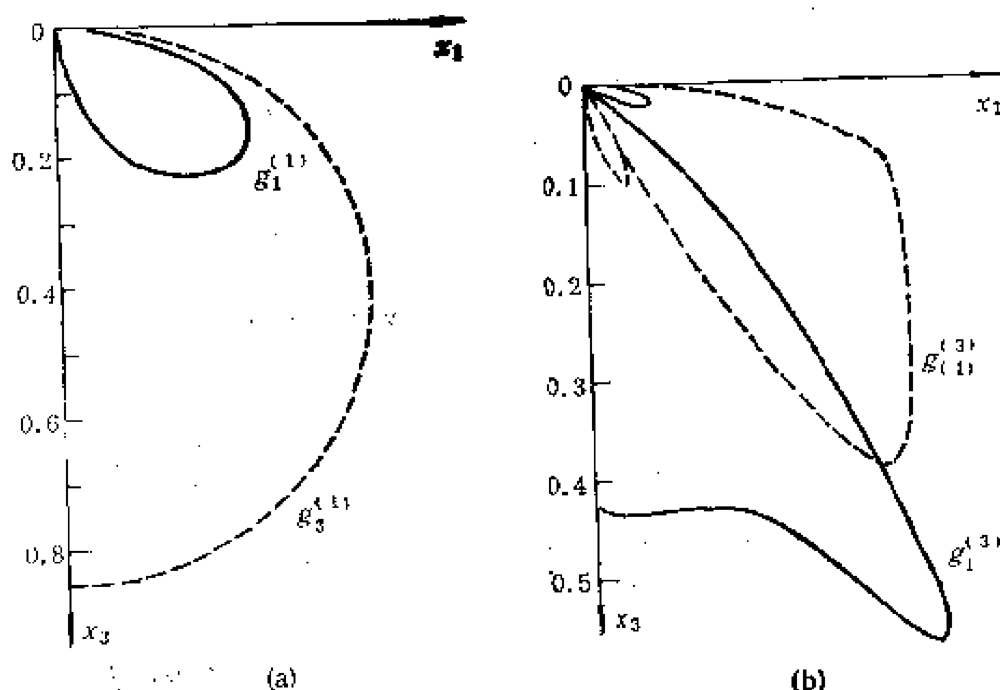


图6.3.4 非压电耦合模式的Green函数的指向性图案(材料为PZT-5H)
(a)纵波部分； (b) 横波部分

激发的体纵波场为

$$\begin{bmatrix} {}_Bu_1^{(L)} \\ {}_Bu_3^{(L)} \end{bmatrix} = \frac{e^{j3\pi/4}}{\sqrt{2\pi k_1 r}} e^{jk_1 r} \begin{bmatrix} g_{11(\theta)}^{(L)}, g_{13(\theta)}^{(L)} \\ g_{31(\theta)}^{(L)}, g_{33(\theta)}^{(L)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{T}_{31}(k_1\cos\theta) \\ \tilde{T}_{33}(k_1\cos\theta) \end{bmatrix},$$

横波 Green 函数

$${}_BG_{mn}^{(T)} \sim \frac{e^{j3\pi/4}}{\sqrt{2\pi}} \cdot g_{mn}^{(T)} \frac{e^{jk_3 r}}{\sqrt{k_3 r}},$$

其中 $g_{mn}^{(T)}$

$$g_{11}^{(T)} = \alpha_3^{(T)} g_{31}, g_{31} = (c_{13} + \alpha_1^{(T)2} c_{33}) \Delta_T(\theta),$$

$$g_{13} = \alpha_3^{(T)} g_{33}, g_{33} = -2c_{66}\alpha_1^{(T)} \Delta_T(\theta),$$

这里

$$\Delta_T(\theta) = j\frac{\alpha_3^{(T)}}{c_{66}} \frac{1}{2(c_{33}^E - c_{13}^E)\alpha_1^{(T)}\alpha_3^{(T)} - (1-\alpha_3^{(T)2})(c_{13}^E + \alpha_1^{(T)2} c_{33}^E)}.$$

对 PZT-5H 材料，$g_{mn}^{(T)}$ 的指向性图示于图6.3.4(b)中。激发的横波为

$$\begin{bmatrix} {}_Bu_1^{(T)} \\ {}_Bu_3^{(T)} \end{bmatrix} = \frac{e^{j3\pi/4}}{\sqrt{2\pi k_3 r}} e^{jk_3 r} \begin{bmatrix} g_{11}^{(T)}(\theta), g_{13}^{(T)}(\theta) \\ g_{31}^{(T)}(\theta), g_{33}^{(T)}(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{T}_{31}(k_1\cos\theta) \\ \tilde{T}_{33}(k_1\cos\theta) \end{bmatrix}.$$

(二)金属化表面

在金属化表面，由于表面电势保持为常数，不失一般性，我们可令其为零，这样表面广义力：

$$\mathbf{T}_m=\{T_{1m},T_{2m},T_{3m},T_{4m}\}$$
$$=\{T_{31},T_{32},T_{33},\phi\}. \tag{6.3.37}$$

此时广义弹性波场傅氏变换的一般解仍可写成(6.3.7)式的形式，那么由广义力$\mathbf{T}_m$的傅氏变换式

$$[(\tilde{\mathbf{T}}_m)_m]=\{\tilde{T}_{1m},\tilde{T}_{2m},\tilde{T}_{3m},\tilde{T}_{4m}\}$$
$$=\{\tilde{T}_{31},\tilde{T}_{32},\tilde{T}_{33},\tilde{\phi}\}, \tag{6.3.38}$$

我们可得与自由表面中相类似的公式[见(6.3.15)]

$$[(\tilde{T}_{m(\beta)})_m]=[(\Pi_{mn})_m]\cdot[C_n]. \tag{6.3.39}$$

在金属化表面，$\{(\Pi_{mn})_m\}$中的$\{(\Pi_{jn})_m\}$仍然与(6.3.10)式一样，则$\{(\Pi_{jn})_m\}=\{\Pi_{jn}\}$，而

$$\{(\Pi_{4n})_m\}=\{B_{4n}\}.$$

同样，弹性波场的傅氏变换的一般解为

$$[(\tilde{U}_m)]_m=[(\tilde{G}_{mp})_m][(\tilde{T}_p)_m], \tag{6.3.40}$$

其中

$$(\tilde{G}_{mp})_m=\sum_n^4\frac{B_{mn}\cdot(W_{np})_m}{\det[\Pi_m]}e^{j\alpha_n\beta x_3}. \tag{6.3.41}$$

最后我们得到广义弹性波场解为

$$U_m(x_1,x_3)=\int_{-\infty}^{\infty}\sum_p^4(\tilde{G}_{mp}(x-x_1',x_3))_m\cdot(T_{p(x_1',0)})_m\cdot dx_1'. \tag{6.3.42}$$

其中广义 Green 函数为

$$(G_{mp}(x_1-x_1',x_3))_m=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_n^4\frac{B_{mn}(W_{np})_m}{\det[(\Pi_{mn})_m]}e^{j(\alpha_n\beta x_3+\beta(x_1-x_1'))}d\beta, \tag{6.3.43}$$

或简写成形式

$$\mathbf{U}=\mathbf{G}_m\circledast\mathbf{T}_m,$$

其中⊛表示点乘卷积.

与自由表面比较，金属化表面的许多公式形式上与自由表面一样，仅有下述两点不同：(i) 广义力第4个分量，即电源激发 T_4 不一样，此时的 T_4 为表面电势 $\phi(x,0)$；(ii) 广义格林函数 $\mathbf{G}_m$ 不同，此时 $[(\Pi_{mn})_m]$ 中第4行 $\{(\Pi_{4n})_m\}$ 与自由表面不同. 特别由于

$$\begin{cases} \sum_{n}^{4} B_{4n}(W_{n4})_m = \det[\Pi_m], \\ \sum_{n}^{4} B_{4n}(W_{nj})_m = 0, \end{cases} \tag{6.3.44}$$

所以
$$\begin{cases} (G_{44}(x,0))_m = \delta(x_1), \\ (G_{4j}(x,0))_m = 0, \end{cases}$$

因此得出 $U_4(x_1,0) = (T_4(x_1))_m = \phi(x_1,0)$. 这是自然要求的结果：即表面电势是第四广义力，同时也是弹性波场第4个分量在表面的值.

(三) 表面任意分布源的激发

在上面讨论了一维源分布下的表面激发，现在将它推广到任意源分布的激发问题. 对于任意源分布的激发，我们将要看到可把它们看成是点源激发的叠加，我们只研究自由表面的情况.

设在 $x_3>0$，有场分布 $U_m(x_1,x_2,x_3)$ $(m=1,2,3,4)$，$U_4=\phi$；在 $x_3<0$，有场 $\hat{\phi}$. 对它们分别作二维傅氏变换得：

$$\tilde{U}_m(\alpha,\beta,x_3) = \iint_{-\infty}^{+\infty} U_m(x_1,x_2,x_3)e^{-j(\alpha x_1+\beta x_2)}dx_1dx_2, \tag{6.3.45}$$

$$\tilde{\hat{\phi}}(\alpha,\beta,x_3) = \iint_{-\infty}^{\infty} \hat{\phi}(x_1,x_2,x_3)e^{-j(\alpha x_1+\beta x_2)}dx_1dx_2. \tag{6.3.46}$$

对耦合波方程(6.2.37)进行二维傅氏变换，考虑简谐情况，略去时间因子 $e^{-j\omega t}$，并设解：

$$\tilde{U}_m(\alpha,\beta,x_3) = B_m e^{j\gamma x_3}, \tag{6.3.47}$$

因而由耦合波方程的傅氏变换式可得：

$$[\Gamma_{mp}]\cdot[B_p]=0,\ (m,p=1,2,3,4) \tag{6.3.48}$$

其中

$$\begin{cases}\Gamma_{ij}=-c_{1i1j}\alpha^2-c_{2i2j}\beta^2-c_{3i3j}\gamma^2-(c_{1ij2}+c_{2ij1})\alpha\beta\\ \qquad -(c_{2ij3}+c_{3ij2})\beta\gamma-(c_{1ij3}+c_{3ij1})\alpha\gamma+\delta_{ij}\rho\omega^2,\\ \Gamma_{i4}=\Gamma_{4i}=-e_{11i}\alpha^2-e_{22i}\beta^2-e_{33i}\gamma^2-(e_{21i}+e_{12i})\alpha\beta\\ \qquad -(e_{23i}+e_{32i})\beta\gamma-(e_{31i}+e_{13i})\alpha\gamma,\\ \Gamma_{44}=\varepsilon_{11}\alpha^2+\varepsilon_{22}\beta+\varepsilon_{33}\gamma^2+(\varepsilon_{12}+\varepsilon_{21})\alpha\beta+(\varepsilon_{23}+\varepsilon_{32})\beta\gamma\\ \qquad +(\varepsilon_{13}+\varepsilon_{31})\alpha\gamma.\end{cases} \tag{6.3.49}$$

B_p 不全为零的条件是

$$\det[\Gamma_{mp}]=0. \tag{6.4.50}$$

这是一个关于 γ 的八次方程,对于给定的 α 和 β,γ 有八个根 α_n,且是四对共轭复根. 由于要满足 $x_3\to\infty$ 的辐射条件,我们取的四个根是满足 $\mathrm{Im}(\alpha_n)>0$ 的根. 令 $\tilde{U}_m$ 的全解为

$$\tilde{U}_m(\alpha,\beta,x_3)=\sum_n^4 C_n B_{mn} e^{j\gamma_n x_3}. \tag{6.3.51}$$

B_{mn} 在 γ_n 确定后,除 B_{1n} 外可由式(6.3.47)确定. 由于 C_n 和 B_{1n} 都是待定常数,为不失一般性,令 $B_{1n}=1$,因而仅需确定 C_n.

对于 $\tilde{\phi}$,我们可得到解

$$\tilde{\phi}(\alpha,\beta,x_3)=\tilde{\phi}(\alpha,\beta,0)e^{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,x_3}$$

$$=\tilde{U}_4(\alpha,\beta,0)e^{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,x_3},$$

所以

$$\tilde{\phi}(\alpha,\beta,x_3)=\left(\sum_n^4 C_n B_{4n}\right)e^{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}x_3}. \tag{6.3.52}$$

C_n 是由边界的广义力所决定的. 波在边界 $x_3=0$ 有广义力分布:

$$\mathbf{T}(x_1,x_2)=\{T_1(x_1,x_2),T_2(x_1,x_2),T_3(x_1,x_2),T_4(x_1,x_2)\}$$

$$=\{T_{31},T_{32},T_{33},T_4\}, \tag{6.3.53}$$

同样,对它作傅氏变换则有

$$
[\tilde{T}(\alpha,\beta)] = \begin{bmatrix} \tilde{T}_1(\alpha,\beta) \\ \tilde{T}_2(\alpha,\beta) \\ \tilde{T}_3(\alpha,\beta) \\ \tilde{T}_4(\alpha,\beta) \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} \tilde{T}_{31}(\alpha,\beta,0) \\ \tilde{T}_{32}(\alpha,\beta,0) \\ \tilde{T}_{33}(\alpha,\beta,0) \\ [\tilde{D}_3(\alpha,\beta,0) - \tilde{\tilde{D}}_3(\alpha,\beta,0)] + \varepsilon_0\sqrt{\alpha^2+\beta^2} \\ \times[\tilde{\phi}(\alpha,\beta,0) - \tilde{\tilde{\phi}}(\alpha,\beta,0)] \end{bmatrix}. \tag{6.3.54}
$$

另一方面，由场的解(6.3.51)，(6.3.52)，我们有

$$
[\tilde{T}_{m(\alpha,\beta,0)}] = [\Pi_{mn}][C_n], \tag{6.3.55}
$$

其中

$$
\begin{cases} \Pi_{jn} = j\alpha c_{3jk1}B_{kn} + j\beta c_{3jk2}B_{kn} + j\gamma_n c_{3jk3}B_{kn} \\ \qquad + j\alpha e_{3j1}B_{4n} + j\beta e_{3j2}B_{4n} + j\gamma_n e_{3j3}B_{4n}, \\ \Pi_{4n} = j\alpha e_{31k}B_{kn} + j\beta e_{32k}B_{kn} + j\gamma_n e_{33k}B_{kn} \\ \qquad - j\alpha\epsilon_{31}B_{4n} - j\beta\epsilon_{32}B_{4n} - j\gamma_n\epsilon_{33}B_{4n} + \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,\varepsilon_0 B_{4n}. \end{cases} \tag{6.3.56}
$$

那么，可求出C_n为

$$
C_n = \frac{W_{nm}(\alpha,\beta,\gamma_n)}{H(\alpha,\beta,\gamma_n)}\tilde{T}_m(\alpha,\beta,0). \tag{6.3.57}
$$

其中 $H(\alpha,\beta,\gamma_n) = \det[\Pi_{mn}]$，而 W_{mn} 为它的代数余子式．这样我们就求得弹性波场的傅氏变换式．由式(6.3.57)及(6.3.55)，

$$
[\tilde{U}_m] = [\tilde{G}_{mp}][\tilde{T}_p], \tag{6.3.58}
$$

其中 $[\tilde{G}_{mp}]$ 为 (α,β) 空间的格林函数：

$$
\tilde{G}_{mp}(\alpha,\beta;x) = \sum_n^4 \frac{B_{mn}W_{np}}{H}e^{j\gamma_n x_3}. \tag{6.3.59}
$$

对式(6.3.58)进行反傅氏变换，得到弹性波场解

$$
U_m(x_1,x_2,x_3) = \sum_p^4 \iint_{-\infty}^{\infty} G_{mp}(x_1-x_1',x_2-x_2',x_3)T_p(x_1',x_2',0)\,dx_1'dx_2'. \tag{6.3.60}
$$

其中广义格林函数 G_{mp} 为

$$G_{mp}(x_1,x_2,x_3)=\frac{1}{4\pi^2}\iint_{-\infty}^{\infty}\left[\sum_{n}^{4}\frac{B_{mn}W_{np}}{H}e^{i(\alpha x_1+\beta x_2+\gamma_n x_3)}\right]d\alpha\, d\beta, \tag{6.3.61}$$

而广义力 T_p 为

$$T_p(x_1,x_2,0)=\{T_{31}(x_1,x_2,0),T_{32}(x_1,x_2,0),T_{33}(x_1,x_2,0),\\ T_4(x_1,x_2,0)\} \tag{6.3.62}$$

而

$$T_4(x_1,x_2,0)=[D_3(x_1,x_2,0)-\tilde{D}_3(x_1,x_2,0)]+[\psi(x_1,x_2,0)\\ -\hat{\phi}(x_1,x_2,0)], \tag{6.3.63}$$

其中

$$\begin{cases}\psi(x_1,x_2,0)=\dfrac{1}{4\pi^2}\displaystyle\iint_{-\infty}^{\infty}\varepsilon_0(\alpha^2+\beta^2)^{1/2}\tilde{\phi}(\alpha,\beta,0)e^{i(\alpha x_1+\beta x_2)}d\alpha\, d\beta,\\ \hat{\phi}(x_1,x_2,0)=\dfrac{1}{4\pi^2}\displaystyle\iint_{-\infty}^{\infty}\varepsilon_0(\alpha^2+\beta^2)^{1/2}\tilde{\phi}(\alpha,\beta,0)e^{i(\alpha x_1+\beta x_2)}d\alpha d\beta.\end{cases} \tag{6.3.64}$$

由此，式(6.3.60)可简记为

$$\mathbf{U}=\mathbf{G}⊛⊛\mathbf{T}, \tag{6.3.65}$$

⊛⊛表示点乘双重卷积.

我们看到，如果在表面分布力源为点源，并假定在(0,0,0)点，且只有第p个分量不为零，那么此时广义格林函数$\{G_{mp}(x_1,x_2,x_3)\}$[式(6.3.61)]就表示T_p为δ源时所得到的弹性波场$\{u_m\}$. 如果在(0,0,0)处广义力各分量都存在有$\{T_p\}$，那么$\sum\limits_{p}^{4}G_{mp}(x_1,x_2,x_3)$就表示该力源所产生的弹性波场$\{U_m\}$，而空间任意分布源所产生的弹性波场$\{U_m\}$就是这些点源的叠加的结果[式(6.3.60)].

对于式(6.3.60)，同前面一样可以分为表面波部分，体波部分和与静电场相关部分，不过这时，表面波部分也只能在远场得到解析表达式，体波远场部分要用双重积分鞍点法得到.

图6.3.5所示的就是在Y切$LiNbO_3$基底上一个点源，在远处

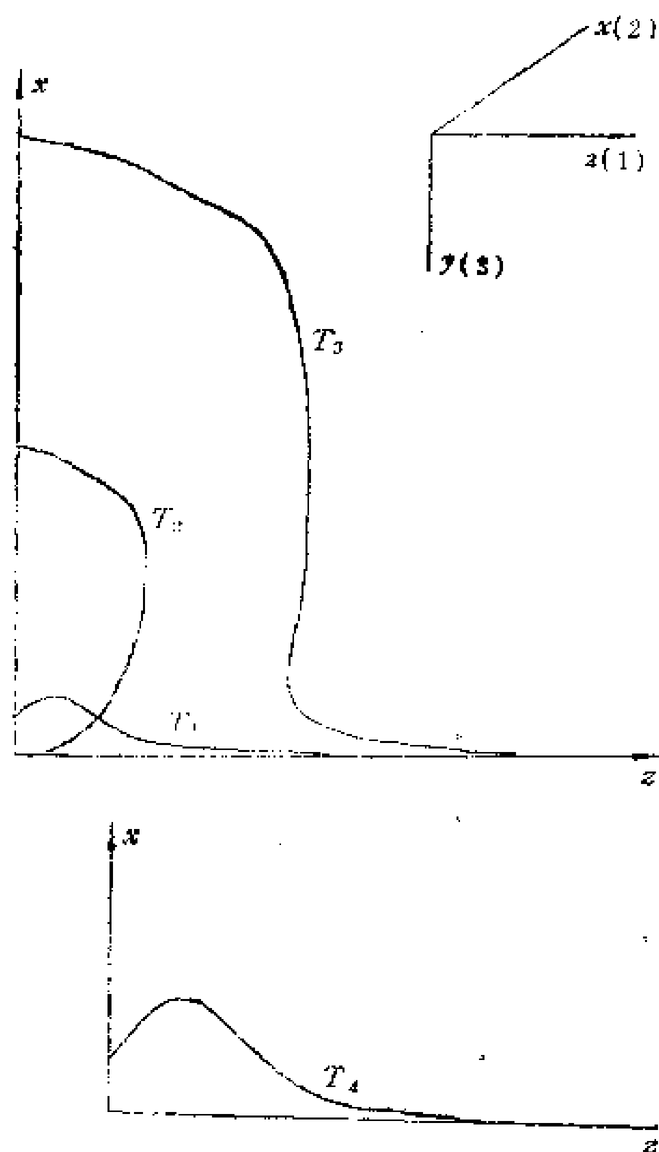


图6.3.5 在Y切$LiNbO_3$表面点源所激发的表面波功率流分布

所激发的表面波场的功率流分布．“2”对应x方向，“3”对应y方向，“1”对应z方向．由图可见，面的法向应力比其他方向激发更有效，而T_1，T_3以及电激发T_4在Z方向有一功率流最大值．

6.3.3 叉指换能器

叉指换能器作为声表面技术中有效地激发源．在其加上交变电压后，每根叉指(或每对叉指间隔)就能有效地激发声表面波，并

向两个方向传播开来. 右距叉指换能器某一距离处，各个叉指源激发的波将以不同的延迟时间到达. 如果每个源以某幅度进行加权，它们又以不同时延在某距离处相加起来，那么这就构成一个横向滤波器，如图 6.3.6 所示，它具有很好的信号处理功能. 因此可

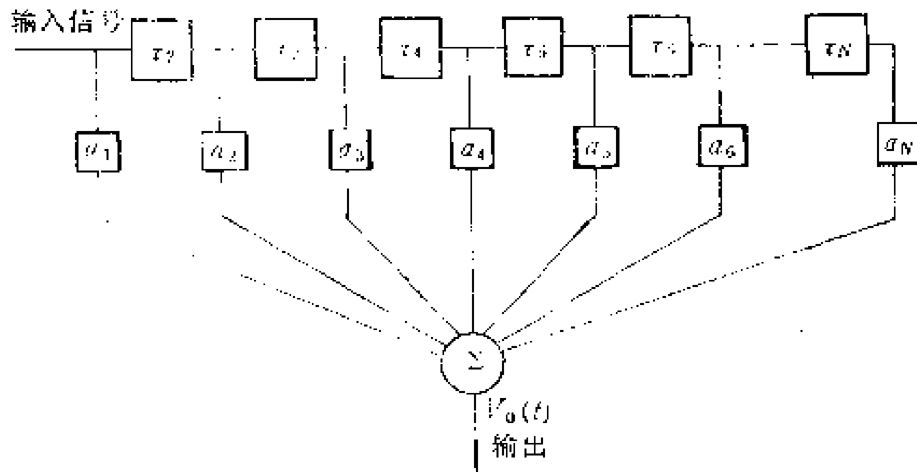


图6.3.6　叉指换能器等效横向滤波器

以很容易地调节幅度和相位（延时），而且它们基本上是可独立调节的. 这种横向滤波器的作用是构成现今许多表面波器件（如延迟线，带通滤波器，脉冲压缩滤波器等）的基础.

如前所述，叉指换能器在声表面波器件中占有非常重要的地位，因而随着声表面波技术的发展就吸引人们对它的特性进行分析和讨论. 但是叉指换能器的分析比之体波换能器远为复杂，严格的分析很困难，因此一开始就有许多近似模型应运而生，以满足器件设计上的需要. 另一方面，试图从场的观点去分析（我们可称为场模型）也在逐渐发展. 这两种分析方法并行发展，但是如何把它们之间联系起来，虽然也作过一些工作，但还有许多问题有待进一步的解决和深入研究. 下面我们来分析叙述各种模型，并试图作一些比较.

（一）场模型

在叉指换能器的电极间加上一个电压 V，而在电极空隙处，由于是自由表面，$D_3-\bar{D}_3=0$，即表面电荷 σ 为零. 根据前面的讨论，如果这时仅有电激发，广义格林函数 G 又可独立求出，我们只要

将整个表面广义力分布（此时为电源分布）、而且仅有表面电荷的分布求出来，就可给出弹性波场了．为此，我们首先要求出这个表面电荷在整个表面的分布．考虑一维电源分布，而且先暂假定整个表面的电荷分布为

$$D_3 - \hat{D}_3 = \sigma(x_1), \tag{6.3.66}$$

那么此时广义力

$$[T] = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sigma(x_1) \end{bmatrix}. \tag{6.3.67}$$

弹性波场由式(6.3.22)给出为

$$\begin{aligned} U_m(x_1,x_3) &= \int_{-\infty}^{\infty} G_{m4}(x_1 - x_1', x_3) \cdot T_4(x_1',0)\,dx_1' \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} G_{m4}(x_1 - x_1', x_3)\sigma(x_1')\,dx_1'. \quad (m=1,2,3,4) \end{aligned} \tag{6.3.68}$$

分别写出位移和电势

$$u_j(x_1,x_3) = \int_{-\infty}^{\infty} G_{j4}(x_1 - x_1', x_3)\sigma(x_1')\,dx_1', \tag{6.3.38a}$$

$$\phi(x,x_3) = \int_{-\infty}^{\infty} G_{44}(x_1 - x_1', x_3)\sigma(x_1')\,dx_1'. \tag{6.3.38b}$$

而在表面：

$$\phi(x,0) = \int_{-\infty}^{\infty} G_{44}(x_1 - x_1', 0)\sigma(x_1')\,dx_1'. \tag{6.3.69}$$

我们实际上是要求出上述积分方程(6.3.69)的解，而且满足条件：

$$\begin{cases} \text{在电极区} \quad \phi(x,0) = \pm v/2, \\ \text{在非电极区} \, \sigma(x_1) = 0. \end{cases} \tag{6.3.70}$$

一旦$\sigma(x_1)$求出，那么我们关心的表面波场可由式(6.3.29a)给出：

$$_sU_m = {}_sG_{m4}(x_3)\,\bar{\sigma}(k_s)\,e^{ik_s x_1}, \tag{6.3.71}$$

其中

$$ {}_{S}G_{m4(x_3)} = j\sum_{s}^{4} \frac{B_{ms}(k_s) W_{s4}(k_s)}{\left(\frac{d}{d\beta}\det\Pi\right)_{\beta=k_s}} e^{j\omega\alpha(k_s)\cdot k_s x_3}. $$

可以看出，${}_sG_{m4}(x_3)$只是以ωx_3为参数，而取决于材料和取向，一旦求出$\sigma(x_1)$（或$\sigma(k_s)$），那么就可以求出弹性波场来.

一般求解$\sigma(x_1)$，由(6.3.69)出发计算比较复杂. 现在用弱耦合近似，即忽略声电的耦合，这时式(6.3.69)就化为前面讨论静电场的式(6.3.35b). 虽然这两个式表面形式一样，实际上这时格林函数G_{44}已经化简为式(6.3.35a)，而式(6.3.36b)换成另一种写法：

$$ \phi(x_1, 0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma(\beta)}{|\beta|(\varepsilon_0+\varepsilon_p^*)} e^{j\beta x_1} d\beta, \tag{6.3.72} $$

所以

$$ \tilde{\phi}(\beta, 0) = \sigma(\beta)/|\beta|(\varepsilon_0+\varepsilon_p^*). \tag{6.3.73} $$

显然

$$ \sigma(x_1) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\beta|(\varepsilon_0+\varepsilon_p^*)\tilde{\phi}(\beta, 0) e^{j\beta x_1} d\beta, \tag{6.3.74} $$

这样就可用迭代法求出$\sigma(x_1)$来. 迭代过程是，设在电极区中满足$\phi(x, 0) = \pm v/2$，而在非电极区假定某一定$\phi(x_1)$，并让在电极边缘交界处ϕ联接起来. 这样设定整个表面ϕ，求出它的富氏变换$\tilde{\phi}(\beta)$，再用式(6.3.74)，求出$\sigma_0(x_1)$来. 这时看在非电极区是否满足$\sigma(x_1) = 0$，如不满足，则令非电极区$\sigma(x_1) = 0$，而在电极区参照已得的$\sigma(x_1)$，设定合适的$\sigma(x_1)$，再求出它们的傅氏变换$\tilde{\sigma}(\beta)$，并利用式(6.3.72)求出$\phi(x_1, 0)$，再看在电极区是否满足$\phi(x_1, 0) = \pm v/2$…依次反复迭代下去，直到满足条件(6.3.40).

对于无限长的周期均匀分布的叉指换能器，可以给出$\sigma(x_1)$的解析表达式：

$$ \sigma(x_1) = \frac{2\pi v(\varepsilon_0+\varepsilon_p^*)}{\Lambda K(\cos\eta\pi/2)} \sum_{m=1}^{\infty} P_{m-1}(\cos\eta\pi) \times \sin\left[2\pi(2m-1)\frac{x_1}{\Lambda}\right], \tag{6.3.75} $$

其中 Λ 为叉指电极周期，$\eta\Lambda/2$ 为电极宽度，$K(x)$ 为第一类完全的椭园积分. P_m 为勒让德多项式. 其电荷分布如图 6.3.7(a) 所示. 其电极宽度为 $\Lambda/4(\eta=1/2$，即电极和间隙等宽度).

上叙是在弱耦合近似下得到的电荷分布. 但是严格地讲，实际情况要比这复杂得多，它是由式(6.3.38)所确定的. 在 Green 函数 G_{44} 中不仅含有静电项，而且含有由于声电耦合所起作用的部分，物理上的含义是：叉指间的介电性质(电容)会有某种电荷的分布，而且由于是压电晶体，存在声电间的耦合，它同时也发射出弹性波(表面波和体波). 一方面它的发射会影响电荷分布，另一方面同时又在其他电极上与电极相互作用，引起电荷分布的变化，而这个变化后的电荷分布又改变了弹性波场的分布. 这就是所谓自洽场的问题，即通常是给出了电压分布，而产生的表面电荷分布实际与产生的弹性波场相互关联，互为因果的.表面电荷与它产生的弹性波场是一并得出的. 这样在求一个实际叉指换能器阵时，就得依靠于数值计算.图6.3.7(b)就是一个四对叉指换能器相应的电荷分布图. 在图6.3.7(a)中是前叙无限长周期阵并在弱耦合近似下由静电解得出的电荷分布.从图中，我们可以看出它们的

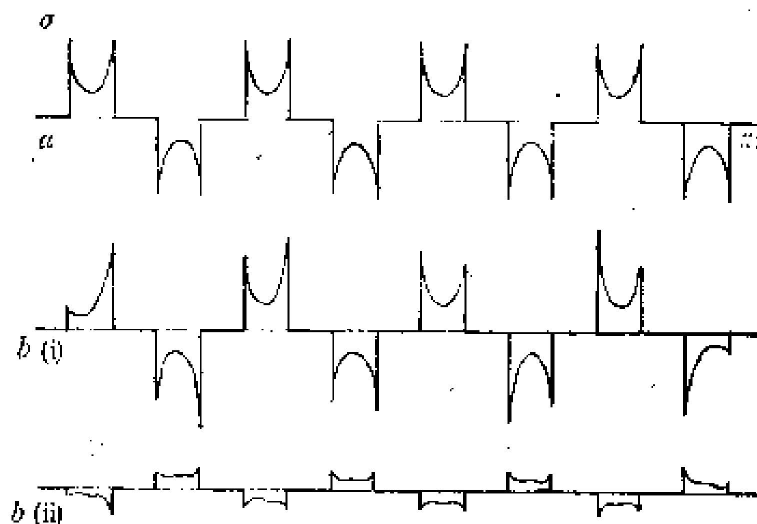


图6.3.7　在YZ-LiNbO$_3$上四对叉指换能器的电荷分布
(a)弱耦合近似下静电解；
(b)严格数值计算结果；(i)与所加电压的同相电荷部分；
(ii)与所加电压相差90°的电荷部分

差别.

我们在弱耦合近似下来进一步分析叉指换能器. 由于场方程的线性性质，我们可以应用电荷叠加原理. 对一个无限长的周期叉指换能器阵，如果在叉指阵上每个电极的电压有一个分布为

$$\{\cdots\cdots V_1, V_2, V_3, \cdots V_r\},$$

它所造成的电荷分布 σ_{as} 可以认为是这样分布的：第一个电压分布

$$\{0, 0\cdots 0, V_1, 0, 0\cdots\},$$

对应电荷分布为 σ_1，而第 n 个电压分布

$$\{0, 0, \cdots 0, V_n, 0\cdots\}$$

对应电荷分布 $\sigma_n, \cdots$,

这时，
$$\sigma_{All} = \sum_n \sigma_n. \tag{6.3.76}$$

如果让 $\sigma_0^{(n)}$ 为在第 n 个叉指上加单位电压所产生的电荷分布，那么在其上加上数值为 w_n 的电压 V，所产生的电荷分布就是 $\sigma_n = w_n\sigma_0^{(n)}$，$w_n$ 可称之为权. 由于周期性，无论那一个元加单位电压，其 $\sigma_0^{(n)}$ 都必然是一样的，而仅仅平移一个位置. 设 $\sigma_0^{(0)}$ 为第0个元(在 $x_1=0$ 处)上加单位电压产生的电荷分布，我们设$\sigma_0^{(0)}$所对应的傅氏变换为 $\bar{\sigma}_0^{(0)}(k_s)$，那么根据傅氏变换平移定理

$$\bar{\sigma}_0^{(n)}(k_s) = \bar{\sigma}_0^{(0)}(k_s)e^{-jk_s x_1^{(n)}},$$

其中 $x_1^{(n)}$ 为第 n 个元所处位置，因此

$$\bar{\sigma}_{All}(k_s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{\sigma}_{n(k_s)} = \bar{\sigma}_0^{(0)}(k_s) \sum_{n=-\infty}^{\infty} w_n e^{-jk_s x_1^{(n)}}. \tag{6.3.77}$$

所以由式(6.3.38)得到

$$_sU_m(x_1, x_2) = {}_sG_{m4(x_3)}\bar{\sigma}_0^{(0)}(k_s) \sum_{n=-\infty}^{\infty} w_n e^{jk_s(x_1 - x_1^{(n)})}. \tag{6.3.78}$$

其中，我们称 ${}_sG_{m4}(x_3)\cdot\bar{\sigma}_0^{(0)}(k_s)$ 为元因子；而 $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} w_n e^{jk_s(x_1-x_1^{(n)})}$称为阵因子. 因此，我们得出，在压电晶体半空间上的无限周期叉指

阵，在忽略阵元之间相互作用，采用弱耦合的静电近似下，我们可用一个阵因子和元因子之积来表示。我们已由式(6.3.71)得出元因子 sG_{m4}，而可以证明 $\sigma_s^{(0)}(k_s)$ 是

$$\sigma_s^{(0)}(k_s)=\frac{4(\varepsilon_0+\varepsilon_p^*)}{\Lambda}\cdot\frac{\sin(\pi s_0)}{P_{s_0-1}(-\cos\eta\pi)}P_n(\cos\eta\pi),\quad(6.3.79)$$

其中，n 是$\frac{\Lambda}{2\lambda_s}$的整数部分，$s_0$ 是 $\frac{\Lambda}{2\lambda_s}$的小数部分。

从上面讨论中，我们认为 w_n 是电压数值所加的权。此权也可是由设叉指电极加的电压均是 V，为其加权是其他加权，如正负极性，或指长加权(见 6.5 节)，所形成的加权。那么这个换能器阵的传递函数 $_sU_m/V$。也就是式(6.3.78)。

（二）δ函数模型

这是一种最简单化的模型，它是把每个电极（或空隙）看成一个元，每个元的脉冲响应是一个源。设某叉指换能器有 $2N$ 个元，第 n 个源元有一个权 w_n(包含正负号，见图 6.3.8)，那么该叉指换能器的脉冲响应就是

$$h(t)=C\sum_{n=-N}^{N}w_n\delta\left(t-\frac{x_1^{(n)}}{v_s}\right),\qquad(6.3.80)$$

其中 x_n 为第 n 个元所处的位置，C 为一常数。那么它的频响就是

$$\begin{aligned}H(\omega)&=\int_{-\infty}^{\infty}h(t)\exp(j\omega t)dt\\&=C\sum_{n=-N}^{N}w_n\exp(-jk_sx_1^{(n)}).\qquad(6.3.81)\end{aligned}$$

将它与严格的场模型比较式(6.3.78)可知，其阵因子实质上是一样的(除了一个参考位置，这里令 $x_1=0$)，而元因子此时是常数 C，它与频率、材料特性和取向均无关系。此常数值也就是未知的了。此外，这种简化模型还包括一种含混的假定，即如加上某一电压 V，它的脉响和频响是什么量的响应，这里就含糊地假定为某个量。由于表面波技术中，用的都是两个叉指换能器，一个作发射，一个作接收，这个量经过接收叉指换能器又成为电压。因此，这个

中间量就是含糊地假定，也不影响最终的结果。

在 δ 函数模型中，有时假定在电极边缘有一 δ 源，这种考虑有一定道理. 因为在电极边缘面电荷密度最大，因而有最强的激发源，即由一个δ源，$\delta\left(x-\frac{x_1^{(n)}}{v_s}\right)$，变成二个$\delta$源，$\delta\left(t-\frac{x_1^{(n)}-\frac{d}{2}}{v_s}\right)+\delta\left(t-\frac{x_1^{(n)}+\frac{d}{2}}{v_s}\right)$，那么叉指换能器的脉冲响应是

$$h(t)=C\sum_{n=-N}^{N}w_n\left[\delta\left(t-\frac{x_1^{(n)}-\frac{d}{2}}{v}\right)+\delta\left(t-\frac{x_1^{(n)}+\frac{d}{2}}{v_s}\right)\right]. \tag{6.3.82}$$

那么它们的频响是

$$\begin{aligned}H(\omega)&=C\sum_{n=-N}^{N}w_n[\exp(-jk_sx_1^{(n)})e^{jk_sd/2}\\&\quad+\exp(-jk_sx_1^{(n)})e^{-jk_sd/2}]\\&=2C\cos\left(k_s\frac{d}{2}\right)\sum_{n=-N}^{N}w_n\exp(-jk_sx_1^n).\end{aligned} \tag{6.3.83}$$

因而可见，除了一个公共因子之外，它与单 δ 源是相似的。

(三) 脉冲响应模型

脉冲响应模型可以说是由 δ 函数模型发展起来的. δ 函数模型正好相当于在电极上(或空隙上)用 δ 脉冲取样. 如果我们选取一个连续函数$w(t)$，使得它在 X_n/V_s 处的值 $w(t)|_{t=X_n/V_s}=w_n$，它可近似看成是在某瞬时频率在 0 和 π 时取样. 按照取样定理，此时用连续函数$w(t)$作加权的脉冲响应为

$$h^*(t)=w(t)\exp[j\theta(t)]. \tag{6.3.84}$$

与δ函数模型脉响比较，相当于它的基带响应. 我们就用式 (6.3.84)表示叉指换能器的脉冲响应. 不过在脉冲响应模型发展时，又附加对 $w(t)$ 作了一个进一步的规定. 实际上它是为了使之与下

面所述等效电路模型相一致，即令

$$w(t) = 4K\sqrt{2C_s}f_i^{3/2}(t),$$

即
$$h(t) = 4K\sqrt{2C_s}f_i^{3/2}(t)\exp[j\theta(t)], \tag{6.3.85}$$

其中
$$\theta(t) = 2\pi\int_0^t f_i(\tau)\,d\tau.$$

这里 K 为表面波耦合系数，$2C_s$ 为每对指的电容. 对于 N 对周期均匀叉指换能器，$f_i(t) = f_0$，$\theta_0 = 2\pi f_0 t$，

$$h(t) = \begin{cases} 4K\sqrt{C_s}\,f_0^{3/2}\exp(j\omega_0 t) & |t|<N/2f_0, \\ 0 & |t|>N/2f_0. \end{cases} \tag{6.3.86}$$

那么经过运算，它的频响为

$$\begin{cases} H(\omega) = 2K\sqrt{2C_s f_0}\,N\cdot\dfrac{\sin X}{X}\cdot e^{-jX\pi f/f_0}, \\ X = N\pi\dfrac{f-f_0}{f_0}. \end{cases} \tag{6.3.87}$$

当用单位脉冲激励换能器，它向两边辐射的单位频率的能量为

$$E(\omega) = 2|H(\omega)|^2,$$

而能量是在辐射导上损耗　$E(\omega) = G_a(\omega)$

$$G_a(\omega) = \hat{G}_0\frac{\sin X}{X}, \tag{6.3.88}$$

其中 $\hat{G}_0 = 8K^2(2C_s N^2 f_0)$.

而辐射纳为辐射导的希尔伯特变换，即

$$B_a(\omega) = \hat{G}_0\frac{\sin 2X - 2X}{2X^2} \tag{6.3.89}$$

我们看到，它与下面等效电路模型的结果是完全一致的.

(四)等效电路模型

等效电路模型似乎是从完全不相同的路线提出的，它是以类比体波换能器出发的. 在一维体波换能器中，所谓 Mason 等效电路是一个很有力的分析方法. 它把压电体换能及振动过程，简化成一个六端网络(一对电端，二对力端)，分析起来既方便，又不失

严格性．把等效电路模型，移植过来分析比较复杂的声表面波，乍看起来是很近似的，唯象性质很大，但却获得很大成功．可以说到今天为止，它还是分析叉指换能器和设计声表面波器件的基础．

我们把图 6.3.4 的叉指换能器每个指段(相应 $\Lambda_0/2$) 等效于一所谓交叉场换能器，它的等效电路如图 6.3.8 所示．这时电端端电压为 V_3，流过电流为 I_3；而两力端这时含混地用等效量来表示，分别为 (V_1,I_1) 和 (V_2,I_2)．可以证明这时 V,I 之间的关系用下述导纳矩阵联系起来：

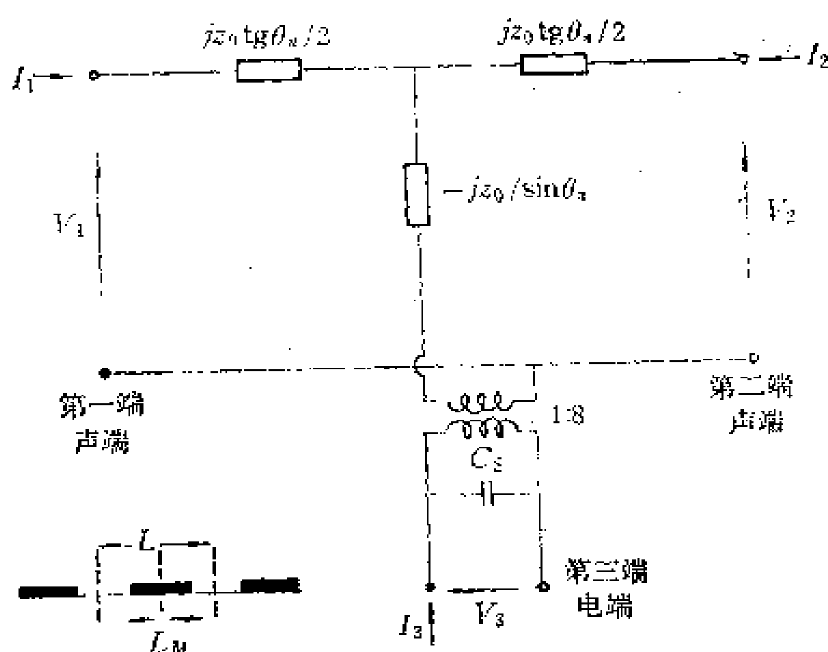


图6.3.8　叉指换能器每个指段的等效电路

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -j\dfrac{1}{z_0}\mathrm{ctg}\,\theta & j\dfrac{1}{z_0}\csc\theta & -j\dfrac{r}{z_0}\mathrm{tg}\dfrac{\theta}{2} \\ j\dfrac{1}{z_0}\csc\theta & -j\dfrac{1}{z_0}\mathrm{ctg}\,\theta & -j\dfrac{r}{z_0}\mathrm{tg}\dfrac{\theta}{2} \\ -j\dfrac{r}{z_0}\mathrm{tg}\dfrac{\theta}{2} & -j\dfrac{r}{z_0}\mathrm{tg}\dfrac{\theta}{2} & j\left(\omega c_s+\dfrac{2r^2}{z_0}\mathrm{tg}\dfrac{\theta}{2}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}, \tag{6.3.90}$$

其中 z_0 是等效特性阻抗；$\theta=\pi f/f_0$，而 f 为信号所施加频率，f_0 为同步频率 $f_0=v_s/\Lambda$，C_s 是等效的一根指的电容，它实际上可以利

用式(6.3.75)求出．可以证明：

$$C_s=\frac{1}{2}w(\varepsilon_0+\varepsilon_p)\frac{K\left(\sin\frac{\eta\pi}{2}\right)}{K\left(\cos\frac{\eta\pi}{2}\right)}, \tag{6.3.91}$$

K 为第一类椭圆积分，$K(x)=\int_0^{\pi/2}\frac{dZ}{\sqrt{1-x^2\sin^2 Z}}$，$r=\sqrt{2f_0c_sk^2z_0}$，而 k 为声表面波的耦合系数，它定义为 $k^2=2\Delta v_s/v_s$，v_s 为自由表面的声表面波的传播速度；而 $\Delta v_s=v_s-v_M$，v_M 为金属化表面的声表面波传播速度，w为指长度

对于一对指，其导纳矩阵是

$$\begin{bmatrix} -j\frac{1}{z_0}\mathrm{ctg}\,2\theta & j\frac{1}{z_0}\csc 2\theta & -j\frac{r}{z_0}\mathrm{tg}\frac{\theta}{2} \\ j\frac{1}{z_0}\csc 2\theta & -j\frac{1}{z_0}\mathrm{ctg}2\theta & j\frac{r}{z_0}\mathrm{tg}\frac{\theta}{2} \\ -j\frac{1}{z_0}\mathrm{tg}2\theta & j\frac{r}{z_0}\mathrm{tg}\frac{\theta}{2} & 2j\left(\omega c_s+\frac{4r^8}{z_0}\mathrm{tg}\frac{\theta}{2}\right) \end{bmatrix}. \tag{6.3.92}$$

对等指长、等间隔、等指宽的N对指的周期阵(图6.3.9)，其导纳矩阵为

$$\begin{bmatrix} -j\frac{1}{z_0}\mathrm{ctg}2N\theta & j\frac{1}{z_0}\csc2N\theta & -j\frac{r}{z_0}\mathrm{tg}\frac{\theta}{2} \\ -j\frac{1}{z_0}\csc2N\theta & -j\frac{1}{z_0}\mathrm{ctg}2N\theta & j\frac{r}{z_0}\mathrm{tg}\frac{\theta}{2} \\ -j\frac{r}{z_0}\mathrm{tg}\frac{\theta}{2} & j\frac{r}{z_0}\mathrm{tg}\frac{\theta}{2} & j2N\left(\omega c_s+\frac{4r^2}{z_0}\mathrm{tg}\frac{\theta}{2}\right) \end{bmatrix}, \tag{6.3.93}$$

对于这样N对等指长均匀周期的叉指换能器，我们根据导纳矩阵(6.3.85)求出它的所谓传递函数(频响)和辐射导纳．设此时在"1"端和"2"端均有阻抗 Z_0，所以"1"端和"2"端是完全相同的．利

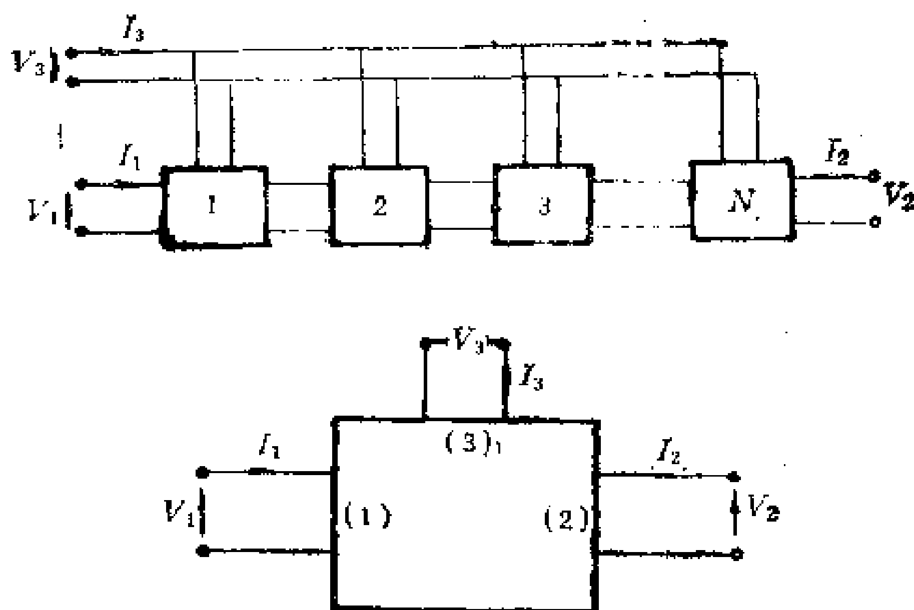


图6.3.9 叉指换能阵等效电路

用此事实，即 $V_1 = V_2$，$I_1 = I_2$，可以求出传递函数(即频响)为

$$\frac{V_1}{V_3} = H(\omega) = jr\left(\mathrm{tg}\frac{\theta}{2}\cdot\sin 2N\theta\right)\cdot e^{-jN\theta},$$

我们知上式中 $\theta = \omega\pi f/f_0$. 设 f 在同步频率 f_0 附近($f = f_0 + \Delta f$，而 $\Delta f/f \ll 1$)，让 $X = N\pi\dfrac{\Delta f}{f}$，则

$$H(\omega) \doteq j2r\cdot\frac{\sin X}{X}\cdot e^{-jN\pi f_0/f} = j2K\sqrt{2c_s f_0 z_0}\,\frac{\sin X}{X}\,e^{-jN\pi f/f_0}. \tag{6.3.94}$$

与脉冲响应模型比较，除了多出一个因子，而引入一个固定相位差(这并不影响结果)外，还相差一阻抗因子 $\sqrt{z_0}$。但这也并不重要，实际上，在脉冲响应模型以及在等效电路模型中并没有说明力端的量代表了什么，故 z_0 也是含混的. 因此相差一个常数 $\sqrt{z_0}$，并不影响实际结果. 我们再来看它的输入导纳表达式，这时

$$Y_{in} = I_3/V_3 = j\omega 2NC_s + G_a(\omega) + j\beta_a(\omega),$$

而

$$G_a(\omega) = 2G_0\left(\mathrm{tg}\frac{\theta}{2}\sin N\theta\right)^2 \doteq G_0\,\frac{\sin X}{X},$$

$$B_a(\omega) = 2G_0\mathrm{tg}\frac{\theta}{2}\left(2N + \frac{1}{2}\mathrm{tg}\frac{\theta}{2}\sin 2N\theta\right)$$

$$\doteq G_0\frac{\sin 2X-2X}{2X^2},$$

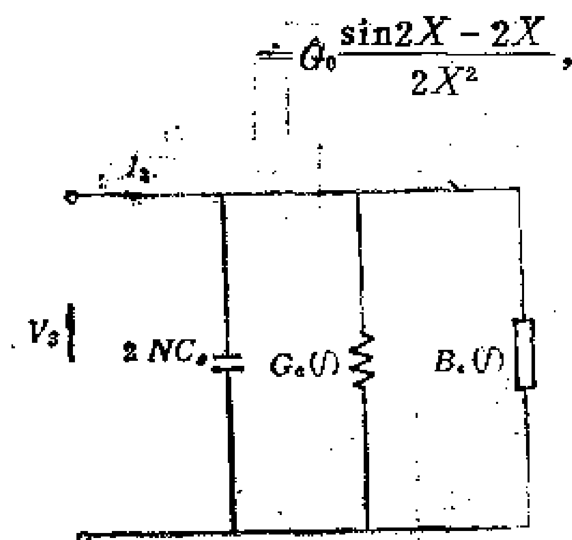


图6.3.10 叉指换能器在同步频率附近的集总参数表示

这个结果与脉冲响应模型一样．利用上述结果，在同步频率$f\doteq f_0$附近，上述等效电路模型可用下述集总参数的等效电路表示（图6.3.10）．

(五)各种模型的比较

从上述讨论，我们知道，对于我们称之为场模型的严格模型而言，虽然讨论比较严格，但在实际设计应用中，由于太复杂而很难运用．但由于是严格的，因而能给出叉指换能器的严格物理图像，也可在简化模型无能为力的地方起作用．如下面我们将要提到，简化模型不能给出谐波工作的结果，那么严格模型原则上仍可以分析．

δ函数模型是简化模型中最简单的一种，因而分析起来最简单，但受的限制也比较多．首先元因子看成是完全等同的，而不论"元"之间的任何差别，如频率与耦合系数的关系，因此我们只能在对带宽不宽的叉指换能器进行估计．其次阵因子之间没有考虑相互作用(即下面我们要谈到二阶效应时的压电再生作用)．

等效电路模型是至今运用比较成功的一种，也是简化模型中较严格的一种．它不但考虑到了元因子的性质，也包括有阵因子之间的相互作用，即压电相互作用，这是与脉冲响应模型不太一样的地方，这在我们考虑外电路有有限负载时将会表现出来．在上述讨论的例子中，没有考虑电负载的影响．但是显然，电等效电路模型，特别是用集总参量表示的等效电路，则外电路的影响的讨论将是变得十分方便，得出许多有价值的结论．

在上述等效电路讨论中，没有考虑电极区和间隙区的阻抗不连续，即声表面波在共同的反射，这时我们改变上述等效电路为下面的等效电路，见图6.3.11．

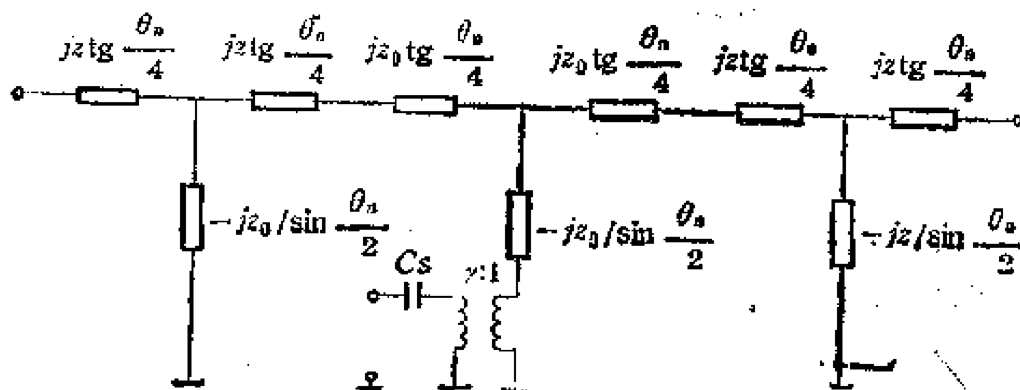


图6.3.11 考虑电极区与间隙区阻抗不连续的等效电路模型

对于这些简化模型的近似性，有两点必须指出：其一不能计算谐波响应，因为在谐波工作时，表面波场的分布与基波不一样，此时应由严格的场模型来讨论；其二，简化模型都是一维的，即认为在表面与传播垂直方向是无限广延的．这在实际器件中不一定正确，这时必须考虑衍射修正，这也是简化模型所无能为力的．

§6.4 声表面波表面结构

在声表面波技术中，叉指换能器是必不可少的最常用结构，因为几乎所有产生和接收表面波，作声电转换都是由叉指换能器来完成的．作为一种横向滤波器，并可方便地进行加权，所以叉指换能器也能完成许多信号处理功能（详见§6.5）．但除此以外，也还有一些表面结构在声表面波器件中被采用，以完成某些特定功能．在这一节中，我们将给以讨论．与叉指换能器一样，声表面波与这些结构的相互作用，或者说在这些结构中，声表面波的传播特性是很复杂的，作严格分析是很困难的，而必须作近似，或作唯象的处理，以便我们能得出一简明的而又大体符合实际的估计．也因此，许多规律不得不以实验结果为依据．

6.4.1 波导

波导是能够约束波并使它沿某种特定的路径进行传输．在

流体中，声波常以固体介质为周界以约束声波．对于固体来说，由于固体介质比之气体介质要大得多，而在固体波导，常以气体为周界，就能很有效地防止声泄漏． 所以实际上，固体声波导，就是有限截面积的，具有一定形状的固体，如线状、棒状、板状等．这些波导，可用于作固定的声延迟线，也可利用其频散性质作色散延迟线，以实现脉冲压缩．

对于声表面波而言，是以慢波结构来形成波导，它的形式是各种各样的．但是实际上应用的，到目前为止仅是金属膜波导．我们在本节中只对金属膜作些唯象分析（实际上这种唯象分析都适合于各种慢波结构的波导），而对其他结构波导，只略提及．各种波导的结构如图 6.4.1 所示．

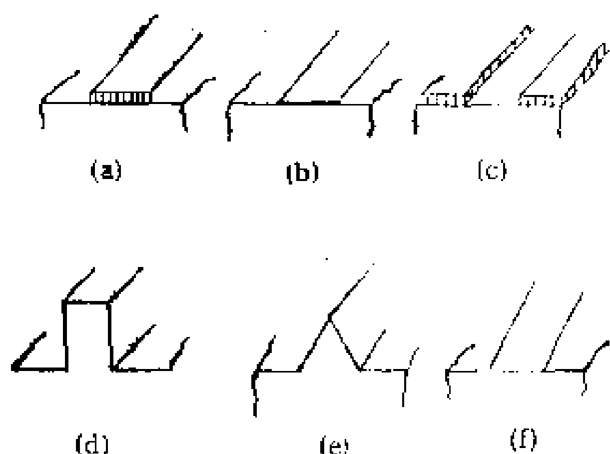


图6.4.1 声表面波各种形式波导结构
(a)条形波导；(b)金属膜波导；(c) 槽形波导；
(d)脊形波导；(e)楔形波导；
(f)扩散及离子注入波导

金属膜波导［图 6.4.1(a)］ 压电晶体的金属化表面上，其表面波传播速度比之自由表面，总是要慢（见§6.1），这可简单考虑为压电短路效应所引起的，因此金属膜条带就可以是慢波结构，而构成波导．这种波导结构很简单，制作方便，它可以与叉指换能器一次构成．由于这种波导依靠压电短路形成，故又称短路条波导，有时又称为 $\Delta v/v$ 波导，它是依靠声速在金属区和自由区速度的差别形成的．

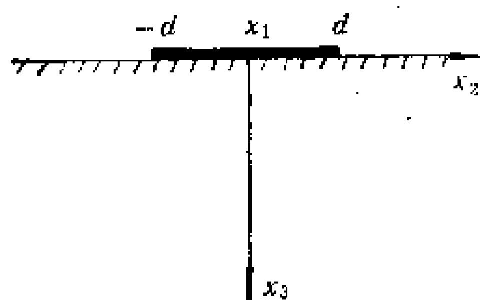


图6.4.2 金属膜波导的坐标

我们让金属膜波导坐标图示于图 6.4.2 中．

若 x 为波导方向，表面法线为 z 方向，波导宽度为 $2d$．我们

设沿波导方向 x 传播的表面波波数为 β，而在金属膜区的波矢为 $\mathbf{K}_S^M$. 我们认为波是沿平面传播的，在 z 方向波矢投影为零，而形式上写成

$$\mathbf{K}_S^M = \beta\hat{x} + K_2^M\hat{y}. \tag{6.4.1}$$

而在自由区的波矢 $\mathbf{K}_S$

$$\mathbf{K}_S = \beta\hat{x} + jK_2\hat{y}. \tag{6.4.2}$$

$\hat{x}$ 及 $\hat{y}$ 为 x 和 y 方向单位矢量，$\mathbf{K}_S$ 在 y 方向分量为虚数，其物理意义是：在自由表面区沿 y 方向传播是凋落的，即在自由区波实际上是沿波导方向或x方向传播的，而波集中在波导附近. 相应这些波矢的模之间有关系

$$\begin{cases}(K_S^M)^2 = \beta^2 + (K_2^M)^2, & (6.4.1a)\\ K_S^2 = \beta^2 - K_2^2. & (6.4.2a)\end{cases}$$

我们考虑在 $y = \pm d$ 处矢量场的匹配，那么有

对称模

$$\frac{K_2}{K_2^M} = \mathrm{tg}(K_2^M d) \tag{6.4.3}$$

如果声表面波在传播平面是各向同性的，或虽是各向异性的，而作各向同性近似处理，那么就可以得到声表面波沿波导的传播速度 $v_G = \omega/\beta$的频散关系为

$$\mathrm{tg}[(K_S^{M^2} - \beta^2)^{1/2}d] = \left(\frac{\beta^2 - K_S^2}{K_S^{M^2} - \beta^2}\right)^{1/2}. \tag{6.4.4}$$

因此有意义的解是 β 满足 $K_S^M > \beta > K_S$. 为保持 $\beta^2 - K^2$ 和 $K_S^{M^2} - \beta^2$ 为正，进而显然偶次模存在的区域为

$$\frac{1}{2}n\pi \leqslant (K_S^{M^2} - \beta^2)^{1/2}d \leqslant \frac{1}{2}\pi(n+1),$$

$$n = 0, 2, 4, \cdots.$$

反对称模式

$$-\mathrm{ctg}[(K_S^{M^2} - \beta^2)] = \left(\frac{\beta^2 - K_S^2}{K_S^{M^2} - \beta^2}\right)^{1/2}. \tag{6.4.5}$$

奇次模存在范围：

$$\frac{1}{2}n\pi \leqslant (K_S^{M^2} - \beta^2)^{1/2} d \leqslant \frac{1}{2}\pi(n+1),$$

$$n = 1, 3, 5, \cdots.$$

所以总起来，第 n 次模式的截止频率满足条件

$$(K_S^{M^2} - \beta^2)^{1/2} d = \frac{1}{2} n\pi, \beta = K_S, n = 0, 1, 2, \cdots,$$

即 $(2d/\lambda_M) = \frac{n}{2K}$，$K$ 为表面波耦合系数.

在一阶模的截止频率，其波导宽度为 $(2d) = \lambda_M/2K$. 对 $LiNbO_3$，$2d = 2.38\lambda_M$；对于 ST-石英，$2d = 12.5\lambda_M$.

对波导来说，还有一个声表面波聚集于波导程度的度量，即声表面波随着离开波导的距离值在基底上的衰减率，衰减得愈快，就意味着愈强的波的聚集，也就是波导与周围的隔离愈好，允许波导有较大的曲率弯曲，而不致有显著的泄漏，这个度量用 K_z/K_s 表示，它可简单地表示为

$$K_z/K_S = \sqrt{\left(\frac{v_s}{v_G}\right)^2 - 1}$$

$$\approx \left(\frac{2\Delta v}{v_G}\right)^{1/2}$$

$$\approx K. \tag{6.4.6}$$

其中 $\Delta v = v_s - v_G$. K_z/K_s 由波导中声速与自由界面声速的相对变化所确定，大致等于耦合系数 K，即材料耦合系数愈大，波导约束程度愈好.

上述的讨论适用于传播界面是各向同性的介质，对传播界面各向异性时，上述讨论只是最粗略的近似，有时需要加以修正，因为此时，在金属膜区，

$$K_S^M = K_S^M(\theta),$$

其中 θ 为波矢 $\mathbf{K}^M$ 与波导方向 x 轴的夹角，即

$$\mathrm{tg}\theta = K_z^M/\beta = (K_S^{M^2} - \beta^2)^{1/2}/\beta. \tag{6.4.7}$$

波沿纯模方向传播时，对一些材料可以采用抛物线近似(§6.2.5)，

即

$$K_B^M = K_B^M(0)\left(1 - \frac{\gamma}{2}\theta^2\right), \qquad (6.4.8)$$

γ为各向异性因子．这样，若 $K_B = K_B(0)$，$K_B^M(0)$ 及d 已知，我们由式(6.4.7)、(6.4.8)以及式(6.4.4)就可以求出波导中传播波矢β来．当然同时也就可以求出θ及 $K_B^M(\theta)$，进而可以得到传播速度的频散关系，以及波导的聚集强度．

但是，对于像YZ-LiNbO$_3$这样的材料，不宜采用抛物线近似，这时就得采用迭代法求出．它先由零级近似式(6.4.8)，并取 $K^M = K^M(0)$，由此得出 $\beta^{(0)}$、$K_B^{(0)}$ 和 $\theta^{(0)}$，再由 $\theta^{(0)}$，从倒速度曲线查出 $K_B^M(\theta^{(0)})$，再求出 $\beta^{(1)}$、$K_B^{(1)}$和$\theta^{(1)}\cdots$，依次迭代，求出精确值．在图6.4.3中给出 YZ-LiNbO$_3$金属膜波导中零次模的频散关系，$K_B/\beta = v_0/v_B$ 与βd关系曲线，理论曲线包括各向同性近似，抛物线近似和精确理论曲线．与实验值比较证明，精确理论符合得最好，但

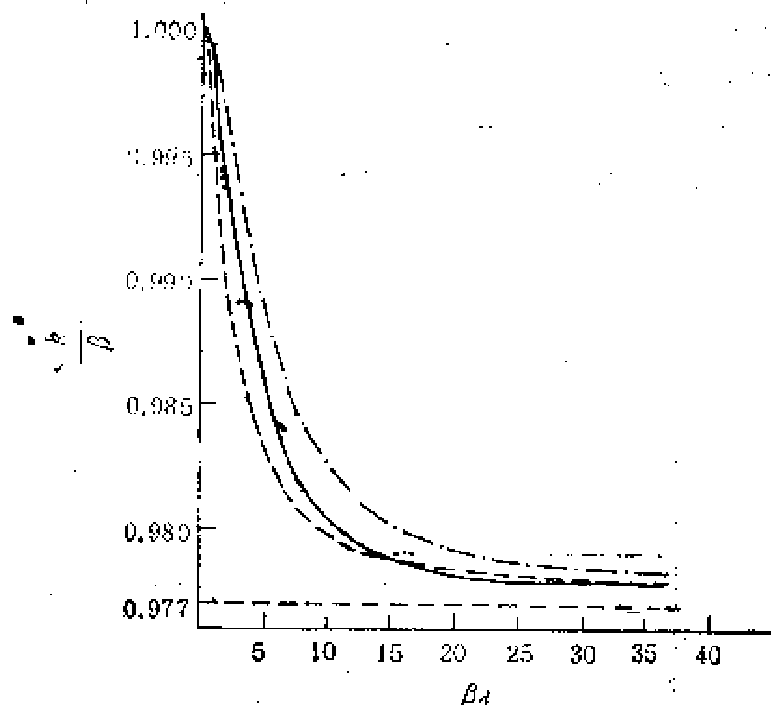


图6.4.3　YZ-LiNbO$_3$上金属膜波导的零次模频散关系

—·—按Huphes理论计算的结果；

----按Coldren修正理论计算的结果；

———本文计算结果；

· · · 测量值

计算复杂.

金属条，除了电短路作用外，多少还有质量负载. 有意义的是，当适当地选择金属膜的厚度，会使在一个宽的频段范围内，群速几乎保持不变，取得频散的补偿.

条状波导[图 6.4.1.(b)] 它是在一个"慢"的材料中以条状沉渍在一个"快"的基底材料上，这很类似于压电基底上的金属膜波导. 不过，在非压电材料上，它也可以有波导功能. 条状波导很类似于光波导：一个介电薄膜条沉渍在一个基底上，此介电膜有较高的折射率. 图 6.4.4 给出在不同的宽度-厚度比情况下，基模的频散特性. 由图可知，在低频，场分散得很远，不集中于波导中，而以瑞利波形式分散在整个基片上，所以，在低频，其传播速度近似于基底上瑞利波速度. 当频率增加时，场更多地聚集在波导区，而传播速度降低. 在很高频率，几乎所有的声场都聚集在波导的条带中，而传播速度趋于在条带材料的瑞利波速度，其声场的横断面的分布如图 6.4.5.

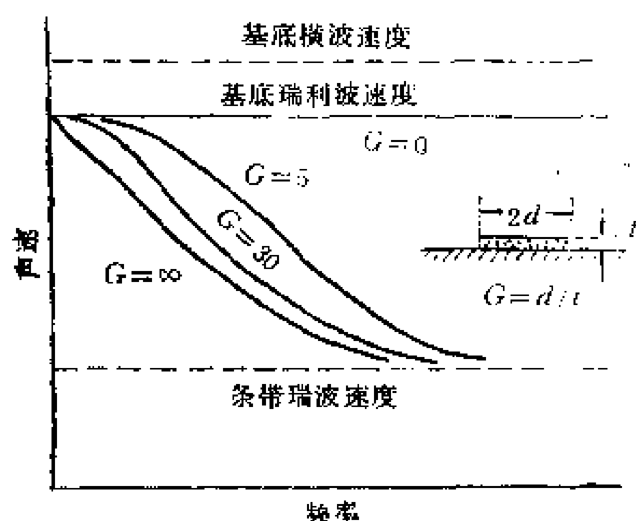


图6.4.4 在不同宽度-厚度比情况下条形波导的基模的频散特性

对于波导的频散等特性，如采用唯象分析，则完全可以参照金属膜的唯象分析形式来进行，比如传播速度的频散关系仍用式 (6.4.4) 表示. 此时金属化表面的传播速度要换成层状结构的广义瑞利波速度.

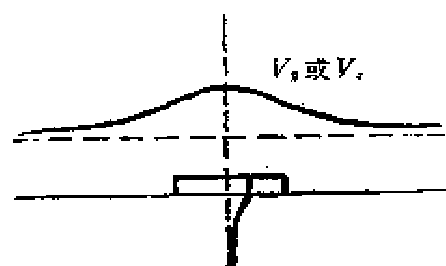


图6.4.5 条形波导声场的横断面分布

槽形波导[图 6.4.1(c)] 它与条带波导相反，覆盖波导区以

外的所有基底上. 与条带波导相反，要求覆盖的材料硬而轻，即是比基底材料声速要“快”，结果，在槽内基底材料的瑞利波速度要比层状结构的广义瑞利波速度慢，其频散特性也可类似前面金属膜或条带波导那样分析. 在低频，声场横向很分散，而且主要渗透到基底材料之中，而使深覆盖层的影响可以忽略，因而在低频时传播速度近似于基底材料瑞利波速度. 当频率增加时，在覆盖层中有声场分布. 由于覆盖层声速快，所以此时波导中声速也增加；而在很高频率时，由于声场都集中到波导的槽中，那么声速又回到基底材料瑞利波速度，因而频散曲线必须通过一个极大值.

脊形波导[图 6.4.1(d)] 它是形貌波导的一种，所谓形貌波

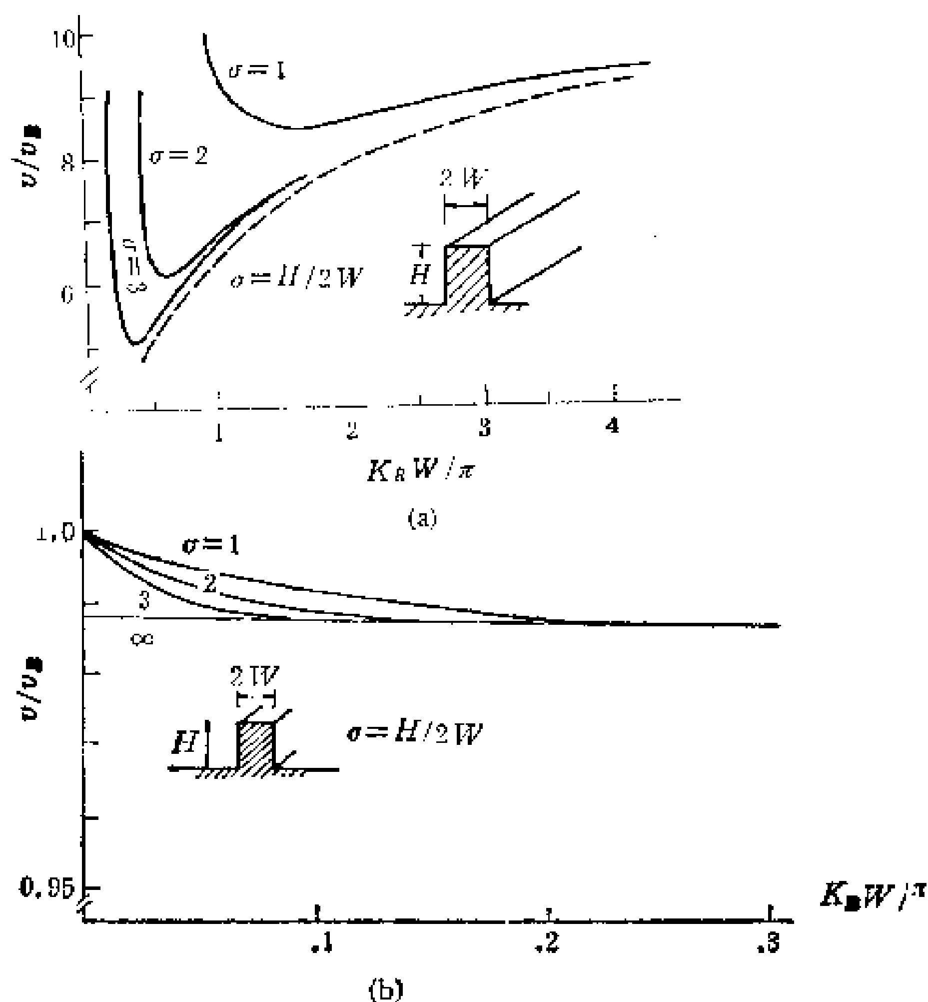


图6.4.6 脊状波导的频散特性
(a)弯曲模式；(b)伪瑞利模式

导是依靠固体表面波导变形而形成的一种波导．脊状波导可以有两种模式，一种是反对称的弯曲模式，这种波导有较大的色散率，但聚焦程度比较强，这种弯曲模式对应于板波（Lamb波）的反对称最低阶的弯曲振动模式，其色散曲线如图6.4.6(a)．另一种是伪瑞利波模式，它是板的最低对称模式和最低SH模式组成，其色散曲线如图6.4.6(b)所示．这种模式，频散很小，而聚焦程度也很强，很适合于作长延迟线．

楔形波导(图6.4.1(e)) 楔形中波的传播速度只依赖于顶角，而与频率无关，因而是不色散的．如在基底平面上形成一个楔形，则在高频时，能量集中楔形波导，而成了楔形中波的传播速度，而在低频时，能量分散到基底中，声速将升高．

扩散波导和离子注入波导 用扩散或注入的方法，使离子进入到基底材料而形成波导，而基底仍保持平的．由于离子的进入，改变了基底材料的速度，其变化在1－2％左右，这种波导也可采用唯象分析方法，类似金属膜波导那样分析．离子注入的同时会引起损耗，目前Ti扩散约$LiNbO_3$材料在集成声光器件中得到应用，但是这里主要为了形成导光波．不过声表面波在其中传播时，声速要变化．

最后，我们由表6.4.1给出这样一些不同类型的特性简要总结

表6.4.1 各种波导特性综合

波导类型	声的聚集成度	声速减慢	频 散	损 耗
金属膜(短路条，$\frac{\Delta V}{V}$)波导	弱	小	低	低到中等
条状波导	中等	中等	中等	中等
槽状波导	弱到中等	小到中等	低	低到中等
脊状波导(弯曲膜)	强到很强	中到大	高	低
脊状波导(伪瑞利模)	很强	小	很低	低
楔状波导	很强	中到很大	很低到零	低

6.4.2 条带耦合器

波导中，场的分布除聚集在波导内，在波导外也有场的分布．

如果在其邻近平行放置另一波导，则场能够逐步转移到第二个波导中去，这就是所谓波导耦合，因而就能实现波束的转移．在声表面波中当然可用上述声表面波波导来实现声束的转移，但是在压电介质中，声表面波可以用另外简单的方式实现波束转移．如图6.4.7 (a) 所示，一发射换能器发射一声束，当它到达接收换能器

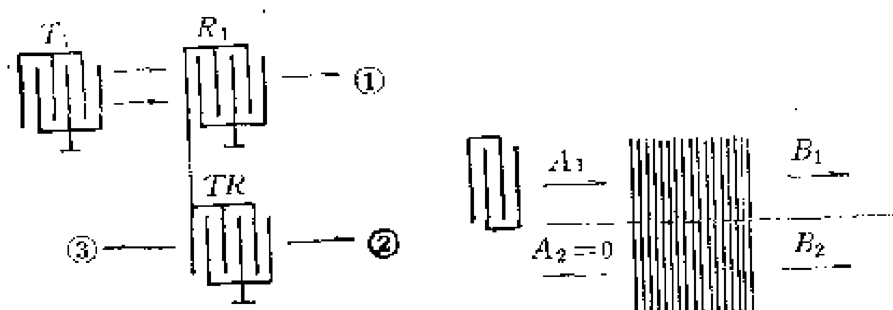


图6.4.7　多条带耦合器原理结构

(a)用二个叉指换能器接连方法实现声表面波的部分转移；(b)多条带耦合器的基本结构

时，由声电耦合变成电场的分布，一方面它又重新发射声波，另一方面又通过导电条，在另一“转移”换能器上产生一个电场分布，它又能发射出声波，这就很简单地实现了声表面波场的部分转移．

进而，我们可用由上面结构变形而来的、一个更为简单的方式来实现声束转移，这就是图 6.4.7(b) 的条带耦合器结构，简称MSC(Multistrip Coupler)．一个声束正入射到条带耦合器上半部(上迹)，在金属条带上，由于是开路栅，要保持电势为常数和总电荷为零(没有电流流入或流出金属条带)，那么就会在下半部形成一个电场分布，从而产生声表面波．

我们先来作唯象分析，假定声束进入上半通道，其声束分布，在上半通道(上迹)有幅度为 A_1，而在下半通道(下迹)幅度 A_2 为零．如果我们将条带耦合器也视为一波导，这种声束分配情况，如图 6.4.8 所示，可视为一个偶对称模和一个奇对称模叠加，它们幅值均为 $A_1/2$．在条带耦合器的输入端，这两个模式在上通道是同相的，幅度相加，成为 A_1；下通道，是反向的，幅度对消，成为零．如果这两种模式传播速度略为有些差别，那么在传播一定距离 L_T 之后，在上通道这两个模式是反相，差一个相位 π 而相消，振幅为

零. 那么在下通道，这两个模式就是同相而叠加，振幅为 A_1. 最终振幅分布，就由上通道转移到下通道，其输出 $B_2=A_1$，而实现全转移. 显然，全转移的长度 L_T 可如下定出. 设偶对称模的声速为

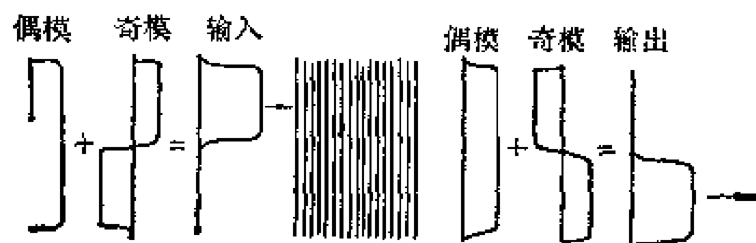


图6.4.8 全转移多条带耦合器

v_e，奇对称模为 v_0，那么

$$\left|\frac{\omega}{v_0}-\frac{\omega}{v_e}\right|L_T=\pi,$$

使得：

$$L_T=\frac{1}{2f}\cdot\frac{v_0v_e}{v_e-v_0}.$$

如果 $v_e-v_0\equiv\Delta v$，而 $\Delta v/v_e\ll1$，那么

$$L_T=\lambda\left(\frac{v}{2\Delta v}\right).$$

接着我们来作一个较一般的分析，讨论波在条带耦合器的振幅及相位关系. 设在 x 处的上下两通道的复振幅为 $A_1(x)$ 和 $A_2(x)$，它可写成

$$\begin{cases}A_1(x)=C_ee^{jK_ex}+C_0e^{-jK_0x},\\A_2(x)=C_ee^{jK_ex}-C_0e^{-jK_0x},\end{cases}\tag{6.4.11}$$

或

$$\begin{cases}A_1(x)=e^{j[(K_e+K_0)/2]x}\left(C_ee^{j[(K_e-K_0)/2]x}+C_0e^{-j[(K_e-K_0)/2]x}\right),\\A_2(x)=e^{j[(K_e+K_0)/2]x}\left(C_ee^{j[(K_e-K_0)/2]x}-C_0e^{-j[(K_e-K_0)/2]x}\right).\end{cases}$$

(6.4.11a)

由于我们主要的兴趣是在经过一段距离之后、上下两通道之间振幅和相对位相的关系，于是可以忽略公共的延时相位 $e^{j[(K_e+K_0)/2]x}$.如果让输入端 $x=0$，

$$\begin{cases} A_1 = A_1(0) = C_e + C_0, \\ A_2 = A_2(0) = C_e - C_0, \end{cases} \tag{6.4.12}$$

那么经过 x 距离后，输出端

$$\begin{cases} B_1 = A_1(x) = C_e e^{j[(K_e+K_0)/2]x} + C_0 e^{-j[(K_e+K_0)/2]x}, \\ B_2 = A_2(x) = C_e e^{j[(K_e+K_0)/2]x} + C_0 e^{-j[(K_e-K_0)/2]x}. \end{cases} \tag{6.4.13}$$

这时上两个模式的相移为

$$\phi = (K_e - K_0)x = \frac{\pi}{L_T}\cdot x \ (L_T\ \text{为全转移长度}). \tag{6.4.14}$$

最后我们有

$$\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\phi/2) & -j\sin(\phi/2) \\ -j\sin(\phi/2) & \cos(\phi/2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}. \tag{6.4.15}$$

如果输入端上有一个上通道有输入，即 $A_2 = 0$，则

$$\begin{cases} B_1 = A_1\cos(\phi/2), \\ B_2 = -jA_1\sin(\phi/2). \end{cases} \tag{6.4.16}$$

显然由上式，B_1 和 B_2 随 ϕ 而变，即随条带耦合器长度而变，如果不考虑传播时的损耗，其幅度就交替变化，如图 6.4.9 所示.

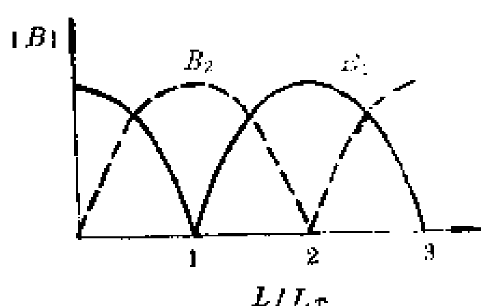


图6.4.9 条带耦合器两输出通道的输出幅度随耦合长度的变化

全转移的多条带耦合器 如前所述，$\phi = \pi$，条带耦合器长度为 L_T 时，就能构成束的全转移. 全转移的多条带耦合器，可以使束变迹，这在抑制体波方面可以得到应用. 叉指换能器既发射表面波，也发射体波，经过底面反射，可以到达接收换能器，形成干扰. 用条带耦合器可使表面波变迹，而不能使体波变迹. 如果接收叉指换能器放在变迹后通道，那么干扰的体波就收不到了. 此外它还可以解决叉指换能器中小孔径叉指衍射造成信号畸变. 衍射虽然可以进行补偿，但设计比较复杂. 一个简单方法就是把由小孔径叉指发射的声束，通过条带耦合器后，让其变成宽声束，从而减少了衍射效应造成的影响.

部份转移的多条带耦合器 选择耦合器的长度，可以实现声束能量从一通道到另一通道的部分转移. 对其中最重要的半功率转移的多条带耦合器，即等功率分配多条带耦合器，$\phi=\pi/2$，因此，

$$\begin{cases} B_1 = A_1/\sqrt{2}, \\ B_2 = -jA_1/\sqrt{2}. \end{cases} \tag{6.4.17}$$

用它可以作为全反射器，其形式是将等功率分配多条带耦合器，折成两半，中间有连接条连接起来，如图 6.4.10(a) 所示. 作为全反射器，要使 $B_1=A_1$ 及 $B_3=0$，我们来看它是如何实现这种全反射

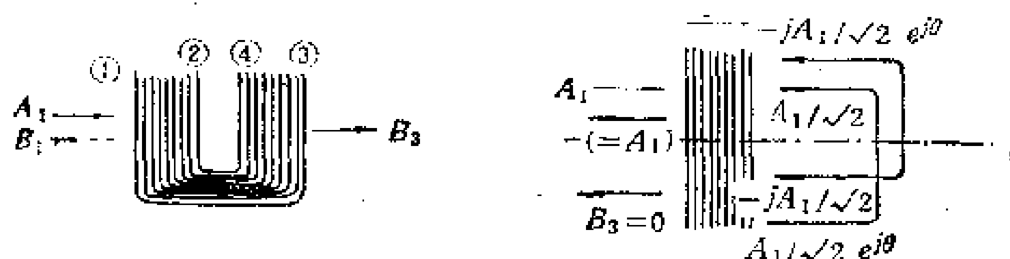


图6.4.10 条带耦合器反射器
(a)多条带耦合器反射器；(b)等效的展开结构

功能的. 为了分析方便起见，我们用它等效的展开结构来分析. 在①有输入 A_1，由半功率转移，在②的输出为 $A_1/\sqrt{2}$，在④的输出为 $-jA_1/\sqrt{2}$，而在②的输出经过相移θ到达④为 $e^{j\theta}A_1/\sqrt{2}$，再半功率分配到①和③，在④的输出类似于②一样. 总起来，在 B_1 和 B_3 的输出显然由耦合方程(6.4.16)出发，可以写成

$$B_1 = -\frac{j}{\sqrt{2}}\left(e^{j\theta}\frac{A_1}{\sqrt{2}}\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-je^{j\theta}\frac{A_1}{\sqrt{2}}\right) = -je^{j\theta}A_1,$$

$$B_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{j\theta}\frac{A_1}{\sqrt{2}}\right)-\frac{j}{\sqrt{2}}\left(-je^{j\theta}\frac{A_1}{\sqrt{2}}\right)=0. \tag{6.4.18}$$

我们这种结构构成了一个理想反射器，但是由于金属条的欧姆电阻以及在弯折部分引起的损失，故反射损失在带宽 60% 范围可小于 2dB.

全反射器的利用，可使普通叉指换能器（即双向换能器）变成

单向换能器，减小 3dB 的插损. 把多条带耦合器反射器放在叉指换能器一边，即可构成单向换能器. 而实际上还可专用更紧凑的结构实现单向换能器，如图 6.4.11(a) 所示，即一叉指换能器放置在多条带耦合器反射器的当中即可，我们用其展开图来分析[图6.4.11(b)]，看 B_1 和 B_3 发射的情况：

$$B_1=\frac{A_1}{\sqrt{2}}(e^{j\theta_1}-je^{j\theta_2}),$$

$$B_3=\frac{A_1}{\sqrt{2}}(e^{j\theta_2}-je^{j\theta_1}). \tag{6.4.19}$$

如果让 $\theta_1-\theta_2=\frac{\pi}{2}$,

则

$$\begin{cases}B_1=e^{j\theta_1}\sqrt{2}A_1,\\ B_3=0,\end{cases} \tag{6.4.20}$$

于是就建立了理想的单向换能器. 由于叉指换能器可双向发射，每边功率正比于 A_1^2，两边为 $2A_1^2$，而作成单向结构后，整个功率为 $B_1^2=2A_1^2$.

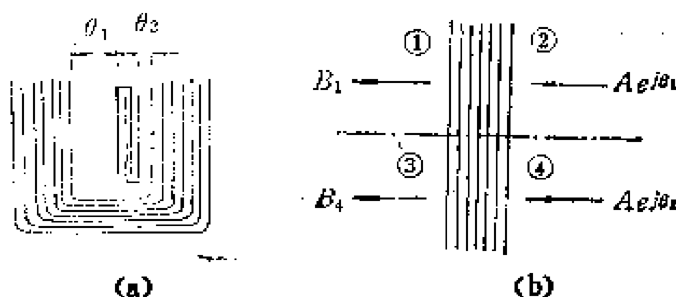


图6.4.11 单向换能器
(a)结构；(b)展开图

利用一个等功率分配多条带耦合器与两个多条带耦合器全反射器结合，就可实现变迹全反射器，如图 6.4.12 所示. 这时

$$B_2=\frac{A}{\sqrt{2}},$$

$$B_4=j\frac{A_1}{\sqrt{2}},$$

而

$$
\begin{cases}
B_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{A_1}{\sqrt{2}}\right) - \dfrac{j}{\sqrt{2}}\left(-j\dfrac{A_1}{\sqrt{2}}\right) = 0, \\
B_3 = -\dfrac{j}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{A_1}{\sqrt{2}}\right) + \dfrac{1}{2}\left(-j\dfrac{A_1}{\sqrt{2}}\right) = -jA_1.
\end{cases}
\tag{6.4.21}
$$

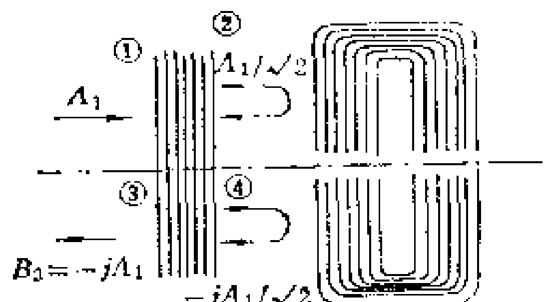


图6.4.12　反射变速多条带耦合器

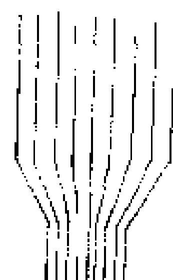


图6.4.13　用于声束压缩的多条带耦合器

因此声束得到反射，而且变了通道，这种结构可在50%带宽内插损小于 3dB.

不对称的多条带耦合器　如图 6.4.13 所示，不对称的结构可以实现束压缩，即宽的声束进入多条带耦合器的宽的通道，由窄的通道输出．把条带耦合器看成由两个不同宽度波导组成，由于波导的频散效应，其传播速度会有变化(其变化不大)．为了得到匹配，我们将窄通道的条带周期变小，通常约为 1 %左右．对于不对称结构的全转移的条带数 N_p 为

$$
N_p = N(\rho^{1/2} - \rho^{-1/2})^2, \tag{6.4.22}
$$

其中N为普通对称的多条带耦合器的全转移的条带数，ρ 为压缩比，即宽通道与窄通道孔径比．这种结构使宽声束压缩成窄声束，从而将功率密度提高.

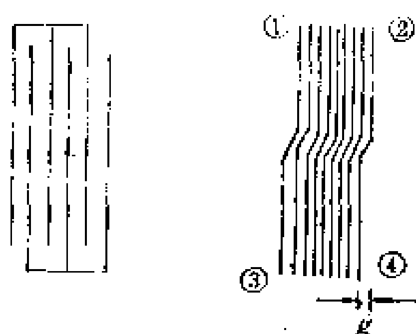


图6.4.14　弯折错开的多条带耦合器

弯折的多条带耦合器　如图6.4.14 所示，它是等功率分配器的多条带耦合器，让其弯折错开后，就可实现频率多路功能．其原理如下：如果让一换能器反射声的幅度上下均为 A，则

在输入端①和③，

$$A_1 = A, \quad A_3 = Ae^{-j\theta}.$$

这里$\theta = \left(\frac{2\pi f}{v}\right)g$，$g$ 为错开的距离．由梅森方程(6.4.16)出发，在输出端②和④得到

$$\begin{cases} B_2 = \frac{A}{\sqrt{2}}(1 - je^{-j\theta}), \\ B_4 = \frac{A}{\sqrt{2}}(e^{-j\theta} - 1), \end{cases} \tag{6.4.23}$$

$$\begin{cases} |B_2|^2 = A^2(1 - \sin\theta), \\ |B_4|^2 = A^2(1 + \sin\theta). \end{cases} \tag{6.4.24}$$

上式显然，当$\theta = \frac{\pi}{2}$时，$|B_4|^2 = 2A^2$，$|B_2|^2 = 0$，反之当 $\theta = 3\pi/2$ 时，$|B_4|^2 = 0$，$|B_2|^2 = 2A^2\cdots$，所以 θ 每变化一个 π，频率就变化

$$\delta f = \frac{1}{2}\frac{v}{g} = \frac{1}{2\tau} \tag{6.4.25}$$

(τ为错开距离 g 的声时延)，声束变迹一次，这样就可以实现频率多路器的功能．图6.4.15就是一个两级多路器，在频率190—232MHz，通道间隔 8MHz，每个通道插损 10dB，旁瓣为 -13dB，显然多路器只能实现通道初步隔离．

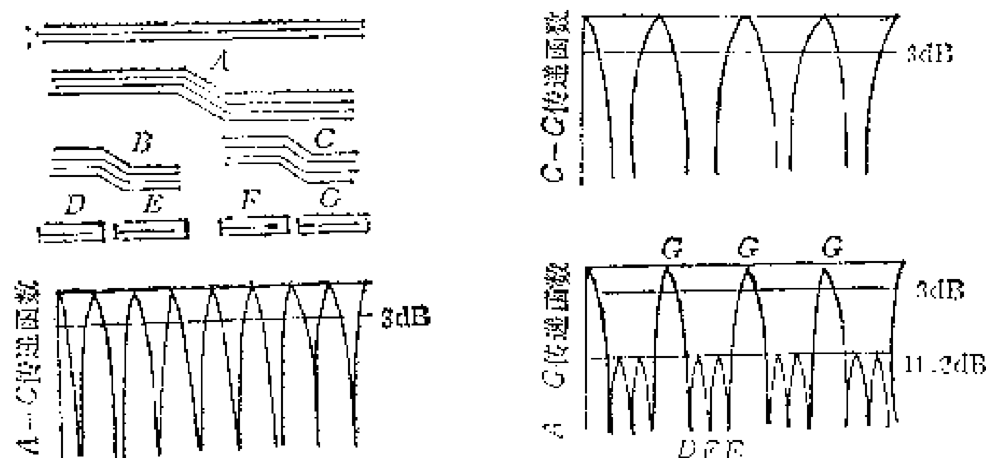


图6.4.15　四通道多路器结构及其传输系数

6.4.3 反射栅阵

如前所述，叉指换能器是一种分布式结构(周期性的或按某种规律空间分布的)，可以看成一种横向滤波器，而对于表面栅阵结构，对声表面波周期性不均匀性(或按某种规律分布)的分布式结构来讲，可以利用它对声表面波的反射特性，起到一种横向滤波器的作用.

(一)反射栅阵的各种类型

(i) 沟槽反射栅阵　如图 6.4.16 所示，它是用离子束轰击压电晶体表面，形成周期性或按一定规律分布的沟槽，它对声表面波

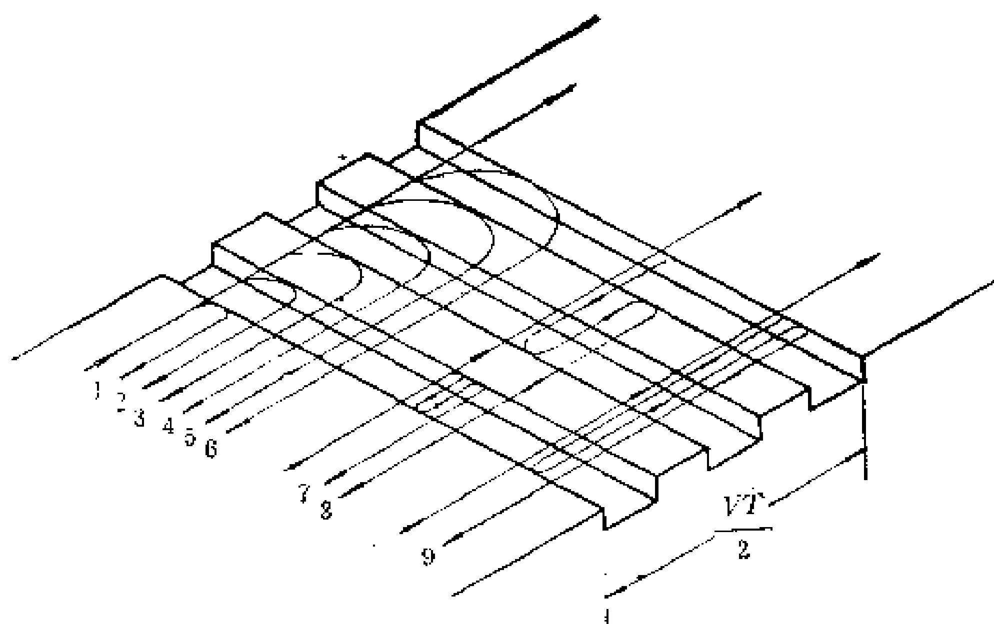


图6.4.16　沟槽反射栅阵

的扰动，是由于几何上突变而造成的，这种扰动有时称之为"形貌"扰动. 沟槽的形状近似矩形，深度通常比之波长要小许多，比如百分之几个波长，这样它对于表面波的扰动是小的，即每根栅上的反射是小的. 但利用分布式栅条众多的特点，可以获得"相干"的反射. 这种沟槽的反射系数是正比于槽深的，因而可改变槽深，进行加权.

沟槽反射栅，有很优异的特性(详见下面分析)，声表面波通过浅沟槽时，在一级近似下，只有反射，而前向散射为零. 这意味着

对声表面波，除了由于存在反射而形成振幅的衰减以外，不会造成其它扰动，如相速的变化．从而不会引起频散．这对于器件设计来说是十分重要的．另外由于对声表面波的反射是几何上的，因而不会象下述的金属栅阵那样，由于工艺上难免形成的断路或短路，造成性能上的变化．在沟槽栅阵上，局部由于工艺上引起的缺陷，仅引起局部特性的差异，不会造成整个栅阵的特性变坏．这些优异的特性，用它构成器件，比起用叉指换能器件或金属条栅阵来，很接近于理想的响应，从而能构成性能卓越的器件．因而在反射栅器件中，使用的绝大部分都是沟槽反射栅器件，其它反射栅器件使用的很少．在下一段中，我们将着重介绍它的特性．

沟槽反射栅的缺点是工艺上所需要的离子束工艺，所以制作比其它栅阵要复杂．

(ii) 金属（条）栅阵　它是由金属栅条构成，金属栅阵很类似叉指结构，它分短路栅和开路栅两种．

短路栅阵　它是由于在金属条区和空隙区的声速不一致而形成反射的，因而它也可以称之为$\Delta v/v$栅阵．在金属条区取金属化表面声速（在金属条区电位保持为零），而在间隙区取自由表面的声速，但是经过比较严格的分析表明，它并非如此简单．简略说起来，金属条区电势的分布，深入到空隙区，因此它的反射系数，对四分之一波长的金属条比$\Delta v/v$要大；另外对于这种栅阵，声表面波通过栅阵时要发生声速的变化，这是因为就是在一级近似下，声表面波在栅条的前向散射也不为零，因而这种特性上的缺陷限制了它的广泛应用，用它不易作出性能优异的器件．另外，如前所述，工艺上出现的断指，将影响器件的性能．对于这种栅阵的加权，要依靠指宽加权，但这种加权，其加权范围较小，工艺也较难控制．

开路栅阵　当一个入射表面波与栅阵相互作用时，每个栅条的电位要求相等，但是各个栅条的电位可以不相同．由于每个栅条是孤立的（即电开路的），所以条的总电荷是不变的．

金属栅阵的优点是工艺简单，它与印制叉指换能器时，用同一次光刻镀膜过程来完成．

对于上述三种栅阵，在一些压电材料基底上，测得每个栅条的反射系数如表 6.1 所示.

表6.1 每根栅条的反射系数

YZ-$LiNbO_3$上短路栅	0.018
YZ-$LiNbO_3$上开路栅	0.011
YZ-$LiNbO_3$上沟槽	$0.67 \cdot h/\lambda_0$
ST-石英上沟槽	$0.62 \cdot h/\lambda_0$

必须说明的是，对有些弱耦合材料，金属栅阵的反射机理可能不单是压电耦合引起的，这时金属条的质量负载也起重要作用. 事实上，如同波导情况一样，在基底上，设法覆盖一系列栅条也可以构成栅阵. 不过这种栅阵，工艺上作起来(包括要考虑加权)比较复杂. 曾经也有人用离子注入的方法形成栅阵，但到现在几乎没有实用过.

(iii) 金属点阵　这时每个栅条，用一系列金属点所组成. 它可以是由金属点的质量、或者压电短路效应、形成对表面波的散射. 金属点的密度形成加权，本来对于圆点散射体来讲，如果其尺度比波长小得多，可以认为在各方向有均等的散射，但是，用这一排排点状栅条构成栅阵，在特定方向上，其散射场相互叠加，而在其余方向相消，从而可以形成在特定方向的反射栅阵. 当然也可以控制点的形状，如长方形点，用以增加所需的特定方向的散射.

金属点阵加权比较方便，但插损较大，而且在工艺上由于光刻的过刻蚀和欠刻蚀，不易控制金属点的尺寸和厚薄，从而较难保证器件性能，所以也没有怎么实用.

(二)沟槽反射栅的分析

栅阵与声表面波的相互作用是异常复杂的，分析起来也很困难. 在本段里，我们将分析目前最实用且性能优良的沟槽反射栅的单一栅条对声表面波的散射特性这一基本问题. 我们假定表面波是一维的平头波，同时栅条也是一维无限广延的矩形浅沟槽. 我们先讨论正入射的情况，如图 6.4.17 所示. 一入射声表面波 $\{u_1^{(0)}, u_2^{(0)}, u_3^{(0)}, \phi^{(0)}, \bar{\phi}^{(0)}\}$[上方(0)表示入射场，用以区别下面的散射

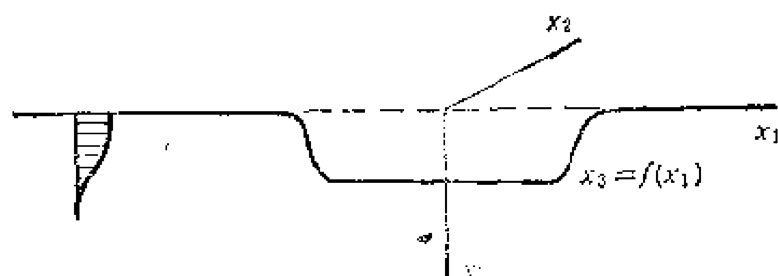


图6.4.17 压电晶体表面单一沟槽对声表面波的散射

场],它们分别满足方程(6.2.39)和(6.2.42). 此表面波入射到形状为 $x_3=f(x_1)$ 的构槽时,将受到由于地形上的突变,而引起散射,此散射场将包括散射表面波和散射的体波. 散射场将仍满足在压电介质的耦合波方程 (6.2.31) 及 (6.2.32). 在考虑此散射过程时,可以认为入射表面波在此沟槽 $x_3=f(x_1)$ 表面"被迫"满足自由表面的边界条件,即应力为零和电位及法向电位移连续. 那么,我们也可以认为在表面上不存在沟槽,仍为平表面,除传来的入射声表面波外,在表面还存在一力的和电的微状分布,它在原沟槽的表面 $f(x_1)$ 上产生某种应力和电的分布,这种分布与入射表面波在此沟槽表面 $f(x_1)$ 上产生的力和电的分布,满足自由表面的边界条件,而正是这个虚拟的表面力源和电源分布扰动产生了散射场. 于是我们就将这样一个散射问题转化成表面激发问题 (§6.3). 我们作小参数微扰展开,忽略高阶项,仅取一次项,可以证明,在 $x_3=0$ 的平面上造成散射场一阶微扰应力和电场为

$$\begin{cases}T_{3j}^{(1)}=rT_{1j}^{(0)}-\sigma T_{3j}^{(0)},\\ D_3^{(1)}-\hat{D}^{(1)}=r(D_1^{(0)}-\hat{D}_1^{(0)})-\sigma(D_3^{(0)}-\hat{D}_3^{(0)}),\\ \phi^{(1)}-\hat{\phi}^{(1)}=-\sigma(\phi_2^{(0)}-\hat{\phi}_2^{(0)}),\end{cases}$$

其中 $r=df/dx_1$,$\sigma=f\cdot\dfrac{\partial}{\partial x_3}$.

根据§6.3中求表面激发问题的相同程序,可以最终求得散射场的积分解,它也可写成类似于式(6.3.21)的 Green 函数形式:

$$u_m^{(1)}(x_1,x_3)=\sum_p^4\int_{-\infty}^{\infty}G_{mp}(x_1-x_1',x_3)T_p^{(1)}(x_1',0)\,dx_1,\quad(6.4.26)$$

而广义力 $T_p^{(1)} = \{T_{31}^{(1)}, T_{32}^{(1)}, T_{33}^{(1)}, (D_3^{(1)} - \hat{D}_3^{(1)}) + \varepsilon_0 H_1(\phi^{(1)} - \hat{\phi}^{(1)})\}$，

(6.4.27)

其中广义 Green 函数 G_{mp} 由(6.3.22)式确定。

散射场的散射表面波，同§6.3 中一样，是 (6.4.26) 式中 Green函数极点，$\beta = \pm \mathrm{k}_s$的贡献，其表达式中类似于式 (6.3.27)，$\beta = +\mathrm{k}_s$为前向散射，可以证明此时为零.这表明，在一级微扰动近似下，浅沟槽不改变通过它的表面波的速度. $\beta = -\mathrm{k}_s$，表示为反射的声表面波. 可以证明反射表面波与人射表面波存在下述关系：

$$\frac{u_j^{(1)}(x_1,0)}{(u_j^{(0)}(x_1,0))^*} = \frac{\bar{G}_1(-\mathrm{k}_s)}{(G_1(k_s))^*}, \tag{6.4.28}$$

"*"表示共轭值，而

$$\begin{cases} \bar{G}_1(-k_s) = j\sum_m^4 \dfrac{W_{1m}(-k_s)\bar{T}_m^{(1)}(-k_s)}{\left[\dfrac{d}{d\beta}\det\Pi\right]_{\beta=-K_s}}, \\ G_1 = C_1. \end{cases} \tag{6.4.29}$$

由于迄今所有反射系数的测量，都是基于电子学技术，所以反射系数定义为

$$R = \phi^{(1)}(x_1,0)/\phi^{(0)}(x_1,0), \tag{6.4.30}$$

它的幅值和相位为

$$\begin{cases} |R| = |\bar{G}_1(-k_s)/G_1(k_s)|, \\ \mathrm{Arg}(R) = \mathrm{Arg}(\bar{G}_1) - \mathrm{Arg}(G_1^*) - 2\mathrm{Arg}\,\phi^{(0)}(x_1,0). \end{cases} \tag{6.4.31}$$

对于宽为 $2a$，深为 h 的方槽，可以证明此时 $\bar{T}_m^{(1)}$ 都含有一个 $F(-k_sa)$ 的因子：

$$F(-k_sa) = h/k_s\sin(2k_sa). \tag{6.4.32}$$

当 $2k_sa = \pi/2$，即 $2a = \lambda s/4$ 时，反射有极大值，这时反射系数正比于h/λ_s. 对于YZ-LiNbO$_3$，$|R| = 0.62h/\lambda s$，ST-石英为$|R| = 0.61h/\lambda_s$，它们与实验结果都是较符合的(参见表1).

在散射场中，还有散射体波，这也可以利用 6.3 节中激发的体波的结果进行分析，这里从略.值得提出的是，比如对YZ-LiNbO$_3$，

此时散射的体波能量比反射的表面波的能量要大一个数量级以上.

对于声表面波斜入射到表面沟槽，也可以进行类似的研究分析，不过更为繁杂和困难. 这里需要指出，对于各向异性介质，其反射定律——Snell定律必须满足，因而入射波波矢 k_s 在沿沟槽方向的投影，与反射波矢 k_s' 的投影相等(如图所示)，即

$$k_S\sin\theta = k_S'\sin\theta' \qquad (6.4.33)$$

比如，对于在YZ-$LiNbO_3$上入射的声表面波，要让反射的声表面波在 YX 方向上，那么此时 $\theta = 46.82°$. 另外，在反射系数中都含一个因子 $F(k_l - k_l')$，

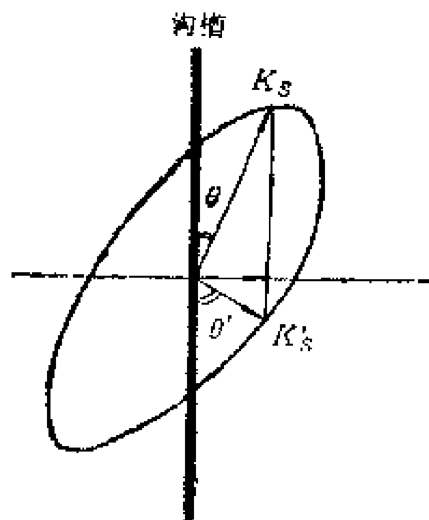


图6.4.18 各向异性介质的Snell定律

$$F(k_1' - k_1) = \frac{2h}{k_1 - k_1'}\sin[(k_1 - k_1')a], \qquad (6.4.34)$$

其中 k_1 和 k_1' 为入射波和反射波在沟槽法线方向上的投影，即 $k_1 = k_S\cos\theta, k' = k_S\cos\theta'$. 显然反射极大时，$(k_1 - k_1')a = \pi/2$，也就是说，此时，

$$(2a) = \frac{1}{2}\frac{1}{\frac{\cos\theta}{\lambda} - \frac{\cos\theta'}{\lambda'}}.$$

对于各向同性介质，$\cos\theta = -\cos\theta'$，$\lambda = \lambda'$，则为 $2a = \frac{\lambda}{4}\frac{1}{\cos\theta}$. 如为直角反射，$\cos\theta = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}/2$，则 $2a = \sqrt{2}\frac{\lambda}{4}$；正入射时，无论对各向同性介质或各向异性介质，均有 $2a = \lambda/4$，这在器件设计上是重要的.

上面我们考虑的是一级微扰近似下求得的结果. 实际上，在高阶近似下，声表面波的速度还是有变化的，这可以解释为所谓储

能效应，即声表面波在不平表面传播所造成的声速减慢．它可类比于一个传输线与一个电容并联，电容的储能效应使波在此传输线形成波速的减慢．在沟槽边缘附近的波动，仅仅考虑散射声表面波和散射体波，还不能满足此处的边界条件，还需要考虑一个非传播的体波模式，才能满足该处的边界条件．测量结果和计算结果近似证明，高阶项对反射系数的影响正比于 $(h/\lambda_s)^2$．对 YZ-$LiNbO_3$，比例系数约为42，这里对于浅沟槽 $h/\lambda_s \doteq 0.01$，大致引起的速度扰动为 10^{-3}．

(三)栅阵的特性

我们已经分析了单一栅条对声表面波的散射行为，接着理应分析表面波通过一个栅阵时的行为，但这种分析更为困难，目前只能用一些唯象的理论来讨论．在这些讨论中，我们考虑散射场中只有表面波．这在一般情况下，根据我们在上一段的分析，并不是正确的，因为对单一栅条而言，可能散射的体波比散射的表面波还要大．但是如果栅阵是个周期栅阵，而且栅阵的所谓 Bragg 频率与入射波的频率相近，即栅阵的周期等于入射波波长之半时，那么反射的声表面波是同相相加的．而对散射体波并非如此，所以随着栅条的增加，反射表面波愈来愈大，而散射的体波却基本保持不变，因而散射的能量绝大部分集中于声表面波，而散射体波所占的能量很小，所以我们可以忽略体波的影响．

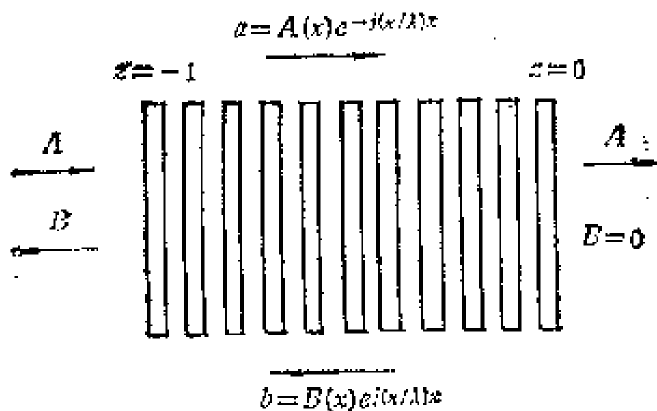


图6.4.19　在栅阵中的耦合波及反射滤波器

我们考虑正入射的情况，并且用耦合模理论来进行分析．我们设二个波a和b以不同方向进入一个周期栅阵(周期为 λ)，如图6.4.19所示．前向波a有正的群速，反向波b有负的群速，这两个波应满足方程

$$\begin{cases} da/dx = -j\beta a, \\ db/dx = j\beta b, \end{cases} \tag{6.4.35}$$

其中β可以是复数，因而在直栅阵的栅条上有反射．但是，由于栅阵的存在，比如对反向传播的 **b** 波来说，**a** 波在每个栅条上发生反射波，这个波又叠加到 **b** 波上，这两个波就产生相对耦合，而这个耦合又是周期性的，因而上述波传播方程需改变为

$$\begin{cases} \dfrac{da}{dx} = -j\beta a + K_{ab} b e^{-j(2\pi/\lambda)x}, \\ \dfrac{db}{dx} = j\beta b + K_{ba} a e^{+j(2\pi/\lambda)x}. \end{cases} \tag{6.4.36}$$

令

$$a = A(x)e^{-j(\pi/\lambda)x}, \quad b = B(x)e^{j(\pi/\lambda)x}, \tag{6.4.37}$$

那么

$$\begin{cases} \dfrac{dA}{dx} = -j\left(\beta - \dfrac{\pi}{\lambda}\right)A + K_{ab}B, \\ \dfrac{dB}{dx} = j\left(\beta - \dfrac{\pi}{\lambda}\right)B + K_{ba}A. \end{cases} \tag{6.4.38}$$

我们引进参数

$$\delta \equiv \beta - \frac{\pi}{\lambda}$$

作为传播常数 β 与 π/λ 的偏离的量度．在所谓 Bragg 频率ω_0(这时 ω_0 满足 $\beta(\omega_0) = \pi/\lambda$) 附近，我们可以有

$$\beta = \beta(\omega_0) + \frac{d\beta}{d\omega}(\omega - \omega_0),$$

于是

$$\delta = \omega - \omega_0/v_g.$$

其中v_g为群速．$v_g = d\omega/d\beta$．用参数δ和让耦合系数$K_{ab} = K^*_{ba} \equiv K$，(6.4.38)化为

$$
\begin{cases}
\dfrac{dA}{dx} = -j\delta A + KB, \\
\dfrac{dB}{dx} = j\delta B + K^* A.
\end{cases}
\tag{6.4.39}
$$

设 A、B 有形式为 $\exp(-j\beta x)$ 的解，则有

$$\beta = \pm\sqrt{\delta^2 - |K|^2},$$

那么 β 与 δ 的曲线有如图 6.4.20 所示的形式.

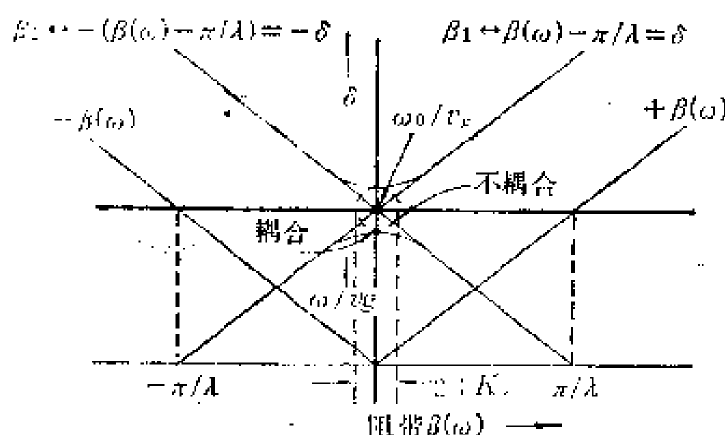


图6.4.20 方程(6.4.39)的频散曲线

我们利用上述结果，考虑入射波在长为 l 的周期结构上的反射特性. 我们将要看到，它具有带通滤波器的性质. 如图 6.4.19 所示，考虑波 A 入射到长为 l 的结构上的情况，这里在 $x=0$ 处 $B=0$. 我们设解有 $\exp(\pm\gamma x)$ 的形式，这里

$$\pm\gamma = \pm\sqrt{|K|^2 - \delta^2}, \tag{6.4.40}$$

那么有一般解

$$
\begin{cases}
A = A_+ e^{-\gamma x} + A_- e^{+\gamma x}, \\
B = B_+ e^{-\gamma x} + B_- e^{+\gamma x},
\end{cases}
\tag{6.4.41}
$$

而 $B_\pm$ 和 $A_\pm$ 之间有

$$B_\pm = \frac{\mp\gamma + j\delta}{K} A_\pm.$$

在 $x=0$，$B=0$，所以 $B_+ = -B_-$，于是

$$B = -2B_+ \sinh(\gamma x).$$

于是我们有

$$A=-2B_+\left(\frac{\gamma}{K^*}\cos\gamma z-\frac{j\delta}{K^*}\sin\gamma z\right).$$

在 $x=-l$，反射系数 $\Gamma=B/A$ 为

$$\Gamma=\sinh\gamma l/(\gamma/K^*)\cos\gamma l+(j\delta/K^*)\sinh\gamma l. \quad (6.4.42)$$

图6.4.21 给出能量反射系数 $|\Gamma|^2$ 作为 δ (即频率参数)的函数曲线。

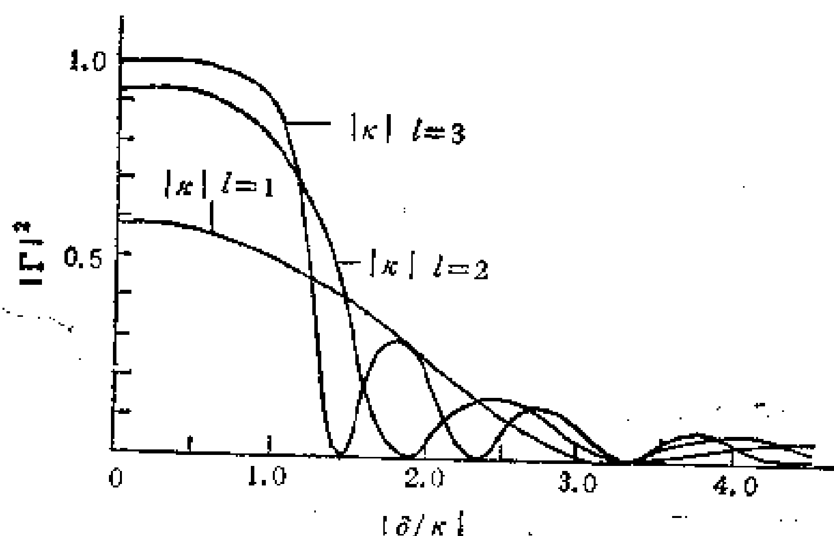


图6.4.21 在一均匀分布反馈结构(长为l)中，反射系数 $|\Gamma|^2$ 作为 $|\delta/K|$ 的函数曲线。

我们看到，在 $\delta=0$ 附近，即在 Bragg 频率附近，有一阻带，反射系数在 l 足够厚时接近于 1，而之外有一通带。通带内在一系列频率上，反射系数为零，这时 γ 为纯实数，反向波在结构上有一正弦分布，而在两端 B 均为零，波能完全通过它，这就构成一种反射滤波器。

下面我们来求耦合系数K与周期结构参数的关系。我们设周期结构 Λ 是由两个 $\Lambda/2$，阻抗分别为 z_1 和 z_2 的层所组成。我们设平均阻抗为 z_0，$z_1=z_0-\Delta z_0$，$z_2=z_0+\Delta z_0$，而 $\Delta z_0/z_0\ll1$。我们来看一个周期结构的反射系数。当没有频散，即在Bragg频率 $\delta=0$，$\Delta x=-\Lambda$，$\Delta B=-K^*/\Lambda$，而 ΔB 应等于Γ_0A。而两个四分之一波厚层的反射系数

$$\Gamma_0\approx2\Delta z_0/z_0,$$

所以
$$|K|\approx\frac{1}{\Lambda}\cdot\frac{2\Delta z_0}{z_0}. \tag{6.4.43}$$

另外一方面，当 $\delta=0$ 时，

$$\Gamma(-l)=\tanh(|K|l),$$

所以
$$\frac{1+\Gamma}{-\Gamma}=e^{2|K|l},$$

$$|\Gamma|=\left|\frac{1-e^{2|K|l}}{1+e^{2|K|l}}\right|,$$

而 $e^{|K|l}=e^{(2\Delta z_0/z_0)\cdot l/\Lambda}$. 若在 l 有 N_R 个周期栅条，又

$$e^{2\Delta z_0/z_0}\approx\left[\left(1+\frac{\Delta z_0}{z_0}\right)^{z_0/\Delta z_0}\right]^{2\Delta z_0/z_0}\approx\left(\frac{z_2}{z_1}\right)^2,\left(\frac{\Delta z_0}{z_0}\to 0\right),$$

所以
$$|\Gamma|=\left|\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2}\right|, \tag{6.4.44}$$

其中 $\rho=\left(\frac{z_2}{z_1}\right)^{N_R}$. 而此时透射系数为 T，考虑 $|\Gamma|^2+|T|^2=1$，所以

$$|T|=2\rho/1+\rho^2. \tag{6.4.45}$$

在图 6.4.22 中给出反射系数与栅条数 N_R 的关系，参数是阻抗比 (z_1/z_2)。

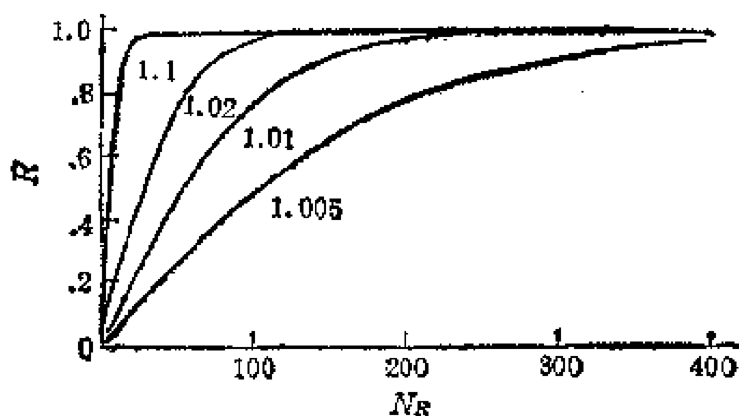


图6.4.22 反射栅阵的反射特性

§6.5 声表面波器件

在压电材料基底上，制作叉指换能器有些再加上一些表面结

构，可以构成多种多样的声表波器件． 在本节中，我们将依次描述．

目前声表面波器件，由于它的多种特点，以及它的优异性能，已经被广泛地应用． 但是目前对声表面波器件的设计和分析上，通常还都是采用一些简化模型，这包括对器件上的叉指换能器，以及像栅阵，多条带耦合器这样的场结构．如 6.3 所述，用这些简化模型（δ 函数模型、脉冲响应模型，以及等效电路模型）分析相对地简单明了． 例如对带通滤波器，延迟线，色散延迟线中，用 δ 函数模型或脉冲响应模型，就可以将叉指换能器看成一横向滤波器．而利用横向滤波器概念来分析它的频响特性，就很简单明了，这在工程设计中往往也可大致够用． 而用严格的场模型来分析，计算太复杂，何况理论上还不完备，即使应用这种模型也得引进许多近似．

简化模型既然是简化的，它就必然带来与实际情况的差异．事实上，简化模型带有唯象的性质，特别是 δ 模型，脉冲响应模型，它们几乎与分析声表面波，声电转换等本质的东西没有联系了．这种简化与实际情况的差异，在声表面波技术中称之为二阶效应．我们将对此作些讨论，并考虑怎样抑制、避免或补偿这些效应．在二阶效应中，有些就是与声表面波场的特性、声电转换等相联系的．这些就需要一些较严格的分析，在前面几节中已作了些分析，但也是比较繁杂困难的，因此我们将着重讨论它的物理实质，而不作繁杂的数学推导．

在声表面器件中，目前提出的有很多种，其中不少是派生性质的，因此我们只能叙述其中的主要类型，并简要举出某些重要的应用． 利用声表面波器件可以构成具有各种功能的系统，这方面有些已经实用，有些具有潜在的价值，在本节我们只能更为简略提及．

6.5.1 叉指换能器作横向滤波器，加权技术

叉指换能器中每根指（或每对指）可以看成一个激发声源，它

相当于一个横向滤波器．如图 6.3.6 所示，每个激发源具有一定幅度 a_n，对空间某一点，有一固定延迟相位 τ_n．因此很容易决定它的频响或传输函数，即

$$H(f)=\sum_{n=1}^{N}a_n e^{-j\omega\tau_n}. \tag{6.5.1}$$

显然，它的脉冲响应为

$$\begin{aligned}h(t)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}H(f)e^{j\omega t}dt\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\sum_{n=1}^{N}a_n e^{j\omega(t-\tau_n)}dt\\&=\sum_{n=1}^{N}a_n\delta(t-\tau_n).\end{aligned} \tag{6.5.2}$$

这正好对应描述叉指换能器的 δ 函数模型，因此我们可以这么说，叉指换能器在 δ 函数模型近似下，就是一个横向滤波器．对一个叉指换能器来说，相对于某位置 x_n 而言，上式可以写成：

$$h(t)=\sum_{n=1}^{N}a_n\delta(t-x_n/v_s)\quad(v_s\text{ 为声表面波传播速度}). \tag{6.5.2a}$$

应该提出的是，一个声表面波器件一般均是二个叉指换能器组成．我们先设，它们两个均是等孔径的，如图 6.5.1 所示．这时

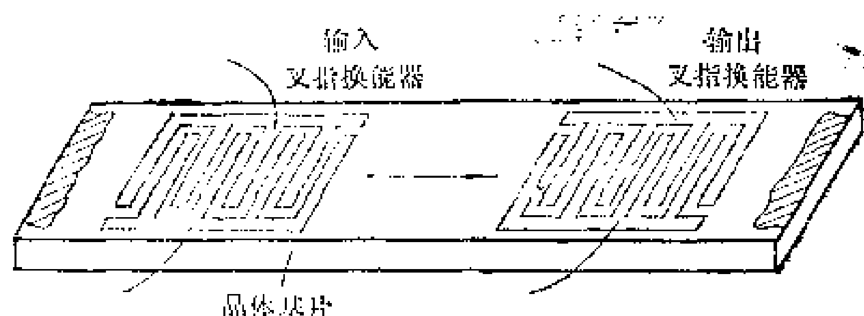


图6.5.1 一般声表面波器件叉指换能器的结构

二个换能器的 $a_n=I_n(I_n=\pm1)$，那么如果左边换能器先发射，

它有N对指，那么在X处的总体声波场为

$$A(f)=\sum_{n=1}^{N} I_n \exp\left[j\frac{2\pi f}{v}(X-x_n)\right].$$

这个此声波到达右边接收换能器时，在y_m处第m对指上接收响应为

$$I_m A(f)=I_m\sum_{n=1}^{N} I_n \exp\left[j\frac{2\pi f}{v}(y_m-x_n)\right].$$

整个接收换能器(M对指)的响应，也就是总的频响为

$$H(f)=\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} I_n I_m \exp\left[j\frac{2\pi f}{v}(y_m-x_n)\right]$$

$$=\left(\sum_{n=1}^{N} I_n e^{-j(2\pi f/v)x_n}\right)\left(\sum_{m=1}^{M} I_m \exp^{j(2\pi f/v)y_m}\right),\quad(6.5.3)$$

即

$$H(f)=H_i(f)H_0^*(f).\quad(6.5.4)$$

所以两个均匀等孔径叉指换能器的频响是输入换能器的频响与输出换能器频响的复数共轭相乘．因此，我们也就知道它的脉响为

$$h(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} h_i(t+\tau)h(\tau)d\tau,$$

即为两个换能器脉响的互相关，这个脉响是有限时间间隔的，因为当输入换能器的整个“像”未到达输出换能器之前，或者通过输出换能器之后，这时输出均为零；这可称之为有限脉冲响应．

加权换能器　在前面讨论中，我们看到，上述等孔径换能器只有一个延迟变数x_n(或x_λ/v)，而振幅保持为固定值(归一化为± 1)．x_n的改变，就相应改变到达某固定位置的时间，我们称之为相位加权．为了建立我们需要的任意的频响，还必需进行**幅度加权**．幅度加权的方法，最直观的，是在每根叉指上加上不同的电压，但这不实际，因为它对某一外加电压，要通过附加的结构使各个指上电压不一样．另外一个办法是改变电极宽度与间隙的宽度的比例(称之为金属化比)，通过改变耦合系数达到改变激发声场强度，但这时实际只能变化一倍左右．而且严格的金属化比的控制，在光刻时也很难保证．一个简单而有效的技术是所谓**切趾加**

权.

切趾加权 就是改变两个相邻指间相互交叉重叠电极的长度,有时称为有效指长或称有效孔径(如图 6.5.2 所示). 虽然切趾后重叠部分发射声振幅没有减少,但是如果指长变化,则发射的总能量将变化. 如接收换能器足够宽,则每根电极产生的声能差异将起振幅加权作用,这样所需的加权函数就形成有效指长的包

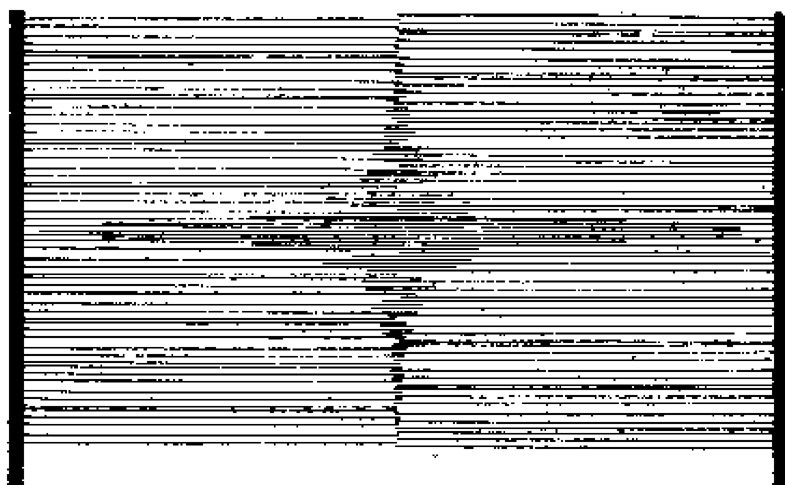


图6.5.2 叉指换能器切趾加权

络. 这种加权工艺非常简单,不需要另外的工艺过程,而建立二个数量级的振幅加权是可以办得到的. 其缺点是当有效指长很小时,将产生衍射,而这需要补偿,但补偿程序比较复杂. 另一个缺点是加权不能很激烈地变化,一根指长短的变化,将影响到周围另一极性的两根指. 但这种加权由于简单方便,加权的范围大,加权精密,还是最通常的振幅加权办法.

我们讨论切趾加权的影响,如果一发一收二个换能器,其中一个加权;另一个为均匀指长,而且孔径大于或等于加权换能器的孔径. 我们令加权换能器的频响为

$$H_t(f)=\sum_{n=1}^{N}a_nI_n\exp j\frac{2\pi f}{v}(X-x_n),$$

$I_n=\pm 1$,a_n 为加权系数,均小于 1 . 到达不加权换能器后,

$$H(f)=\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}a_nI_nI_m\exp j\frac{2\pi f}{v}(y_m-x_n)$$

$$=H_t(f)H_0^*(f),\qquad(6.5.5)$$

仍为两个换能器的频响相乘. 但是,若两个叉指换能器都加权,问题就没有这么简单了,设一个加权系数为 a_n,另一个为 a_m,发射加权换能器的频响为

$$H_t(f)=\sum_{n=1}^{N}a_nI_n\exp j\frac{2\pi f}{v}(X-x_n).$$

当发射声波到达接收换能器第 m 根指时,产生的响应为

$$\sum_{n=1}^{N}(C_{mn})I_nI_m\exp j\frac{2\pi f}{v}(y_m-x_n),$$

其中 $C_{mn}=\{a_m,a_n\}_{\min}$,即取发射的第 n 根指长加权 a_n 与接收第 m 根指长加权 a_m 二者中指长较短的一个,总的响应为

$$H(f)=\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}C_{mn}I_mI_n\exp j\frac{2\pi f}{v}(y_m-x_n),\qquad(6.5.6)$$

这显然不能用两个换能器频响之积来表示。

抽指加权 另一种加权的方法,不是改变指长,而是改变指的"密度",即把一叉指换能器的金属条阵分成一个个小区段,而在每一个区段中抽去不同数目的叉指以获得不同的叉指密度,从而改变不同区段辐射的声能,而实现振幅加权的目的,如图 6.5.3 所示.

这种方法的优点是每个指的孔径是一样的,可避免切趾加权使得有的指的孔径过小,造成衍射效应严重. 但这种方法缺点也是明显的,由于指是一根根抽的,是突变的,所以加权不可能很精密,另外对叉指对少的叉指换能器也很难进行加权,故这种加权相对切趾加权应用得较少.

另外还有些加权方法,应用就更少了. 这些加权方式有电容加权,指串联结构的所谓"狗腿"结构等。

有关加权换能器的两个定理

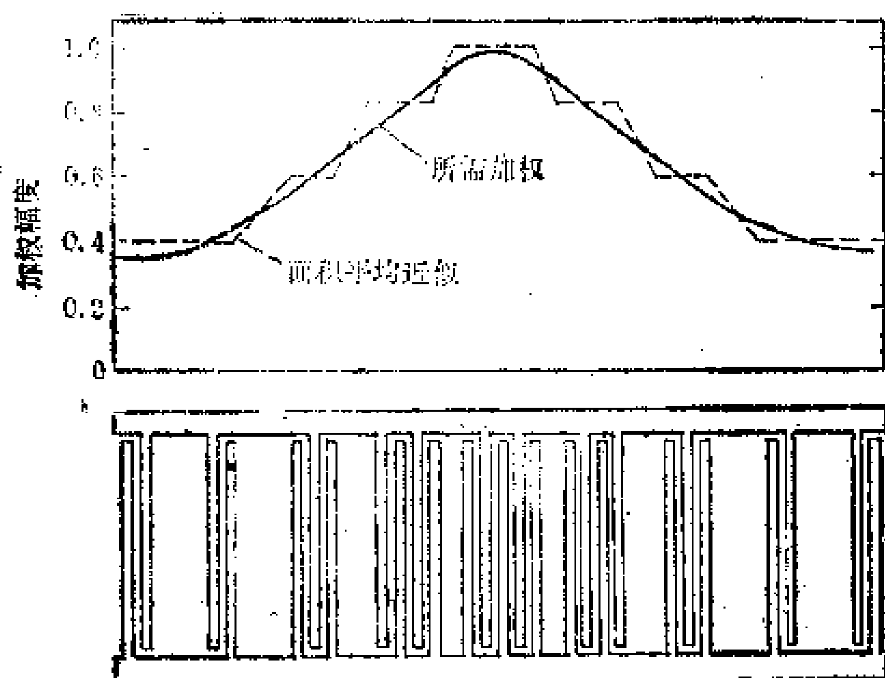


图6.5.3　抽指加权结构

定理1：对叉指换能器中心电极对称加权时，叉指换能器的群延迟是与频率无关的．对一有N个电极的叉指换能器，其边缘有$2N$个，设由$-N$到-1，加上$+1$到N，则其频响

$$
\begin{aligned}
H(f) &= \sum_{n=-N}^{N} a_n \exp\left(-j\frac{2\pi f}{v_s}x_n\right) \\
&= \sum_{n=-N}^{-1} a_n \exp\left(-j\frac{2\pi f}{v_s}x_n\right) \\
&\quad + \sum_{n=1}^{N} a_n \exp\left(-j\frac{2\pi f}{v_s}x_n\right) \\
&= \sum_{n=-N}^{N'}\left(a_n \exp\left(-j\frac{2\pi f}{v_s}x_n\right)\right. \\
&\quad \left. + a_{-n}\exp\left(-j\frac{2\pi f}{v_s}x_{-n}\right)\right).
\end{aligned} \tag{6.5.7}
$$

由于换能器是对称的，所以$a_n = a_{-n}$，让$x_{-n} = l - x_n$，l为换能器总长度，式(6.5.7)可写成

$$H(f)=\exp\left(-j\frac{\pi f I}{v_s}\right)\sum_{n=1}^{N}a_n\left\{\exp\left[j\frac{2\pi f}{v_s}\left(x_n-\frac{I}{2}\right)\right]\right.$$

$$\left.+\exp\left[-j\frac{2\pi f}{v_s}\left(x_n-\frac{I}{2}\right)\right]\right\}$$

$$=\exp\left(-j\frac{\pi f I}{v_s}\right)\sum_{n=1}^{N}2a_n\cos\left(\frac{2\pi f}{v_s}\left(x_n-\frac{I}{2}\right)\right).$$

(6.5.8)

所以 $H(f)$ 的相位因子为 $\exp\left(-j\frac{\pi f I}{v}\right)$，它随 f 线性变化. 由于群延迟定义为相位对频率的一阶微商，所以群延迟是常数. 可以证明，上式对电极间隔不均匀的叉指换能器，只要加权是对称的，则其群延迟也是常数，与频率无关. 于是我们证明了对称的叉指换能器具有非频散的频响，这是声表面波滤波器一个最突出的优点. 一般集中参数构成的滤波器，在通带内幅频响应可以作得很均匀，但是其相频响应在通常都不是线性的，即群延迟不可能是常数.

定理 2 对于一具有均匀指间隔的叉指换能器，无论其加权对称与否，其基频的幅频响应围绕其中心频率都是对称的.

该叉指换能器频响：

$$H(f)=\sum_n a_n\exp\left(-\frac{2\pi f}{v_s}x_n\right)$$

$$=\sum_n{}^{1}a_n(x)\delta(x-x_n)\exp\left(-\frac{2\pi f}{v_s}x_n\right).\quad(6.5.9)$$

其基频响应满足

$$\frac{2\pi f_0}{v_s}x_n=\left(\frac{\pi}{4}\right)n,\ f_0\text{为中心频率},$$

则 $$H(f)=\int a(x)\exp\left(\frac{2\pi f_0 x}{v_s}\right)\cdot\exp\left(-j\frac{2\pi f}{v_s}x\right)dx.$$

(6.5.10)

让 $f=f_0+\Delta$，则

$$H(f_0+\Delta)=\int a(x)\exp\left(-j\frac{2\pi\Delta}{v_s}x\right)dx. \qquad (6.5.11)$$

让 $f=f_0-\Delta$，则

$$H(f_0-\Delta)=\int a(x)\exp\left(+j\frac{2\pi\Delta}{v_s}x\right)dx. \qquad (6.5.12)$$

所以
$$H(f_0+\Delta)=H^*(f_0-\Delta), \qquad (6.5.13)$$

那么
$$|H(f_0+\Delta)|=|H(f_0-\Delta)|. \qquad (6.5.13a)$$

这就证明了，对于均匀指间隔的叉指换能器，其幅度(幅频响应)围绕中心频率是对称的．这就是说，如果希望频响幅度不对称，那么只有用不均匀指间隔换能器才能实现．这个定理对声表面滤波器的设计是很重要的．必须指出，此定理只适用于普通叉指换能器的基频响应，在换能器高次谐频，或者每个叉指周期多于两个电极(如下面要提到并经常采用的分裂叉指换能器)的换能器，可以不遵守这个定律．

6.5.2 声表面波器件的二阶效应

声表面波器件可以看为一个理想的横向滤波器，如图6.3.6所示．它亦可看成一个理想的天线阵，可以分成一个阵因子和元因子之乘积．但是实际由于各种效应的存在，与上述理想的横向滤波器或理想的天线阵是有偏离的．这种偏离，我们统统称之为二阶效应．现来分析这些二阶效应，并讨论抑制或消除它们的方法．

(一)加权换能器的波前畸变

在我们前述的栅阵分析中已经给出，当声波通过一个金属条带时，它会形成一个相速滞后效应，它是由于在电极区电位保持为恒定以及电极的质量负载造成的．因此对一个加权换能器，如图6.5.4(a)所示，在指长重叠的加权区比不重叠部分的叉指电极数要高一倍，因而使得表面波的平头波波前变成不是平头波前，这样就造成信号的畸变．

为了消除这种畸变，就在指长不重叠部分，引入假指电极，如

图 6.5.4(b) 所示，这样就纠正了波前畸变.

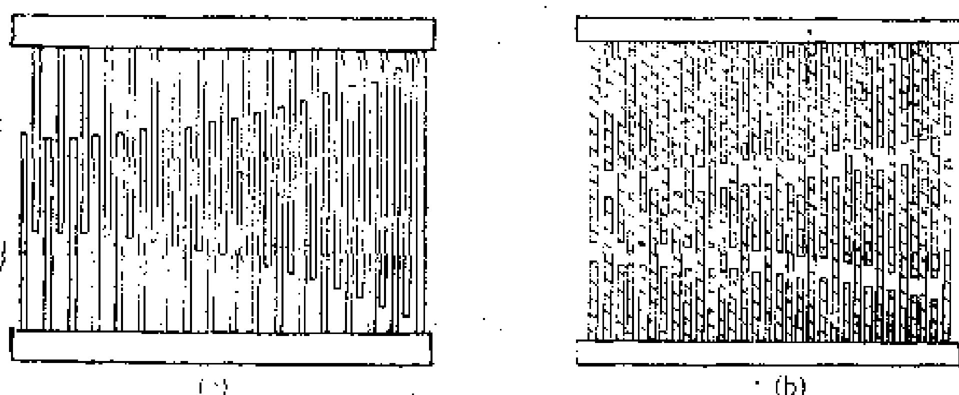


图6.5.4 (a)一般加权换能器，(b)消除波前畸变而引入假指电极的加权换能器

(二)衍射和波束偏斜

设计声表面波器件时，是把它作为一横向滤波器来考虑的. 它的幅度和相位分别由幅度加权，(最通常是叉指重叠长度) 及由指的位置来确定. 在原始设计时，发射的声波被认为是一个均匀平头波，波束沿传播距离不会扩散，但是从波动观点，有限孔径叉指换能器辐射的波都会发生衍射，在各向异性介质中，这种衍射规律更为复杂 (参见 6.2.5) . 用角谱理论，或用抛物线近似估计，我们就可以知道，由发射叉指换能器的以某一定孔径的叉指，到达接收换能器某一叉指时，由于衍射而引起的畸变，包括幅度和相位. 这样分别地对应进行估计，就可以得出由于衍射效应造成的偏离理想横向滤波器的响应的变化. 而下一步如何补偿衍射效应所造成的影响是一个更为复杂的问题. 实际的作法是在某些近似和限定条件下，近似作这种补偿，如只对中心频率补偿.

在各向异性介质中，在非纯模方向上，群速与相速的方向是不一致的，因而会发生波束偏斜 (6.2.5)，即对于两对准放置的发射和接收的叉指换能器，发射的能量将不能全部达到接收换能器. 为了避免这种现象，在可能的情况下，尽量选择在纯模方向工作. 在这种方向上，相速方向和群速方向是一致的，从而一发一收两个换能器可以对准放置，这时还要求压电基底要准确的定向，除了面的方向以外，传播方向也须设法确定并加标记. 如果非得采用非

纯模方向，那么就要预先估计出功率流角，按一定角度偏斜放置两叉指换能器.

(三)叉指电极的反射

金属叉指电极对声表面波的传播有影响，会造成不希望的反射. 这种反射在原先作横向滤波器设计时也是没有考虑的. 金属电极，一方面它覆盖在基底上，它作为一种质量负载会造成对表面波的反射; 实验证明它在一个边缘上的这种反射系数为

$$\gamma=\pm\frac{1}{3}(\rho_s/\rho_G)\cdot h/\lambda_s,$$

这里ρ_s和ρ_G分别为电极材料的密度和基底材料的密度，h是电极厚度，λ_s是声表面波波长. 另外还存在一种反射，这种反射可称之为电气加载. 因为电极是由接近理想导体构成的，其上保持恒定电位，这与自由表面的边界条件是不一致的，因此声波由间隙区到金属电极区，或由金属电极区到间隙区时都会发生反射，其反射系数为

$$\gamma=\pm\frac{1}{4}K^2,$$

这里K是声表面波电极耦合系数.

假如金属电极之间间隔是1/4波长，那么每根指的反射都是同相相加的[见图6.5.5(a)]. 对它在前一根指上的反射，由于前一根指比后一根指多走一个波长，所以对某一固定点正好是相位相同而叠加.

为了抑制叉指的反射，最有效的办法是采用所谓分裂指结构，或称双电极结构[图6.5.5(b)]，即每根指占1/8个波长. 这样的叉指电极阵，每两根接一个电极，相邻电极的反射信号正好相差1/2个波长，所以是异相，正好相消. 分裂指法的缺点在于，在相同工艺条件下，器件的工作频率只能达到一般的叉指结构的一半.

(四)压电再生效应

在图6.5.7中，表面上的一个接收叉指换能器接有一个有限负载，由于压电耦合，入射的声表面波在这个负载上会产生一个电压，这个电压反过来作为一个源而驱动换能器，使得每个电极向

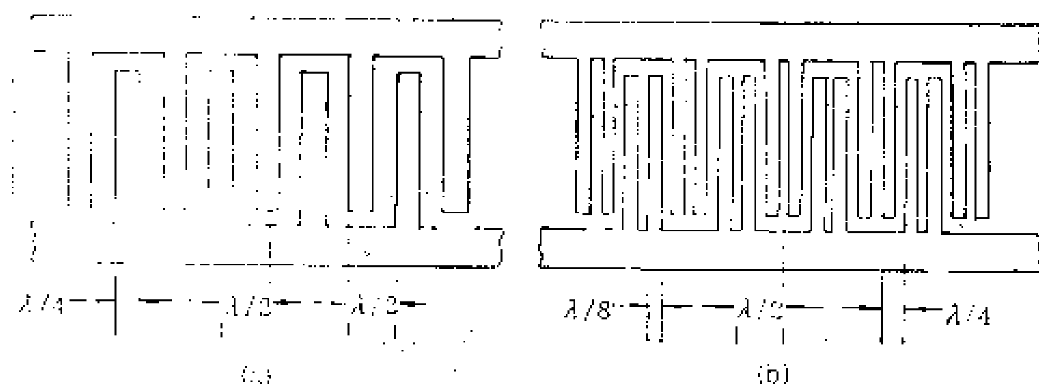


图6.5.5 叉指换能器的(a)"单电极"和(b)"双电极"——分裂指结构

两边又发射所谓二次声表面波. 当然，产生的这个波又会激发三次及更高次的一系列重发表面波.在器件预计时，如采用δ函数模型或脉冲响应模型，我们并没有估计这种相互作用，因而造成畸变. 但我们可以看到，这种畸变利用等效电路模型是可以分析的，也就是说，等效电路模型在这方面并没有作"近似"，而是考虑了这种相互作用的.

为了抑制这种再生效应，显然最简单的办法是使负载阻抗很低，即接近于短路状态，但是显然这将以增加插损为代价的. 另外一种办法是用诸如等效电路模型给予性能预计. 由于压电再生效应所引起的畸变，可以采用预畸变状态给予补偿，但严格地讲，这也只能在各种性能上作权衡.

(五)体波和板波

叉指换能器不但能辐射表面波，而且也能够辐射体波. 由于表面波器件所用基片不可能是无限大介质，而是一个有限厚度的板，这样辐射的体波会来回地在这个基片间反射，而达到接收换能器，形成一个干扰信号；另外由于基底是块板，因而也会形成板波模式，实际板波模式可以看成是体波模式的叠加，这些板波模式也会形成干扰.

为了抑制体波和板波模式，最通常的方法是让底片面打毛，或者让底表面与传播平面不平行；或者在底表面上刻槽；或者在底平面涂敷吸声材料，或者多种方法并用.

(六)三次行程信号

在杂波干扰中，很严重的一种是所谓的三次行程信号．它是由于发射的声信号到达接收换能器后被部分地反射回来，再到达发射换能器，再反射，再到达接收换能器．这在时间上是三倍于直达信号的时间间隔，即走过三次行程的信号．这是很重要的干扰，因为在匹配状态下，此时插损很小，二个换能器理论上只有6dB的插损；而这时反射信号也很强，反射信号也只衰减 6dB，因而三次行程信号，只比主行号小 12dB．为了减小这种干扰，最简单的办法就是在失配状态下工作，但这通常是以增加插损为代价的，幸而这时三次行程信号衰减得更多，因而信噪比还是提高了．另外一个办法是采用单向换能器结构，如三相的单向换能器结构，这时声波只能往一个方向发射，它不但使插入损耗减小 3dB；而且单向换能器也是无反射换能器，从而在原则上完全消除三次行程信号，但是单向换能器带宽都比较窄．

6.5.3 声表面波器件用的材料

声表面波器件所用的基底材料的选择是很重要的，材料的性质对器件可以起着决定的影响，这些性质在前面已经简略讲过，现在我们将从材料的角度来考虑这个问题．

声速 声表面波传播速度在各向异性的压电介质中是不能用一明显表达式给出的，而只能用迭代方式求出，因此我们不能从材料的一些属性直接求出声速来．不过，与体波中所用材料相似，一般说，密度小和硬的材料，声表面波速度高；反之密度大和软的材料，声表面波速度低．声表面波所用的材料，最小声速一般是每秒 1 千多米，常见的如〈001〉切、〈110〉传的 $Bi_{12}GeO_{20}$，它的声速是 68m/s；常用材料的声速大约是 3000m/s 左右，如 YZ-$LiNbO_3$，其声速为 3488m/s，ST切、x传石英是3158m/s，而最高的速度是在宝石基底上沉积AIN材料，这种复合材料的声速大约为6150m/s．

纯模方向和最小衍射切割 在§6.1中，我们已经给出纯模方

向的定义，即声的相速与群速(能流)一致传播的方向. 在作声表面波器件时，一般我们都是利用纯模方向来传播声表面波，这时发射叉指换能器和接收换能器的中心轴线是在纯模方向的一条轴线上，这样就给工艺制作带来了方便. 另外，由于纯模方向上 $dv_s/d\theta=0$,所以在与轴线略为偏离的方向上,声速变化也很小,这也对设计有利.在§6.1中我们已经提到最小衍射切割,即在抛物线近似下,各向异性因子 $\delta=-1$,则有限孔径的声束永不会衍射,因而这对器件设计是非常有利的,即无论孔径多大,包括切趾加权如何,声束总是不衍射的,即不需要作衍射修正.最小衍射切割,举例说在 $Bi_{12}GeO_{20}$ 的最小衍射切割取向,可比各向同性介质中衍射减小一百倍,对于常用YZ-$LiNbO_3$, γ 约比 -1 略小一些(虽然对它来说,抛物线近似不是一个好近似),因此衍射也比较小，而ST切 x 传播的石英 $\gamma=+0.378$,它比各向同性介质衍射效应更厉害.

耦合系数 这个表征声电转换的参数在所有声学换能器中均是一个非常重要的参数,对声表面波叉指换能器也是一样. 我们在后面(§6.5.4中)讨论叉指换能器带宽时可证明,在单电感调谐情况下,在最大带宽时，叉指的对数与耦合系数的关系，即最佳指对数[参见§6.5.4中式(6.5.1)]为

$$N=\sqrt{\frac{\pi}{4K^2}}.$$

对 YZ-$LiNbO_3$,由于它的耦合系数较大,因此 $N=4$,带宽为22%,而对ST石英, $N=21$、带宽仅为4%. 而在另一方面,这关系到插入损耗问题,对此我们实际也作过讨论. 如在电路不调谐情况,电带宽比较大,整个带宽就取决于声的带宽. 要增加带宽,就要减少 N,而减少 N 是以增加插损为代价的(见6.5.4),而此时有较大耦合系数材料,插损相对地小，反之较小耦合系数者，则插损比较地大.

传播损耗 声表面波在介质中传播时与一般声波一样，由于各种原因,会产生损耗. 造成损耗的原因非常复杂,其中之一种是与热声子相互作用即温度有关的. 我们设传播损耗衰减因子 α_T

为

$$I(a_1)=I(0)\exp(-\alpha_T x_1)=I(0)\exp(-\alpha_T\tau),$$

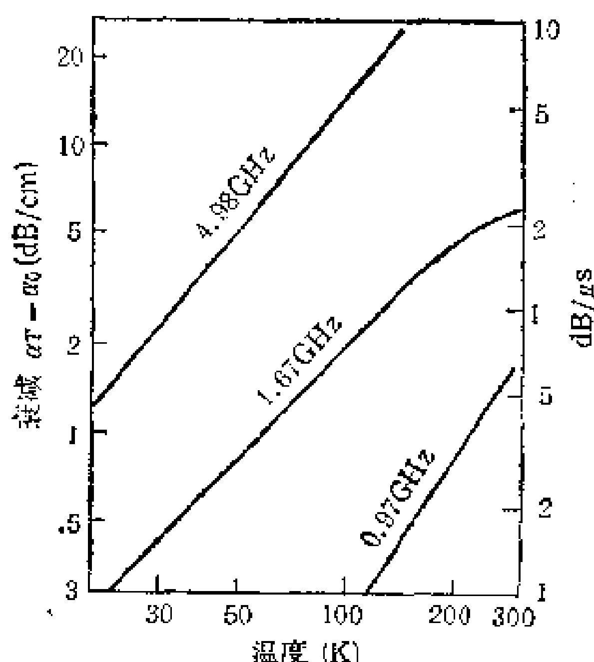


图6.5.6 YZ-$LiNbO_3$在0.97GHz时声表面波衰减与温度的关系

$I(x_1)$为x_1处声强，$I(0)$为起始声强，这时我们忽略衍射等引起的衰减．在图6.5.6中给出$LiNbO_3$，在频率为1GHz左右的衰减随温度的变化．

另一种因素是与温度无关的衰减，它主要是由于晶体的缺陷或夹杂所引起的，在通常情况它比较小，如在室温1GHz时，$LiNbO_3$中衰减约为0.9 dB/μs，其中0.7dB/μs是与温度有关的衰减，只有0.2dB/μs的衰减是与温度无关的．对表面波来说，还可能有一种与温度无关的衰减，它与表面的加工质量有关，如果表面有裂缝、擦痕或孔洞以及表面沾污都会造成额外的衰减．大致说来，如果表面的不平度是波长的1／4；则衰减将会增加50％，但在通常情况下，0.1μm以下的表面缺陷不致引起衰减增加多少．第三种衰减是由于空气负载所引起的，即声表面波在介质表面传播总会有少部分能量向空气中辐射，显然这种衰减与气压有关，当气压为零，即真空时就没有这种衰减了．

在考虑传播损耗时，我们最为关心的是它与频率的关系，这里我们给出几种常用材料的经验公式：

YZ-$LiNbO_3$　损耗[dB/μs]$=0.88f^{1.9}+0.19f$,

(001)切(110)传$Bi_{12}GeO_{20}$ 损耗[dB/μs]$=1.45f^{1.9}+0.19f$,

YX-石英　损耗[dB/μs]$=2.15f^2+0.45f$,

其中f是以GHz计，其中$f^{1.9}$或f^2项是真空中的传播损耗，而与

f成比例的第二项是空气负载引起的．由此公式可见，在低于200 MHz，时延不太长的器件，传播损耗是可以忽略的．再举一例，如对$LiNbO_3$上60μs的延迟线，在60MHz时第一项衰减为0.25dB；第二项衰减为0.684dB，总计为0.936dB，所以空气负载的衰减是主要的．当然在高频，如在1GHz时，对YZ-$LiNbO_3$第一项衰减比第二项大4.6倍，因此第一项衰减是主要的．

延迟温度系数　声表面波从某一点传播到另一点，由于声速有限而需要一定的时间$\tau = l/v_s$，其中v_s为声表面波传播的速度，l为距离．当温度变化时，延迟时间会变化，其原因有二个，一个是v_s随温度的变化，另一个是l随温度的变化，这是由材料线膨胀系数所决定的．显然，延迟时间随温度的相对变化率为

$$\frac{1}{\tau}\cdot\frac{d\tau}{dT}=\frac{1}{l}\cdot\frac{dl}{dT}-\frac{1}{v_s}\cdot\frac{dv_s}{dT}.$$

此延迟温度系数在不同温度也是不同的，因此上式仅表示为一阶的温度系数，实际上还有高阶的温度系数．对于YZ-$LiNbO_3$和(001)(110) $Bi_{12}GeO_{20}$，大致为10^{-4}，而对ST石英，在20℃时为零．

器件对材料的选择　从实用器件的角度来看，一般对上述材料的特性有一定选择要求．

(i) 声速　如果我们需要长的时延，则选择低声速材料，如(001)(110) $Bi_{12}GeO_{20}$，因为相同长度的基底，可以获得长的时延．而高声速材料，可以获得较高频率的器件，这是因为相同频率下，声速大，其波长就长，叉指换能器的叉指间隔就大．在相同工艺条件下，指间隔是有一定限度的，所以高声速材料可以获得较高频率的器件．

(ii) 耦合系数　根据前面讨论，从器件的角度看，选取耦合系数大的材料更好，因为这时可以获得较大带宽和较低插损．这在通常情况下是这样的．但事情也不尽然．由于耦合系数大的材料，叉指间的指间反射也大，即二阶效应大，这在一些指对数多的器件，如直列式色散延迟线就不适宜，另外，耦合系数大的材料一

般说温度系数不好.

(iii) 延迟温度系数　一般说，我们总希望温度系数越小越好(除非用它作温敏器件)，如 ST 切石英；如前所述，虽然它的温度系数好，但其耦合系数一般也小.

(iv) 衍射和波束偏斜的选择，总是希望选择衍射较小和在纯模方向工作.

当我们选择材料时，要综合上述因素来全面考虑．一般地说，几种常用的材料中，$LiNbO_3$ 由于耦合系数较大，常选用作滤波器；而 $Bi_{12}GeO_{20}$ 用作长时延器件；而石英用作稳频信号源．对于色散延迟线，直列式常用石英，而沟槽反射式常利用 $LiNbO_3$ 或 $Bi_{12}GeO_{20}$.

除了这些因素外，另外还有一些要求．例如材料加工性能的优劣，材料太硬不易加工，材料太软，表面易于损伤等．此外，材料性能要求稳定一致，这方面单晶材料是比较好的.

常用的压电材料　在声表面波技术中，常用的压电材料主要是单晶材料：$LiNbO_3$，$Bi_{12}GeO_{20}$，石英和 $LiTaO_3$．前面已经讨论过前三种材料的性能，对钽酸锂 ($LiTaO_3$) 材料，它的性能主要有中等的耦合系数和中等的温度系数，是一种折衷型的材料.

除了单晶材料外，还有压电陶瓷材料，这种多晶烧结的材料，具有耦合系数大和价格便宜的特点，但这种材料是种烧结的陶瓷，结构呈颗粒状，且有孔隙，所以衰减很大，其稳定性和一致性也比较差只能用于低频器件．为了用于作声表面波器件，我们在原来体波用的压电陶瓷基础上又作了一些改进，即降低了一些耦合系数，而改进了材料致密性和稳定性.

我们还必须提及薄膜材料，目前最常用的 ZnO 薄膜通常是在无压电性的材料基底如玻璃、熔石英 (SiO_2)、Si 和宝石 (Al_2O_3) 上沉淀 ZnO 压电薄膜，沉渍的 ZnO 需要一定取向(通常是 C 轴取向)，由于这是层状结构，因此它的传播速度是色散的(§6.2.4)另外，叉指换能器在这复合材料结构不同的安置其声表面波耦合系数也不同，而且也是与层厚度有关的，如图 6.5.7 所示.

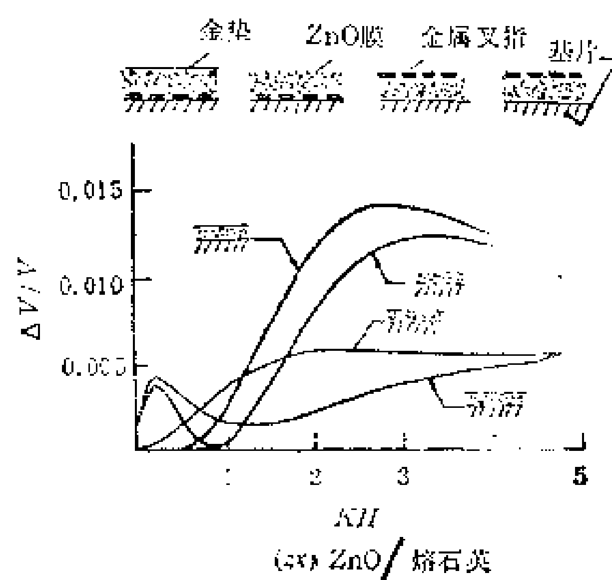


图6.5.7 四种可能的薄膜表面波叉指换能器结构和它们的耦合系数与膜厚的关系

因此在应用中，通常选择在它耦合系数峰值处工作．第一个峰比较小，但其厚度也比较小，这样工艺上是可以接收的．因为薄膜通常是用离子溅射法形成的，而溅射的速率比较慢，如选择第二个峰，低频处其厚度太厚，溅射速率慢，需要的时间很长，同时也很难

表6.5.1 常用材料特性参数

材料	速度 V_s(m/s)	耦合系数 K^2%	延迟温度系数 $\frac{1}{\tau}\frac{d\tau}{dT}$(ppm/℃)	各向异性因子
YZ-$LiNbO_3$	3488	4.5	−94	−1.083
127.86×$LiNbO_3$	3974	5.5	−70	—
ST石英	3158	0.16	0	0.378
YX石英	3159	0.23	−24	0.653
YZ-$LiTaO_3$	3230	0.74	−37	−0.211
×112°Y-$LiTaO_3$	3295	0.64	−18	—
(001)(110) $Bi_{12}GeO_{20}$	1681	0.68	−130	−0.304
压电陶瓷	2200—2500	1—5	可以较好	0
ZnO/玻璃	3150	0.6	−6	0

保证薄膜质量．薄膜材料的特点是价格便宜，便于与其他器件一起集成．

6.5.4 延迟线

声表面波延迟线的结构如图6.5.8所示．在一个压电基片上，沉渍一个发射的叉指换能器，而在相隔一段距离处，又沉渍一个接收的叉指换能器．如果两个换能器相距为 L，那么这个延迟线的延迟时间 τ 就是

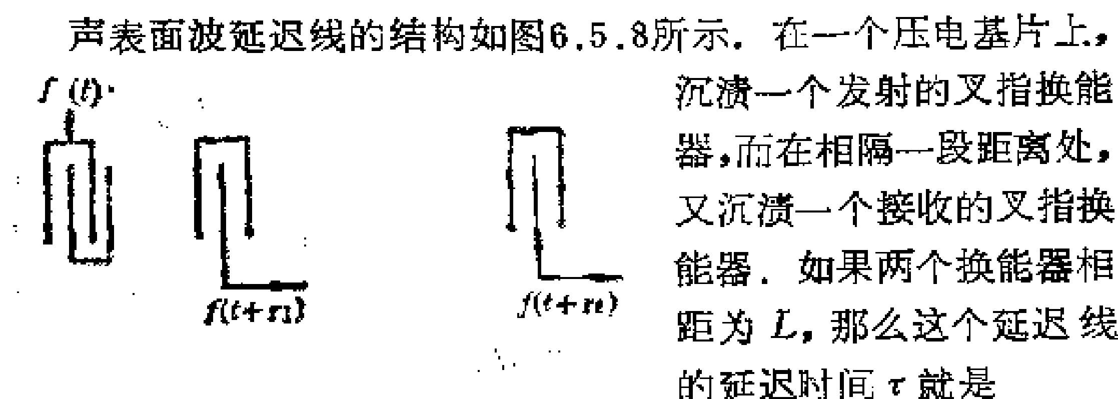


图6.5.8 声表面波延迟线

$$\tau = L/v_s, \quad (6.5.14)$$

其中 V_s 是声表面波的传播速度．

声表面波延迟线可用于电信号的延迟，它利用了声波的速度比电磁波速度约小五个数量级的特点．在声表面波延迟线出现以前，声体波作延迟线已付诸实用．声表面波延迟线与声体波延迟线相比，具有下述特点：(i) 换能器和延迟介质均利用同一块基底材料，而体延迟线的换能器和延迟介质是分开的，这样声表面波延迟线结构简单、制作方便；(ii) 采用了单晶材料和半导体平面工艺，因而精度高、一致性好；(iii) 由于声表面波是在表面传播的，所以比较容易提取和注入信号，获得多种信号处理的功能．比如，我们要提到的抽头延迟线，用声表面波来做就比较方便．

目前声表面波延迟线，对于$LiNbO_3$，单程延时可达 50 μs；对于 $Bi_{12}GeO_{20}$ 可达100μs。为了加大延迟时间，可以采用多程往返传播的方法，比如采用多条带耦合器的全反射变迹器(6.4.2)，如图 6.5.9 所示．

作为延迟线，在设计时需要考虑带宽、插入损耗、杂波信号抑制以及延时温度系数等因素．

(一) 带宽

为了不失真地传递一个脉冲信号，延迟线需要一定的带宽，而

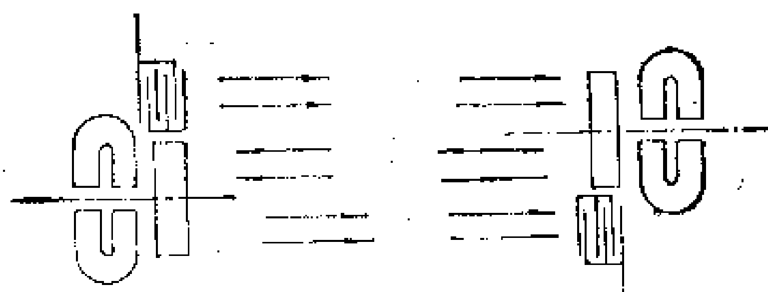


图6.5.9 多程往返的延迟线

带宽取决于发射和接收两个换能器的特性。

根据前述叉指换能器的等效电路模型，我们知道，在中心频率附近换能器的辐射导为

$$G_a = \hat{G}_a \frac{\sin^2 x}{x^2}, \tag{6.5.15}$$

其中，$\hat{G}_a = \frac{4}{\pi}K^2N^2(\omega_0 C_s)$，$K$是声表面波耦合系数，$N$是换能器指的周期段数，而其相对带宽约为

$$\left(\frac{\Delta f}{f}\right)_a \approx \frac{1}{N} \tag{6.5.16}$$

这通常称之为声学带宽．另外一方面，叉指换能器总的静电容$C_T = NC_s$，与辐射导G_a相并联，若用一单电感调谐，它的Q_e为

$$Q_e = \omega C_T / \hat{G}_a. \tag{6.5.17}$$

那么，三分贝带宽(所谓电带宽)为

$$\left(\frac{\Delta f}{f}\right)_e = Q_e^{-1} = \frac{4K^2}{\pi}N. \tag{6.5.18}$$

为了获取最大带宽，这两个带宽就需要相等，即

$$\left(\frac{\Delta f}{f}\right)_a = \left(\frac{\Delta f}{f}\right)_e,$$

所以

$$N^2 = \frac{\pi}{4K^2}. \tag{6.5.19}$$

对于YZ-$LiNbO_3$($K^2 = 0.045$)，$N \approx 4$，带宽约为22%；而对于

ST 石英 ($K^2=0.0016$)，$N\approx21$，而带宽为 4 %。

（二）插入损耗

如果我们上面已经提到，用单电感调谐，可得到一个最佳指对数，使得有最大带宽。显然，此时只有换能器双向损失造成插损。作为一个换能器，往某一方向发射声波，其损失为 3dB，此声波再被同样的换能器接收，又损失 3dB，所以，总起来插入损耗为 6dB，这就是一般双向发射换能器的插入损耗。可以想象，在此带宽内，更窄的带宽的插损都保持在 6dB，不能更小了。但是，如果我们还要增加带宽，如我们设在换能器电端不接任何匹配网络，即令单调谐线圈 $L\to0$，这时我们可以认为电的 Q 很小，即带宽很大，整个换能器只取决于声 Q，即带宽与 N 成反比，那么，我们要增加带宽，就得减小 N。但我们将要看到，此时减小 N，是以增加插损为代价的。

如果令电源内阻为 R_0，$Q_0=\omega C_T R_0$，$Q_e=\omega C_T/G_a$，在匹配时可提供功率 $P_{AV}=\frac{1}{2}E_g^2/4R_0$，$E_g$ 为电源电动势。我们设从电端“3”输入功率到一个力学端“1”，可得到的功率为 P_3，则功率传输系数为 $P_{13}=P_3/P_{AV}$，可以证明，此时

$$P_{13}=\frac{2Q_eQ_0^{-1}}{(1+Q_eQ_0^{-1})^2+Q_e^2}, \tag{6.5.20}$$

而传输损失（以分贝计）为

$$L_{13}=-10\lg P_{B}. \tag{6.5.21}$$

对于 ST 石英和 YZ-$LiNbO_3$，我们将结果列于图6.5.10中（这时，我们取内阻 $R_0=50\Omega$，$f_0=60MHz$，指长为 5mm）。可见，当指对数 N 减小时，插损很快增加。因此，增加带宽是以增加插损为代价的。

（三）三次行程信号干扰

除了插损和带宽以外，还需要考虑杂波干扰。对延迟线来讲，最重要的是三次行程信号干扰，这在6.5.3节已经作了说明。简单地说，为了减小三次行程信号，就要在失配状态下工作，这也是以

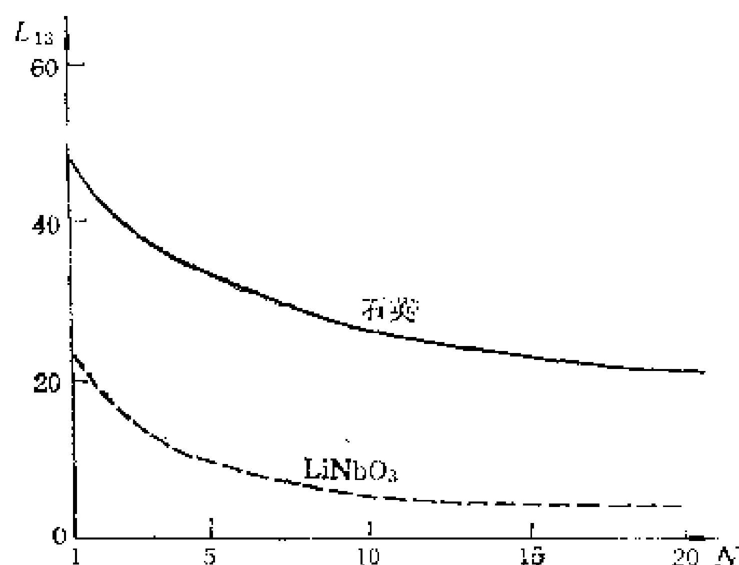


图6.5.10 传输损失与指对数关系

增加插损为代价的。另外一种可能的办法是采用单向换能器结构，但单向换能器的带宽受到限制。

(四)延迟温度系数(参见6.5.3)

作为延迟线，当然希望材料的温度系数越小越好，但正如前面已经说过，这时材料的耦合系数往往很小。另外一方面，如果希望用延迟线（或是下面所说用由延迟线所构成的延迟线振荡器），用来作温度敏感器件，这时正好相反，希望温度系数越大越好，以提高灵敏度。当然，作为温度敏感器件，还需要随温度变化的好的线性度，这就要求高阶的温度系数要小。

6.5.5 延迟线振荡器

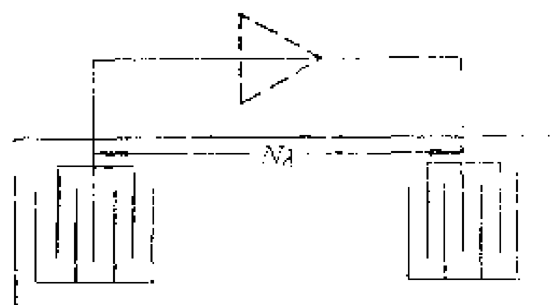


图6.5.11 声表面波延迟线振荡器结构原理

声表面波振荡器的原理结构如图 6.5 11 所示，它是由一个声表面波延迟线和一个放大器所构成的。延迟线输出经过放大器正反馈到它的输入端，因而只要放大器的增益能补偿延迟线的损耗，同时整个回路的相位为2π的整数倍，即

$$\begin{cases} A > IL \\ \Phi_D + \Phi_E = 2N\pi, \end{cases} \tag{6.5.22}$$

其中A为放大器增益，IL为延迟线的插损，Φ_D为延迟线相移，$\Phi_D = 2\pi f_0 l/V_s$，Φ_E为放大器的相移，通常$\Phi_D \gg \Phi_E$. l的典型值约为100—1000λ，而$\Phi_E < 2\pi$，所以相位振荡条件为

$$2\pi f_0 l/V_s \approx 2N\pi, \tag{6.5.23}$$

或 $$l = N\lambda.$$

因而可以在一系列频率处出现振荡. 如它在f_0上谐振，那么也可以在$f_0(1\pm1/N)$，$f_0(1\pm2/N)$，$f_0(1\pm3/N)$…上谐振，因而，声表面波谐振器是多模的. 为了使它在单模工作，常需要选模措施.

最通常的选模方法，是减小换能器带宽，即增加一个换能器的指对数. 达到N_0对时，窄带换能器的频响为

$$H(\omega) \propto \sin N_0 \pi\left(\frac{f-f_0}{f_0}\right) \Big/ N_0 \pi\left(\frac{f-f_0}{f_0}\right). \tag{6.5.24}$$

当$f = f_0$时，$H(\omega)$达到最大值，正好是振荡器的谐振频率. 而$H(\omega)$在$(f-f_0)/f_0 = \pm1/N_0, \pm2/N_0, \pm3/N_0$为零，因此，如果让$N_0 = N$，换能器的频响将正好抑制掉$f = f_0$以外的所有可能的振荡频率.

振荡器的频率稳定性. 在稳定度中的短期稳定度（≪ 1 s），主要决定于放大器的随机相位噪声的大小. 由于放大器相位变化$\delta\Phi_E$引起的频偏. 由式(6.5.22)可得

$$\delta f/f = -\delta\Phi_E/2\pi N, \tag{6.5.25}$$

其中N是声程的波长数，因而$2\pi N$在稳定度中起主要作用. 当N增加时，相同的$\delta\Phi_E$将引起较小的频移. 但并不是N越大越好，即声程越大越好，因为随着声程的增加，传播损耗也增加，从而限制了延迟线振荡器Q值的增加. 图 6.5.12 是 ST 石英的所谓有效Q_{eff}随传播路径长度l的变化曲线.

还要提出的是，如果在延迟线振荡器外回路引入一个相移器（例如压控相移器），就可构成可调频的振荡器（压控振荡器）. 为了避免不同模式间的跳动，附加的相移不能超过$\pm\pi/2$. 如果声程

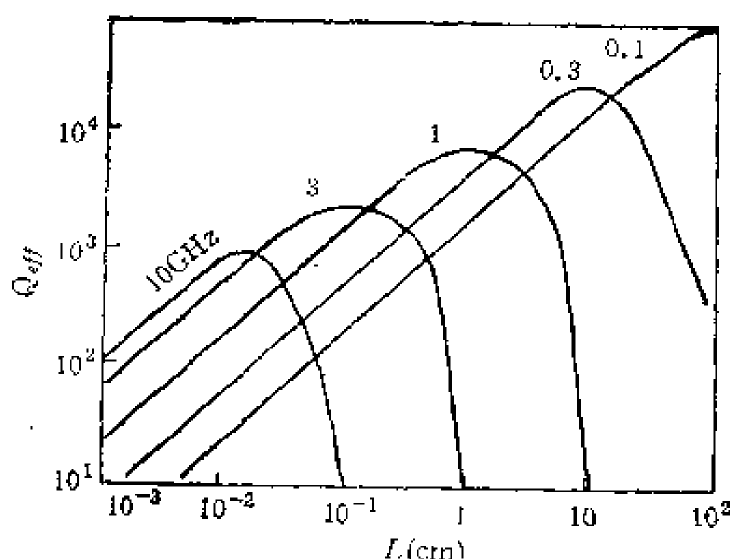


图6.5.12 ST石英的Q_{eff}随l的变化

为 $N\lambda$，那么可调频的范围为 $\pm 1/4N$. 由此可见，可调频的范围是与稳定度相矛盾的. 此外，有时我们反而让它多模工作，而让换能器作成宽带的，同时有足够长的声程，那么就可以在一个近似相同插损的带内有多种模式工作，这样就可构成频率综合器.

6.5.6 谐振器

大家知道，晶体谐振器是体声波的一个重要应用，它是利用声波在晶体片两个自由界面上的完全反射，而且反射波也是同一模式的体波，即用晶体本身界面所形成一个腔来形成晶体谐振器的.

对于声表面波，是否也能用体波同样的方法来构成谐振器呢？我们发现它是不可能的. 原因是我们不可能形成这样的界面，使表面波完全反射，而不造成任何模式转换，使表面波能量保持不变.

现在声表面波谐振器是采用所谓分布反馈式结构. 它是由一系列均匀周期排列的，具有较小的不连续结构（如金属条，或表面浅沟槽），即如6.4.3所述栅阵结构所组成，栅阵结构周期为 $\lambda/2$. 表面波通过这分布式结构时，在每一个不连续结构处，会有一个很小的反射，而绝大部分能量继续穿过此不连续结构，进入下一个不连续结构，这样穿透能量逐渐减少，而对反射波，由于 $\lambda/2$ 的间隔

而同相相加，当不连续结构足够大时，总能量反射系数接近 1．必须要指出的是，当在每一不连续结构对声表面波作一个小的反射的时候，也在此处形成一些散射的体波，而且可以说它的量级并不见得比声表面波小．但是对于这一系列间隔为声表面波波长的 $\lambda/2$ 的不连续结构，它们各自散射的体波并非是同相相加的．可以证明，很多条不连续结构散射的体波能量，并不比单独一个不连续结构散射的能量大多少，而反射的表面波能量却随着不连续结构的数目增加而单调增加．这样，如果我们使不连续结构有一个很小的不连续性（让不扰动区的等效特性阻抗为 Z_0，而不连续结构区的阻抗为 z_1，即 $z_1/z_0 \neq 1$，而很接近于 1，即 $|\Delta z/z_0| \ll 1$，$\Delta z = z_1 - z_0$），那么，入射的表面波能量被散射成体波的总散射能量就很小，而绝大部分被反射成相同模式的声表面波，这样就可以构成一个谐振器如图 6.5.13(a) 所示．把一个换能器放置在两组由许多不连续结构所构成的所谓反射栅阵之间，就构成所谓单端对谐振器．换能器也可以是两个，这时一发一收就形成所谓双端

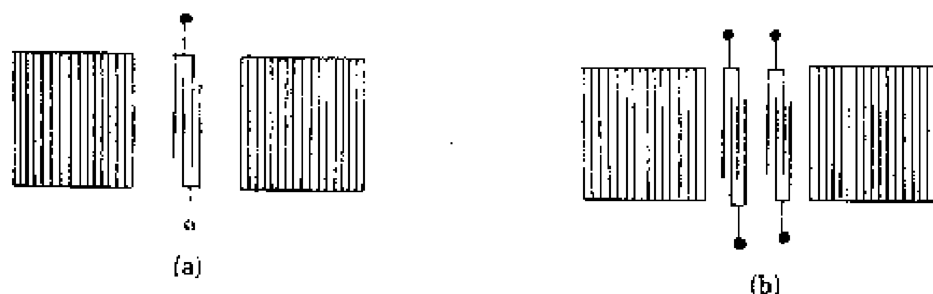


图6.5.13　谐振器结构

对谐振器，如图6.5.13(b) 所示．下面我们来看一下这样一个分布反馈结构所构成的腔是如何形成一个谐振器的．

我们考虑一个半无限的栅阵，所占区域为 $0 < x < \infty$．假设在 $x = 0$ 处激发，那么，根据(6.4.39)在 $\delta = 0$ 时有解

$$\begin{cases} A = A_+ e^{-|K| x}, \\ B = -\dfrac{|K|}{K} A_+ e^{-|K| x}, \end{cases} \tag{6.5.26}$$

而一个区域在 $-\infty < x \leqslant 0$ 的半无限栅阵，有解

$$\begin{cases} A = A_- e^{+|K|z}, \\ B = \dfrac{|K|}{K} A_- e^{+|K|z}. \end{cases} \tag{6.5.27}$$

在 $x=0$，我们得到反射系数

$$\Gamma = \frac{B}{A} = -\frac{|K|}{K}, Z = 0_+,$$

$$\Gamma = \frac{B}{A} = \frac{|K|}{K}, Z = 0_-.$$

这时，由于 $l \to \infty$，阻带将非常的窄而趋于零(参考图 6.4.23)．假如在两个栅阵间插入一个 1/4 波长段(或加波长的整数倍)，这样 $x=0_-$ 的反射系数 $\Gamma(x=0_-)$ 与 $x=0_+$ 的反射系数 $\Gamma(x=0_+)$ 是匹配的． 实际上，振幅 $a(x)$ 与 $b(x)$ 具有一个因子，分别为 $\exp[-j(\pi/\Lambda)x]$ 和 $\exp[+j(\pi/\Lambda)x]$．在阻带中心，波长是 2Λ，这样就构成一个谐振器，其振幅分布如图 6.5.14 所示．

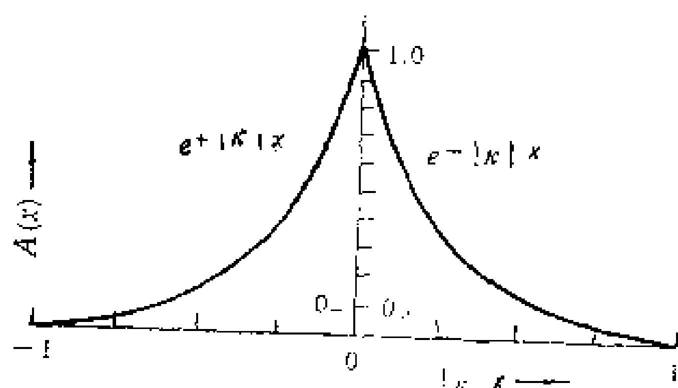


图6.5.14 两个半无限长的栅阵所构成的谐振器的振幅分布

对于实际的单端对谐振器(图6.5.13)，它的栅长有限，可以用图 6.5.15 的等效电路来表示，其中 C_T 为叉指换能器静电容，C_1、L_1 和 R_1 为动生电容、电感和泄漏电阻，它们分别为

$$C_T = NC_s',$$

$$R_1 = \frac{1-\Gamma}{1+\Gamma} R_0,$$

$$L_1 = L_{eff} R_0 / 4\bar{v}_s, \tag{6.5.28}$$

$$C_1 = 1/4\pi^2 f_0^2 L_1.$$

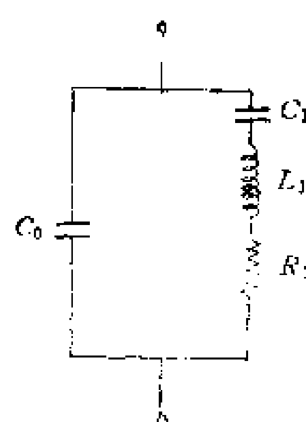


图6.5.15 单端对谐振器等效电路

其中N为叉指换能器对数，C_s'为一对叉指电容，R_0为叉指换能器辐射导的倒数：$R_0 = 1/G_0 = [8K^2 f_0 N^2 C_s']^{-1}$，见式(6.3.87)，$\Gamma$为栅阵的反射系数，由(6.4.44)所确定：$\Gamma = \frac{1-\rho^2}{1+\rho^2}$，$\rho = \left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^{N_B}$，$Z_1$和$Z_2$分别为扰动区和非扰动区的特性阻抗，$N_B$为栅阵的对数，$L_{eff}$为有效腔长，$L_{eff} = L_0 + 2L_T$，$L_T$为栅阵的有效长度，$v_s$为栅区平均声表面波声速. 显然这个谐振器的$Q$值为

$$Q = \omega L_1/R_1 = \frac{\pi}{2}\frac{L_{eff}}{\lambda_0}\frac{1+\Gamma}{1-\Gamma}. \tag{6.5.29}$$

由此式可以看到，反射系数越接近于1，腔长越长. 则Q越大，但是，腔长的增加，模间距将变小，容易产生多模，衍射也会发生，而衍射会引起损耗，这种损耗在上述等效电路中被忽略了，所以，它的应用受到限制. 另外，在上述等效电路中也忽略了体波辐射，这也是种损耗.

还需说明的是，作为谐振器，为了抑制衍射的影响，我们希望换能器栅阵的孔径要大些，但是栅阵本身是一个慢波结构，因此它本身就是一个波导. 当增加栅阵孔径即波导宽度，就会出现横向模式. 横向模式的出现会引起多模，造成谐振器谐振曲线不是一个单纯的峰，而会引起一些寄生峰，这导致谐振器本身性能变坏.

6.5.7 带通滤波器

我们在分析叉指换能器时指出，一个指对数为N，指长和周期相等的叉指换能器，它的脉冲响应是一个载频为同步频率f_0的矩形方波调制的脉冲，因而它的频响是一个中心频率在f_0的辛克函数；反过来，如果我们需要一个矩形的频谱，那么，在时域的响应就是一个辛克函数. 如图6.5.16所示. 因此，我们用声表面波叉指换能器，采取幅度辛克函数加权(最通常是指长加权)，就可以得到一个矩形的频响，即形成一个带通滤波器. 但由于辛克函数在时间域上是无限的，而材料的尺寸总是有限的，因而要对辛克函数进行截断. 而有限截断以后，频响将不是矩形，在带内引起波纹，带

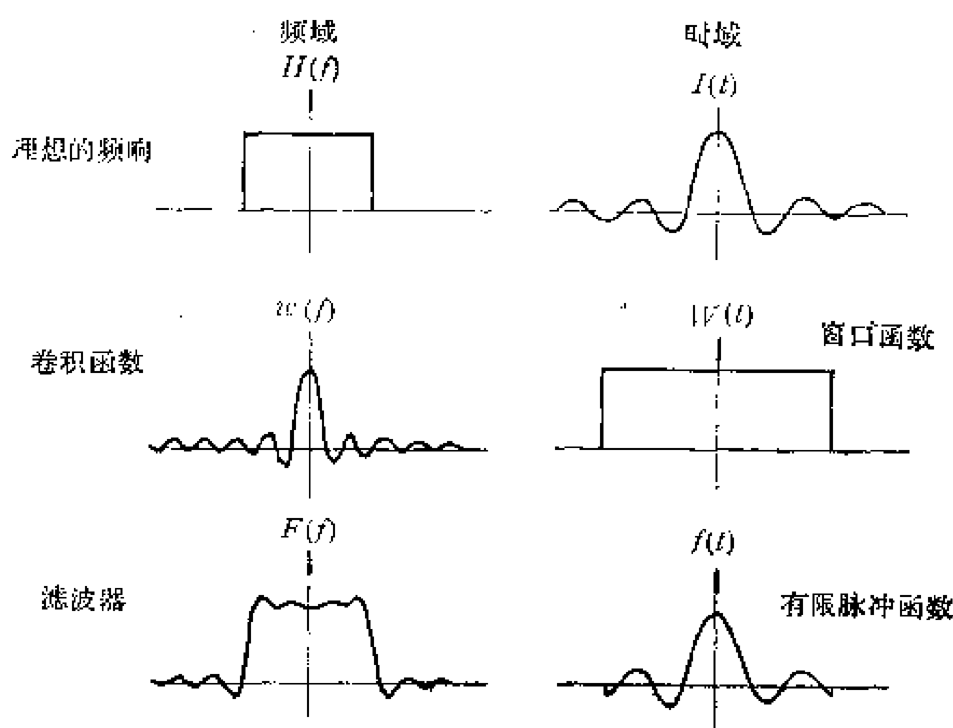


图6.5.16 滤波器的频响和脉响(有限截取、不加窗函数)

外出现旁瓣,并有一定的过渡带宽,这称之为吉布斯现象. 为了减小带内波纹和增加带外抑制,常采用窗口函数技术. 前述有限截断实际是一个矩形函数去截取辛克函数,而窗口函数是采用一个平滑函数代替矩形函数去截取辛克函数,这样可以达到上述目的,

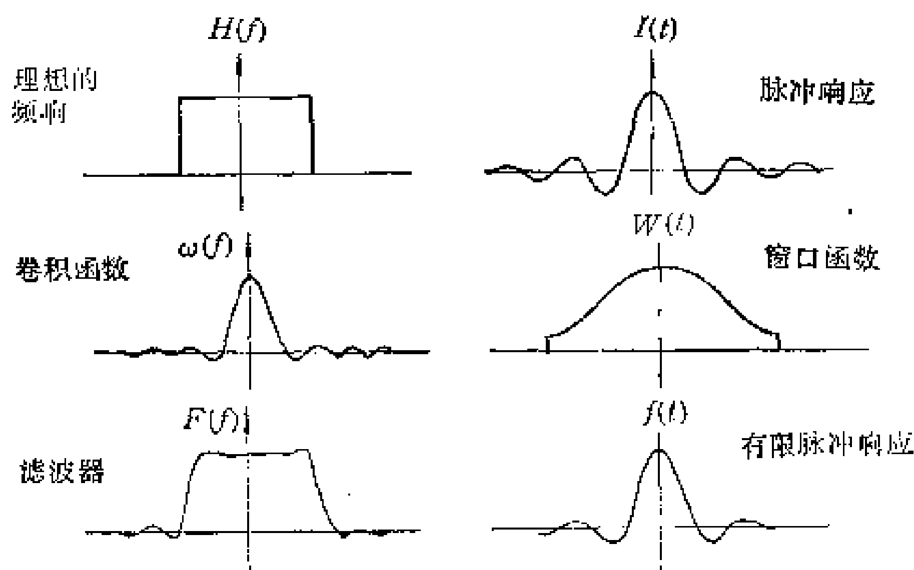


图6.5.17 采用窗函数后的结果

但是这是以增加过渡带宽为代价的，如图 6.5.17 所示．总之，对一个对称的带通滤波器，实际上关键的问题是选择适当的窗口函数．由于我们提出的设计要求只是诸如中心频率、带宽、带内波纹、带外抑制和过渡带宽，并非给出某个特定的频响曲线(很难这么规定出来)，因而实际的过程是用中心频率和带宽提出一个理想频响 $H(f)$，用反傅氏变换得到脉冲响应 $I(t)$，它在时间上是无限长的．为了截取，我们用一窗口函数 $w(t)$ 与之相乘，再作傅氏变换，即 $F[I(t)\cdot w(t)]$，计算出总频响后，看带内波纹，带外抑制和过渡带宽是否合乎要求（此时还要将接收的宽带换能器的频响考虑进去)．如能满足要求，就完成设计；如果不合适，就要再改变窗口函数，直到合适为止．此时，往往要在几个指标间采取折衷的考虑．可供选择的窗口函数很多，常用的有组合余弦平方函数(包括熟知的海明加权函数)、泰勒函数、凯塞尔函数、契比雪夫函数等．

还需要提起的是所谓“积木化”的设计方法．它的基本思想是，不论一个所需要的频响函数有多么复杂，我们都可以把它分解为一些简单的频响函数的叠加，简单可写成

$$H(f)=\sum_i W_i h(f-f_i).$$

比如 $h(f)$ 对应时间域上的矩形函数，即辛克函数形式 $\sin X/X$，那么两个 $\sin X/X$ 的频响叠加和它的合成频响，以及它相应的时域

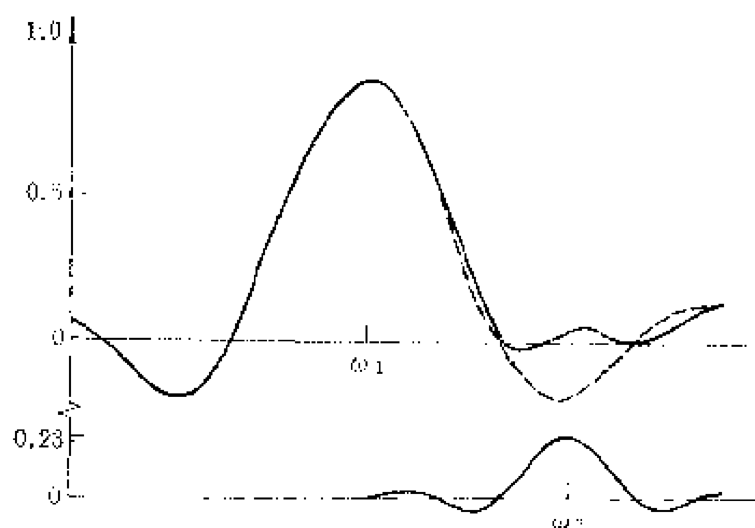


图6.5.18　积木化设计滤波器的频响和脉响

脉冲响应，就如图 6.5.18 所示.

与之相类似的是所谓数字傅里叶函数方法，如图 6.5.19. 设我们总可以把一对称的平顶梯形通带划分为一个个三角形函数之和，而对于每一个三角形通带的函数，它在时域上的傅氏变换是无限的. 为此，我们选取一个组合余弦平方函数来逼近它，即

$$W(t,T)=\begin{cases}0.44+0.5\cos2\pi t/T+0.07\cos4\pi t/T & |t|\leqslant T/2,\\ 0 & |t|\geqslant T/2,\end{cases}$$

它在时域上和频域上的形状如图 6.5.20 所示.

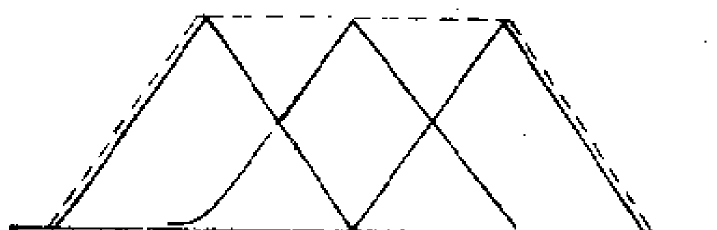


图6.5.19 用三角形迭加形成所需通带响应

带通滤波器具有表面波器件的特点：小型稳定可靠，并且它可以构成所需要的幅频响应特性. 最可贵的是，它在带内有很好的相频线性响应特性，这是其它带通滤波器很难做到的. 因为它是基于横向滤波器原理构成的，它的缺点是插入损耗较大.

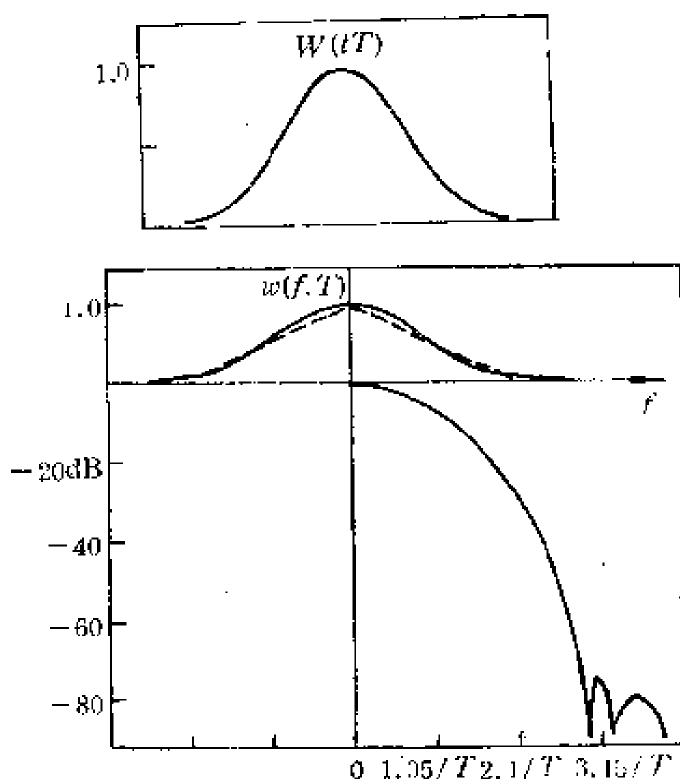


图6.5.20 余弦平方函数时域及频域的响应

目前带通滤波器应用较广，其中数量

最大的是电视中频滤波器.

6.5.8 脉冲压缩滤波器

脉冲压缩滤波器,又称色散延迟线,它的一个很重要的应用是解决雷达中作用距离与分辨率的矛盾. 要使作用距离远,就要求雷达发射能量大,在一定峰值电压下,则只有增加雷达信号的宽度;但是,如果要提高分辨率,则要脉冲越窄越好. 如果一个信号发射时有一个较宽的脉冲宽度,经过目标反射后,接收信号经过匹配处理,变成一个较窄的脉冲,那么就可以解决作用距离和分辨率的矛盾. 线性调频的信号就可以达到这样的目的. 此信号形式为

$$S(t)=\begin{cases}\exp\left[j2\pi\left(f_0t+\dfrac{\Delta f}{2\Delta T}t^2\right)\right] & |t|<\dfrac{\Delta T}{2},\\ 0 & |t|>\dfrac{\Delta T}{2}.\end{cases} \tag{6.5.30}$$

与它匹配的信号是与它具有相反的调频斜率的信号,它们卷积的结果是

$$h(t)=\begin{cases}\sqrt{\Delta f\cdot\Delta T}\dfrac{\sin\pi\Delta f\cdot t}{\pi\Delta f\cdot t}\cdot e^{j2\pi f_0 t} & |t|<\Delta T,\\ 0 & |t|>\Delta T.\end{cases} \tag{6.5.31}$$

上述信号形式上是一个辛克函数调制的信号,比较式(6.5.30)与(6.5.31)可见,(i) 原来信号宽度为 ΔT,如果取最后信号宽度是辛克函数的第一零点($\pm 1/\Delta f$ 处)的间距,它是 $2/\Delta f$,比输入信号的时间宽度缩小了 $\Delta f\cdot\Delta T/2$,如以 -4dB 处宽度计,则为 $\Delta f\cdot\Delta T$ 倍;(ii) 信号幅度大了$\sqrt{\Delta f\cdot\Delta T}$ 倍,因此,它的确达到了信号压缩的目的. 我们看到,此时压缩因子取决于所谓时间带宽乘积 $\Delta f\cdot\Delta T$,它是线性调频脉冲压缩滤波器最重要的指标. 在式(6.5.31)中,这两个矩形调制线性色散信号的卷积输出有旁瓣,第一个旁瓣在$\pm\dfrac{3}{2\Delta f}$;$h\left(\pm\dfrac{3}{2\Delta f}\right)\Big/h(0)=0.212$,($-13.46$ dB). 这样往往在实际应用中还不够,为此需要对上述两个信号之一加窗口函数,

常加的窗口函数是所谓海明函数，这时旁瓣可降低到 -42.16 dB. 但这时主瓣要加宽，根部(零到零) 要比辛克函数大一倍即 $4/\Delta f$，而 -4dB 宽度计要增加 1.4 倍左右.

声表面波器件很适合于作成这种器件，用前叙的 δ 函数模型观念，我们这样安排叉指换能器：一个是宽带换能器，另一个作成所谓色散换能器或线性调频换能器[图6.5.22(a)].这个叉指换能器中每一根指的位置按线性调频规律安排，即按式(6.5.31)，其相位每变化一个π就安置一个指，如图6.5.21所示.

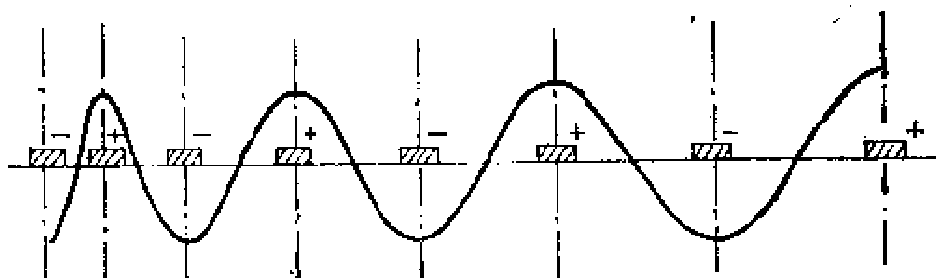


图6.5.21　线性调频换能器指位置的安排

那么，用一个 δ 脉冲激励它，宽带换能器就接收到一个线性调频信号，这种换能器结构有时称为展宽器. 在另外的一个所谓压缩器中，色散换能器与展宽器具有相反的斜率.

上面讲的是所谓单色散结构，还有另外一种双色散结构，如图6.5.22(b)所示，即每个器件中，两个叉指换能器都作成色散的.一个是正斜率，另一个是负斜率，而展宽器和压缩器的安置是相反的.

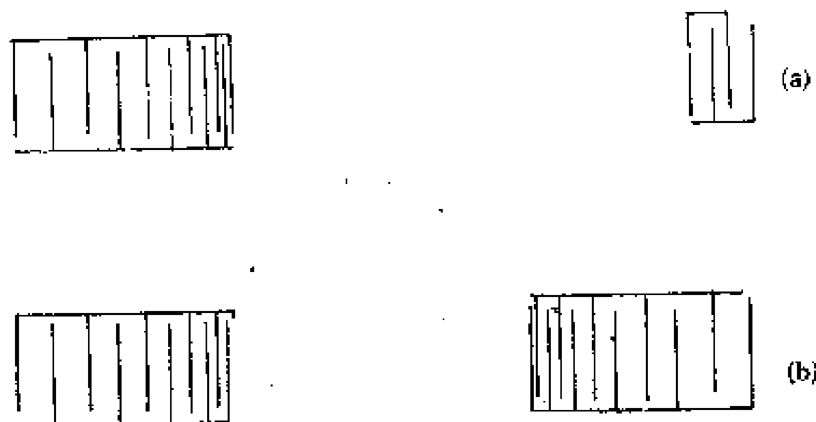
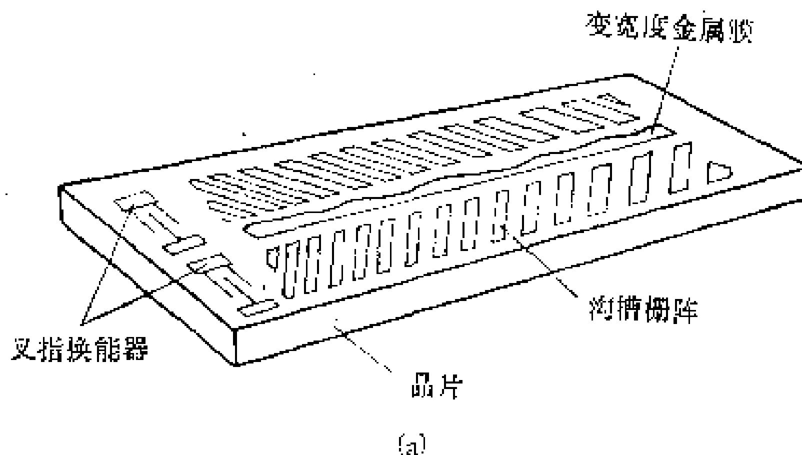


图6.5.22　单色散结构和双色散结构

这两种结构也统称为直列式结构(以区别下述的反射栅结构).这种结构加权也比较简单,即一个宽带换能器不加权,而色散换能器可采用振幅加权,最简易的方式是指长加权. 双色散结构中,可以对一个换能器加权,也可对两个换能器同时加权. 当然,在加权时还需要考虑到不同间隔指所对应的同步频率, 要考虑换能效率与频率的关系(见前面叉指换能器分析),指的密度显然也是与频率(即间隔倒数)成正比的,这些因素均要在加权时进行额外的补偿(这时也需要对不加权换能器进行补偿).

直列式结构有下述一些缺点:(i)在大时带积时,指对数将很多,一则工艺困难(不允许连指和较多的断指),二则阻抗很低,不易匹配,三则指间反射的因素要考虑(因此它往往不能选用耦合系数大的材料,如$LiNbO_3$,相反得采用耦合系数小的材料,如石英);(ii)由于是直列结构,所以体波效应比较严重;(iii)时延约为晶片的长度,它比下述反射栅结构要小.

为此,又提出另外一种结构,即反射栅结构,如图6.5.23所示.



(a)

图6.5.23(a) 反射栅结构

其中以沟槽反射栅性能最好. 这时沟槽被倾斜安置,使得声束经过两次直角反射,即经过一个U型通道. 对于在两垂直方向声速一致的材料呈45°安置,如声速不一样,那么将要求

$$\mathrm{tg}\theta=(v_s)_{out}/(v_s)_{in}. \tag{6.5.32}$$

对于两个方向声速一样的材料,反射系数最大的槽宽要求在声传播方向的槽宽的射影为$\lambda/2$,所以槽宽为$\lambda/2\sqrt{2}$,比直列式指宽

要大$\sqrt{2}$倍(那里指宽为$\lambda/4$).

对于浅沟槽，它的振幅反射系数与h/λ成正比，其中h为槽深. 对于$LiNbO_3$，振幅反射系数为$0.6(h/\lambda)$.

由此看来，由于声程走一个U形通道，因而时延长一倍，而体波干扰也小，另外沟槽只是作力学上的反射器，虽然数目多，但有断有连不会太影响性能. 而输入输出换能器是宽带换能器，所以指对数较小，工艺简单，而且阻抗易匹配. 另外，对浅沟槽来说，声速通过沟槽时的变化是个高阶效应，所以与由金属栅做成的直列式不同，那里经过栅后声速会变化. 此外，在沟槽反射栅结构中，可以在其间加金属带作相位补偿，以调整性能.

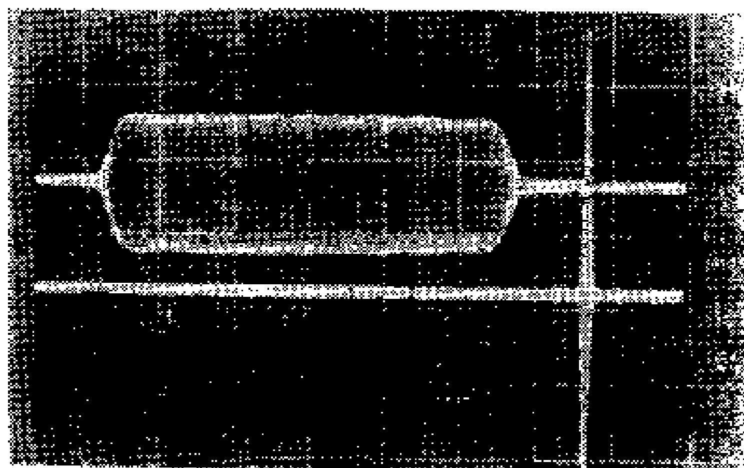


图6.5.23(b) 沟槽反射栅脉冲压缩滤波器结构及脉冲展宽和压缩波波形

声表面波脉冲压缩滤波器是声表面波器件中运用得十分成功的器件，它代替过去的体波延迟线，性能得到了很大的改善，体积减小，目前时带积可以达到10^4左右，最大时延达到125μs，带宽可达到500MHz以上，图6.5.23(b)就是一展宽线的脉冲展宽(线性调频)波形(上线)和一共轭的压缩线将脉冲压缩波形.

6.5.9 卷积器

声表面波卷积器是利用声表面波的非线性效应而实现卷积(或相关)处理的器件. 由于声表面波的能量集中在表面层附近几个波长内，因而它的能量密度可以很大，比较容易达到非线性. 利

用它可以实现信号卷积(相关)处理。

设有两个相向传播的信号

$$S_1 = S_1(t)e^{j(\omega_1 t - k_1 x)}, \qquad S_2 = S_2(t)e^{j(\omega_2 t - k_2 x)}. \tag{6.5.33}$$

在 $\omega_1 = \omega_2 = \omega_0$ 和 $k_1 = k_2 = k$ 时，它们非线性相互作用的信号为

$$\begin{aligned} V &= \int_{-\infty}^{+\infty} S_1(t) S_2(t) dt \\ &= e^{j2\omega_0 t} \int_{-\infty}^{+\infty} S_1\left(t - \frac{x}{V}\right) S_2\left(t + \frac{x}{V}\right) dt. \end{aligned}$$

令 $\tau = t - \dfrac{x}{V}$，则

$$V = e^{j2\omega_0 t} \int_{-\infty}^{+\infty} S_1(\tau) S_2(2t - \tau) dt. \tag{6.5.34}$$

由于基片限制，相互作用时间不可能为无限长. 但是如果互作用区的长度远大于波长，和远大于信号的长度，则上式是近似成立的. 那么，这样两个表面波相互作用就产生了一个卷积信号. 要注意两点，一是此时总的波矢 $k = k_1 - k_2 = 0$，即空间是不变化的，所以我们可以在互作用区用一个金属板提取信号；二是此时被卷积信号调制的填充频率是原信号的频率的两倍.

目前有下述几种卷积器 (因是非线性互作用，具体推导较复杂，我们从略)： (i)弹性卷积器. 它是利用表面波本身非线性实现卷积，但由于非线性是一个高阶效应，非线性效率总是较小的，因而一般结构它的卷积效率很低，故采取所谓束压缩结构，即把一个宽声束压缩成一个窄声束. 束压缩结构(见图6.5.23)有三种：一是所谓倒置喇叭结构；二是聚焦结构；三是一个条带耦合器结构. 目前束压缩弹性卷积器效率可达到 －70dBm. 图 6.5.24(d)是两个方波调制波形(上迹)经卷积器卷积后的三角波形. (ii) 声电卷积器. 它是利用声表面波在压电介质中传播时伴随的电场与其附近半导体的非线性相互作用所产生的. 在结构上有两大类(见图 6.5.25)： 一是气隙式结构，它是在压电介质表面上方一个很近的地方放置一个半导体 (通常是硅片)，中间保持一个均匀约

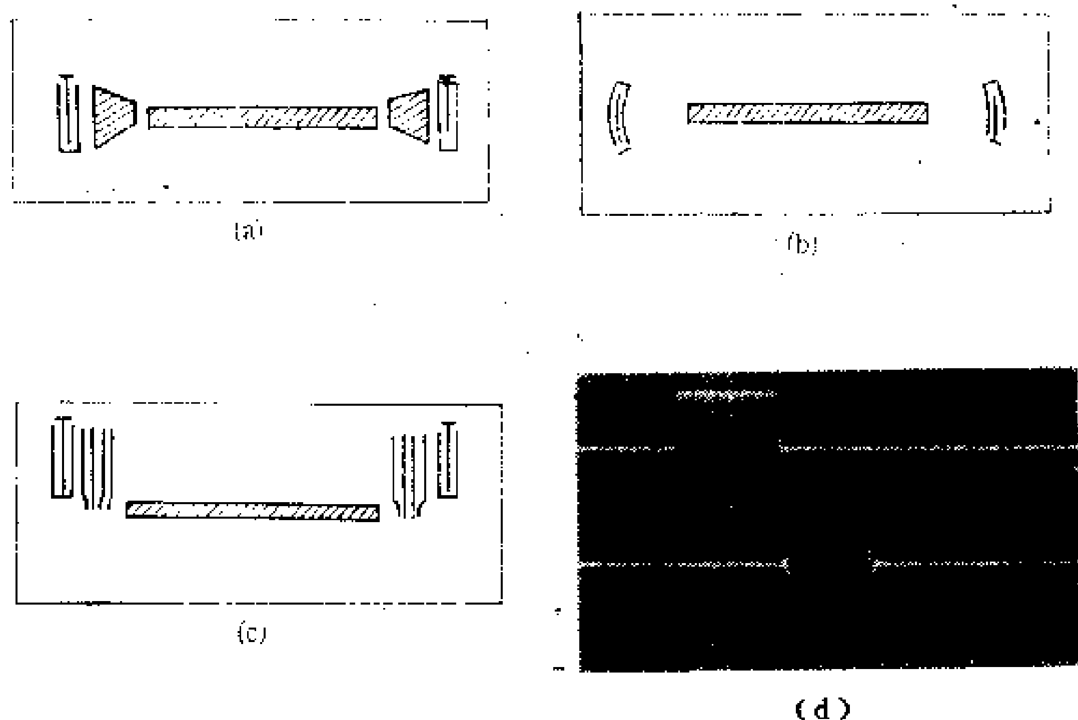


图6.5.24　弹性卷积器结构及卷积波形

1000 Å 的气隙；二是所谓单片式结构，它是在一个硅片基底上沉渍 ZnO 薄膜.

此外，声电卷积器除可以实现卷积外，还可以实现记忆卷积. 在半导体硅片上作上肖特基二极管或 P⁻N 结二极管，因为它充放电的时间常数不同，可用来实现记忆卷积.

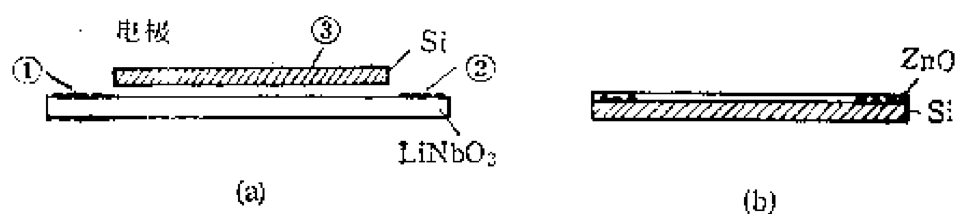


图6.5.25　声电卷积器结构
(a)气隙式；(b)单片式

6.5.10 声表面波系统

除上面讲的声表面波器件以外，还有一些种类器件，如声光器件等．单个声表面波器件就具有一定特性，所以单独用它就能获得一定功能，如谐振器作稳频源，色散线产生线性调频信号，等等。除此而外，一些表面波器件组合以及与其它一些元器件组合也可以构成具有某些功能的系统，称为声表面波系统．我们仅举频谱分析器为例来说明．

我们设信号$f(t)$的频谱满足下述傅氏变换：

$$F(\Omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-j\Omega t}dt, \qquad (6.5.35$$

而 $\quad -2\Omega t=(t-\Omega)^2-t^2-\Omega^2.$

令 $\quad \Omega=\sqrt{\mu}\tau, t=\sqrt{\mu}t',$

因而

$$F(\Omega)=\exp\left(-j\frac{1}{2}\mu\tau^2\right)\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{f(t')\exp\left(-j\frac{1}{2}\mu t'^2\right)\right\}$$

$$\times\exp\left\{+\frac{1}{2}\mu(\tau-t')^2\right\}dt', \qquad (6.5.36)$$

那么(6.5.36)式对应的功能，可以由图 6.5.26 中的系统来实现．

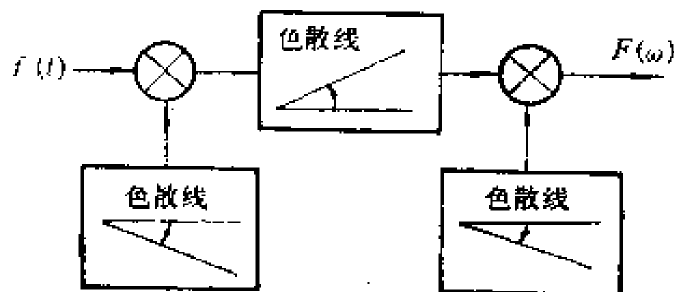


图6.5.26 声表面波频谱分析器

参 考 书 目

[1] Ed. A. A. Oliner, Acoustic Surface Waves, Springer-verlag (1978).

[2] Ed. H. Matthews, Surface Wave Filters, John Wiley & Sons (1977).

[3] D. P. Morgan, Surface-Wave Devices for Signal Processing, Elsevier (1985).

第七章 功率超声

林仲茂 史国宝

§7.1 概　　述

早在20到30年代，对强超声的效应就进行过大量的实验，并得到一些很有应用前途的结果，引起人们的兴趣和重视，从此，研究工作迅速开展，并形成了超声学发展较早的一个分支。

功率超声是利用超声振动形式的能量使物质的一些物理、化学和生物特性或状态发生改变，或者使这种改变的过程加快的这样一门技术。与检测超声不同，功率超声是利用超声能量来对物质进行处理、加工。最常用的频率范围是从几千赫到几十千赫，而功率由几瓦到几万瓦。

功率超声研究的主要内容包括大功率或高声强超声的产生系统，声能对物质的作用机理和各种超声处理技术及应用。声的产生、传播和接收是声学领域共同的基本问题，而声能对物质的作用机制则是功率超声较为独特的问题，也是一个比较复杂的问题。功率超声处理技术是否有其他技术所不能取代的优点，能否比其他技术更为经济方便，这往往是决定某种超声处理应用是否有发展前途的因素，为此必须了解和研究各种应用中的作用机理。

强超声在媒质中传播时，会产生一系列效应，如力学效应、热学效应、化学效应和生物效应等等。在力学效应中有搅拌、分散、除气、成雾、凝聚、冲击破碎和疲劳损坏作用；在热学效应中有声能被吸收而引起的整体加热、边界处的局部加热；在化学效应中可以促进氧化、还原，促进高分子物质的聚合或解聚作用等。这些效应是超声的次级效应，起因是以下的一些基本作用：(i) 线性的交变振

动作用.超声在媒质中传播时使质点作交变振动,如其位移振幅为 a,则振动速度和加速度分别为 ωa 和 $\omega^2 a$(ω 为声波振动圆频率),引起媒质中应力或声压周期性的变化,从而引起一系列的次级效应.(ii) 大振幅声波在媒质中传播时会形成锯齿形波面的周期性激波,在波面处造成很大压强梯度,因而能产生局部高温高压等一系列效应.(iii) 振动的非线性会引起一些直流定向力,其中最主要的是辐射力;此外还会在粒子间引起相互靠近的 Bernoulli 力,这些直流力可以说明一些定向及凝聚作用等力学效应.(iv) 空化作用会引起一系列次级效应,如分散、乳化作用和化学效应等等.在液体中进行超声处理时,大多与空化作用有关.

由于功率超声处理技术具有许多特点,与其他处理技术比较,常能大幅度提高处理速度和效率,提高处理质量和完成一般技术不能完成的处理工作.因此,在工业、农业、国防和医药卫生、环境保护等部门得到越来越广泛的应用.功率超声处理技术和应用主要有:超声清洗,超声加工,超声节能,超声塑料和金属焊接,超声搪锡,超声乳化、粉碎、分散、雾化、提取和除气;超声金属成型,超声加速干燥、过滤,超声处理种子,超声治疗和外科术等等.最近发展的一种超声悬浮移动新技术,可应用于无容器接触的材料制备;研究微量液体或生物组织的物理和力学性质.在航天飞机中作为一种太空实验技术.

随着功率超声应用领域的不断扩大,要求提供功率更大、声强更高的超声源.所以除了提高单个超声换能器的功率容量外,近年来还发展了功率合成的各种振动系统,并已在工业上得到应用.本章着重介绍功率超声产生系统(包括电声型和流体动力式)和功率超声的一些主要应用和作用机理.

§7.2 电声型功率超声产生系统

产生功率超声的方法主要有两种:一种是利用电声换能器产生超声,另一种是利用流体作动力来产生声和超声.本节讨论电

声型换能器功率超声产生系统．

在利用超声对物质进行处理加工时，常常需要有足够大的声功率才能对物质进行有效的处理．为获得大功率的超声，除了提高单个换能器的功率容量以外，在某些应用中，例如超声清洗，还时常采用多个换能器联合工作来获得大功率的超声．在超声处理的另一些应用中，例如超声加工和焊接，则不但需要大功率，而且需要较高的声强或振动幅度，才能达到良好的处理效果．在这种情况下，换能器的辐射端面常常连接一种变幅杆(聚能器)，将换能器辐射端面的微小位移振幅（一般几微米）加以放大，或者说把超声能量集中在较小的截面上，然后通过工具或直接对被处理对象进行处理加工．这种由换能器、变幅杆和工具等组成的功率超声产生系统，有时统称为超声振动系统．图 7.2.1 是用于超声加工的振动系统示意图．

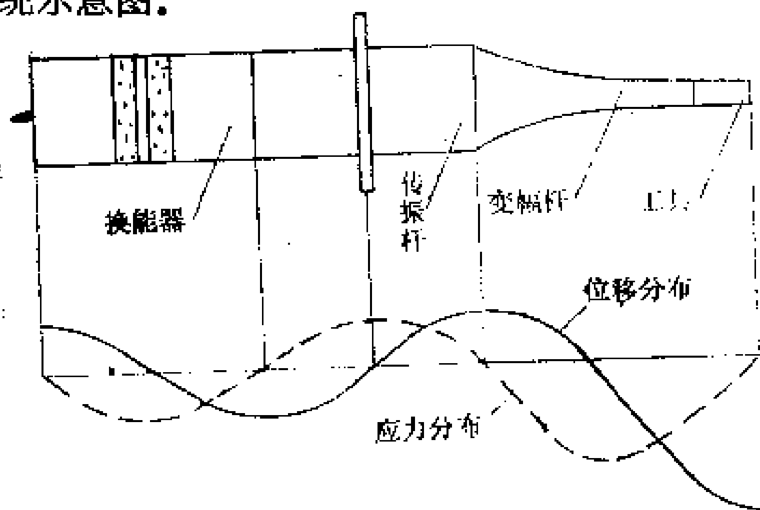


图 7.2.1　超声振动系统

下面分别讨论功率超声换能器、变幅杆和振动方向变换器．

7.2.1　功率超声换能器

电声型功率超声换能器实用上主要有两大类：一类是磁致伸缩换能器，另一类是压电换能器．磁致伸缩换能器又可分为由金属材料及由铁氧体做成的换能器．由金属材料如镍做成的换能

器，其机械强度高，稳定性好，但电声效率较低，一般约为20—30%；压电换能器的电声效率高，一般可达70—80%.

（一） 磁致伸缩换能器

（1） 磁致伸缩效应和磁致伸缩材料

当铁磁材料置于磁场中时，它的几何尺寸会发生变化，这一现象是 Joule 在 1847 年发现的，称为磁致伸缩效应. 一切铁磁材料都具有磁致伸缩效应，但效应的强弱随材料的不同有很大的差别. 在超声技术中最常用的金属材料有镍、铁钴钒和铝铁合金，非金属材料有镍钴、镍铜钴和镍锌等铁氧体.

根据铁磁材料在磁场中的几何尺寸变化的形式不同，磁致伸缩效应可分为纵向效应、横向效应、扭转效应和体积效应等. 超声换能器主要是利用纵向效应和扭转效应，下面简单地介绍纵向效应.

一根铁磁材料棒在外磁场的作用下沿着磁力线的方向产生伸长或缩短的现象称为纵向磁致伸缩正效应. 例如一根镍棒，在其上绕有电磁线圈，当线圈中通人电流时，镍棒就会沿轴向产生缩短的形变，当线圈中电流的强弱按一定频率变化时，镍棒就产生机械振动，而向周围介质发射声波.

磁致伸缩应变与材料的性质、加工方法和预先磁化的程度有关. 不同铁磁材料的棒，在相同的磁场强度 H 的作用下，所产生的伸长或缩短的大小是不相同的. 图 7.2.2 给出一些材料的磁致伸缩应变 $S=\dfrac{\Delta l}{l}$ 与磁场强度H的关系. 从图中可以看到，有些材料，例如铁，在弱磁场中伸长，而在强磁场中缩短；纯镍材料则总是缩短的.

从图 7.2.2 还可以看到，无论何种磁致伸缩材料都有磁致伸缩饱和现象，即当外加磁场强度由小逐渐加大时，应变开始随之增加，但当磁场增至一定程度以后，应变就不再增加了. 我们称此最大磁致伸缩应变为饱和磁致伸缩应变，并记为 $S_s(\Delta l/l)_s$，而对应的磁场强度为 H_s. 当然，不同的磁致伸缩材料，其 H_s 和 $(\Delta l/l)_s$

是不相同的．例如退火镍的 H_s 约为 600 奥斯特，S_s 约为 -36×10^{-6}．

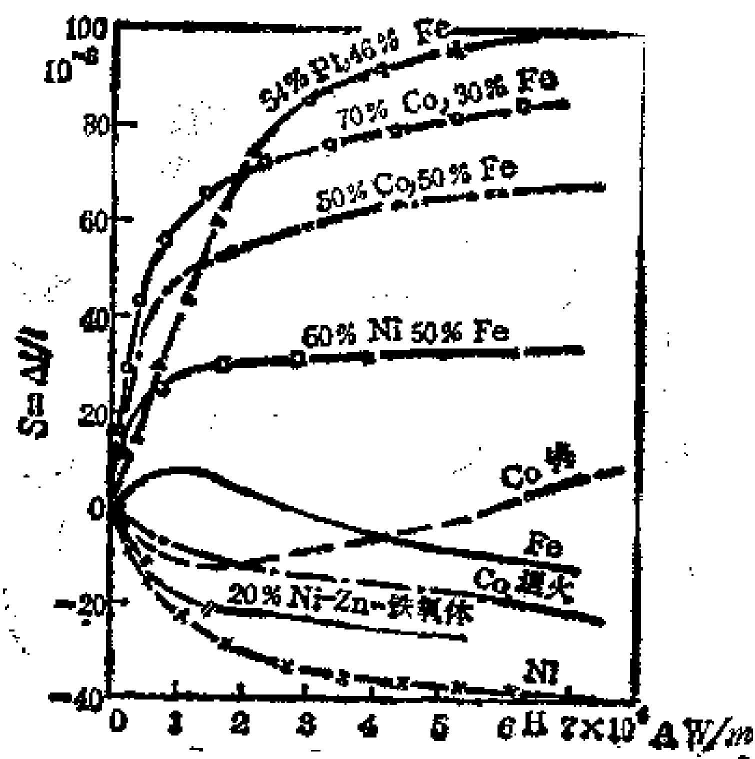


图 7.2.2 不同材料的磁致伸缩与磁场强度的关系

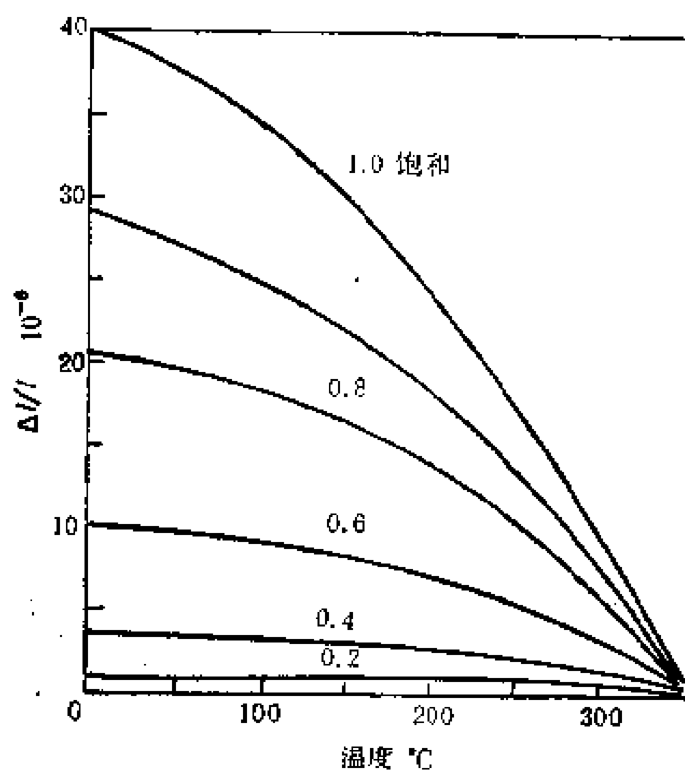


图 7.2.3 镍的磁致伸缩与温度的关系

材料的磁致伸缩应变受温度的影响很大. 图 7.2.3 给出镍磁致伸缩应变与温度的关系，随温度的升高，磁致伸缩效应逐渐减弱，温度达到 Curie 点时磁致伸缩效应完全消失.

我们知道，磁介质在外加磁场的作用下，磁感应强度 B 和外加磁场强度 H 之间不是线性关系，磁感应强度总是落后于磁场强度；磁致伸缩材料除了有磁介质的一般性质外，其磁致伸缩应变和磁场强度之间也具有非线性关系. 图 7.2.4 表示磁致伸缩应变和磁场强度之间的滞后关系. 由图中还可以看到另一个重要的特性：磁致伸缩应变与磁场的方向无关，即当磁场的方向改变而数值不变

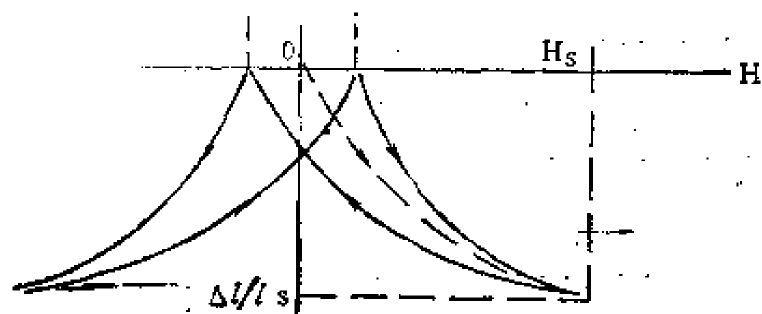


图 7.2.4　磁致伸缩应变和磁场强度之间的非线性关系

时，所产生的应变的大小及符号不变，说明应变 S 是磁场强度 H 的偶函数，即 $S=\Delta l/l=\varphi(H^2)$ 或 $S=\varphi(B^2)$.

实验表明，在棒自由情况下，

$$S=K(B)B^2,$$

式中 $K(B)$ 为比例系数，它是磁感应强度 B 的函数. 当磁感应强度 B 按角频率为 ω 的余弦律变化时，应变 S 的变化角频率为 2ω，而幅度较小，如图 7.2.5 所示. 当外加一恒定的磁感应强度 B_0，

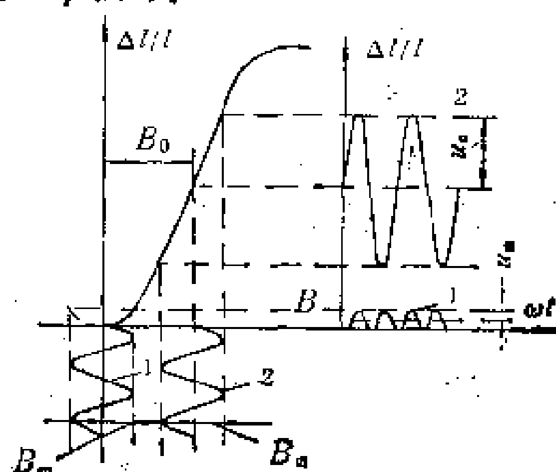


图 7.2.5　磁致伸缩应变与磁感应强度的关系

即工作在极化状态时，应变有恒定分量，基频和倍频分量. 基频分

量振幅比没有极化时大得多．当极化场足够大时，倍频分量很小，可略去不计．因此在实际应用中磁致伸缩换能器总是在极化的状态下工作．常常在激磁线圈中除通以高频电流外还通有直流电流，而对铁氧体磁致伸缩换能器则常用一恒磁铁氧体镶嵌在换能器磁路中以产生极化场．

我们知道，弹性体只有受到机械应力时，才能产生应变．既然棒在外磁场作用下能产生磁致伸缩应变，可见在棒内产生了机械应力，此力称为磁致伸缩应力 T_m，它可表示为

$$T_m = Y \cdot \frac{\Delta l}{l} = Y \cdot K(B) B^2,$$

其中，Y 为杨氏模量．在极化时可认为 $T_m = \alpha(B_0) \cdot B$，$\alpha(B_0)$ 称为磁致伸缩应力常数，是 B_0 的函数．

磁致伸缩逆效应

极化了的铁磁棒发生形变时，会在棒内引起磁场强度的变化，这种效应是 Villari 于 1865 年发现的，故也称为 Villari 效应．

具有恒定磁感应强度 B_0 的铁磁棒形变时，由于磁化状态的改变，附加的磁场强度为

$$H = \beta(B_0) S,$$

其中 H 为附加的磁场强度，S 为应变，$\beta(B_0)$ 为逆磁致伸缩常数，是 B_0 的函数，可以证明 $\beta(B_0) = 4\pi\alpha(B_0)$．

(2) 机电转换系数和机电耦合系数

设有一根截面积为 A 的铁磁棒，棒上绕有线圈，匝数为 N；线圈两端加正弦电压 V，在棒中建立的磁感应强度 B 为

$$B = \frac{\Phi}{A} = \frac{\int V dt}{NA} = \frac{V}{j\omega NA}.$$

按照磁致伸缩正效应，所产生的磁致伸缩力为

$$\begin{aligned} F_m = T_m A &= \alpha BA \\ &= \left(\frac{\alpha}{j\omega N}\right) V. \end{aligned}$$

同理，按照磁致伸缩逆效应，对已极化的铁磁棒有 $H = 4\pi\alpha S$，

式中H为交变磁场，它在线圈中产生相应的感应电流：

$$I_s = -\left(\frac{a}{j\omega N}\right)\dot{u},$$

$\dot{u}$ 为振动速度.

令
$$\varphi = \frac{a}{j\omega N},$$

则有
$$\begin{cases} F_m = \varphi V, \\ I_s = -\varphi \dot{u}. \end{cases}$$

我们称 φ 为磁致伸缩换能器的机电转换系数.

对于一个磁致伸缩振动系统，当它受外磁场作用时，必存在一部分机械能. 很明显，这一部分机械能是由系统中的磁能转换而来的. 对用于声发射器的系统，我们总希望从磁能中转换成较多的机械能. 为了定量表示，我们定义机电耦合系数 K_c，其平方值等于换能器受交变磁场作用所产生的机械能密度与系统中所贮藏的交变磁能密度的比值. 因此有

$$K_c^2 = \frac{\frac{1}{2}T_m^2/Y}{B^2/8\pi\mu} = \frac{4\pi\mu a^2}{Y}.$$

（3）棒型磁致伸缩换能器

磁致伸缩换能器有管状、圆环和棒型等结构形式. 在功率超声应用中，最常用的是棒型结构，如图 7.2.6 所示. 它由磁致伸缩芯和绕组组成. 为减小涡流损耗，金属材料做成的磁芯由薄片构成，片与片之间互相绝缘. 对镍片，厚度一般取 0.05—0.2 mm. 薄片在高温下表面形成氧化层而构成片与片之间的绝缘层. 确定换能器芯棒的长度和窗口大小以及盖板厚度时要考虑到换能器的工作频率和线圈的体积以及磁饱和的限

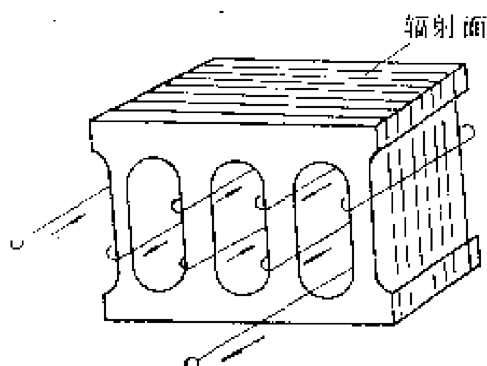


图 7.2.6 多窗磁致伸缩换能器

制．磁致伸缩换能器的辐射面一般取正方形，为达到大的辐射面，常采用如图7.2.6所示的多窗组成的换能器，这样可以减小横向振动，提高辐射效率．每根棒上所绕的线圈匝数相同，电流流过线圈的方向要使相邻棒中的磁通互相加强．选取绕组线圈的总匝数时要考虑换能器阻抗的大小，也要顾及最佳极化磁场的要求．

图7.2.6所示的多窗式磁致伸缩换能器，我们可以取其中一

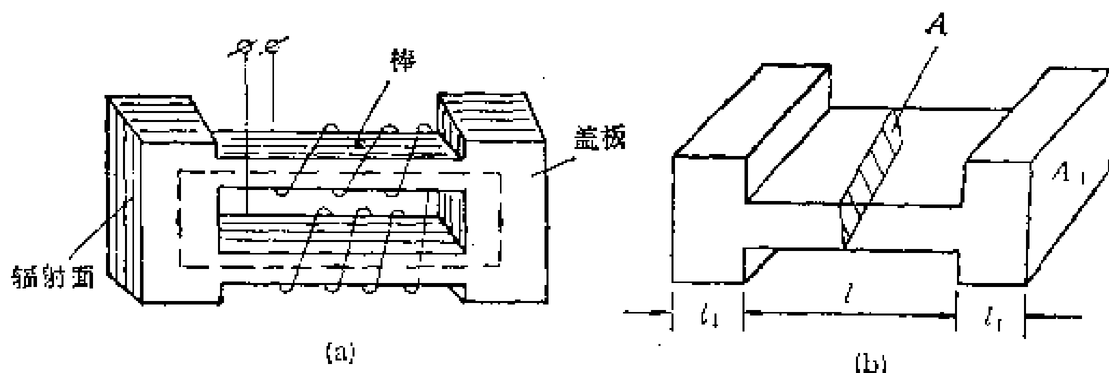


图7.2.7　棒型磁致伸缩换能器

个具有代表性的单元如图7.2.7(a)．这是一个完整的棒型磁致换能器，多窗换能器可以由若干个这样的换能器组成．图7.2.7(a)的磁致伸缩换能器芯可以用图7.2.7(b)的两端具有盖板的棒表示．我们从棒的机械运动方程及电路状态方程出发可以得到磁致伸缩换能器的基本方程为

$$\left.\begin{aligned}\frac{a}{j\omega N}V &= \frac{Z_0}{j\sin kl}(\dot{u}_1+\dot{u}_2)+jZ_0\dot{u}_1\mathrm{tg}\frac{kl}{2}+Z_1\dot{u}_1,\\ \frac{a}{j\omega N}V &= \frac{Z_0}{j\sin kl}(\dot{u}+\dot{u}_2)+jZ_0\dot{u}\,\mathrm{tg}\frac{kl}{2}+Z_2\dot{u}_2,\\ I &= \frac{V}{j\omega L_e}-\frac{a}{j\omega N}(\dot{u}_1+\dot{u}_2).\end{aligned}\right\}\quad(7.2.1)$$

其中 $Z_0=A\rho c$ 为磁致伸缩棒的特性力阻抗，ρ，c 分别为材料的密度及细棒中的纵波速度，$\dot{u}_1$，$\dot{u}_2$ 分别为棒两端的振动速度，Z_1，Z_2 则分别为棒两端的力阻抗，$k=\dfrac{\omega}{c}$ 为波数，V 是加在线圈两端的电

压，N 是线圈的匝数，$\frac{a}{j\omega N}$ 称为机电转换系数，l 是棒部分的长度.

方程 (7.2.1) 是在下列假设条件下得到的：即设棒与其两端盖板对称，且只有棒中具有磁致伸缩效应，盖板没有磁致伸缩效应，它仅仅是棒的机械负载，在棒及盖板中传播平面纵波；棒和盖板中存在的分布机械阻尼用等效的集总参数的机械阻 R_m 表示. 根据式(7.2.1)，用机电类比可以得到棒型磁致伸缩换能器发射状态的等效机电网络，如图 7.2.8 所示. 图中 $Z_e=j\omega L_e$，$\varphi=\frac{a}{j\omega N}$ 是

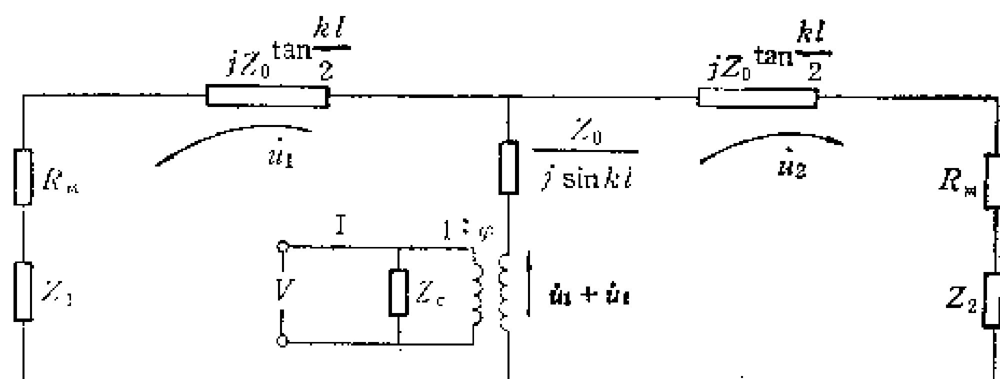


图 7.2.8　棒型磁致伸缩换能器发射状态的等效机电网络

机电转换系数. 通过 φ 可以将网络中的力学量转换为电端的电学量而得到换能器的等效电路. 在共振频率附近，可以用集总参数的等效电路代表，如图 7.2.9 所示. 电路中的并联分支 R_e，L_e 代表换能器不振动时的电阻抗. R_e 表示由于涡流和磁滞引起的电损耗；而 L_e 代表绕组的静态电感. 由 R_m，L_m 及 C_m 组成的分支表示由于机械振动所产生的阻尼、电感及电容，所以有时称之为动生阻抗.

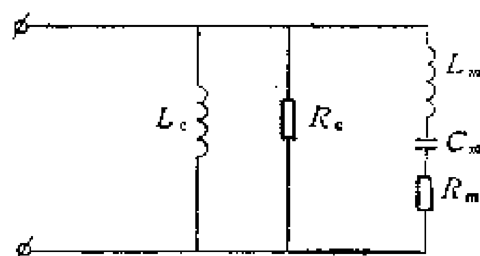


图 7.2.9　磁致伸缩换能器在共振频率附近的等效电路

由图 7.2.8 机电等效网络，在获得最大振动速度的条件下，可以得到机械共振频率方程：

$$\mathrm{tg}(k_0 l_1)\,\mathrm{tg}\left(\frac{k_0 l}{2}\right)=\frac{A}{A_1},\tag{7.2.2}$$

式中 $k_0=2\pi f_0/c$，f_0 为共振频率，A 为棒的横截面积，A_1 为盖板面积，l_1 为盖板厚度，l 为棒的长度.

令

$$l_1=\frac{\gamma\lambda_0}{4},$$

$$\frac{l}{2}=\frac{\eta\lambda_0}{4},$$

$$q=\frac{A}{A_1},$$

式(7.2.2)可改写为

$$\mathrm{tg}\left(\frac{\gamma\pi}{2}\right)\mathrm{tg}\left(\frac{\eta\pi}{2}\right)-q=0.\tag{7.2.3}$$

由式(7.2.3)，取 $q=0.2-1.0$，可以给出图7.2.10. 利用它可以

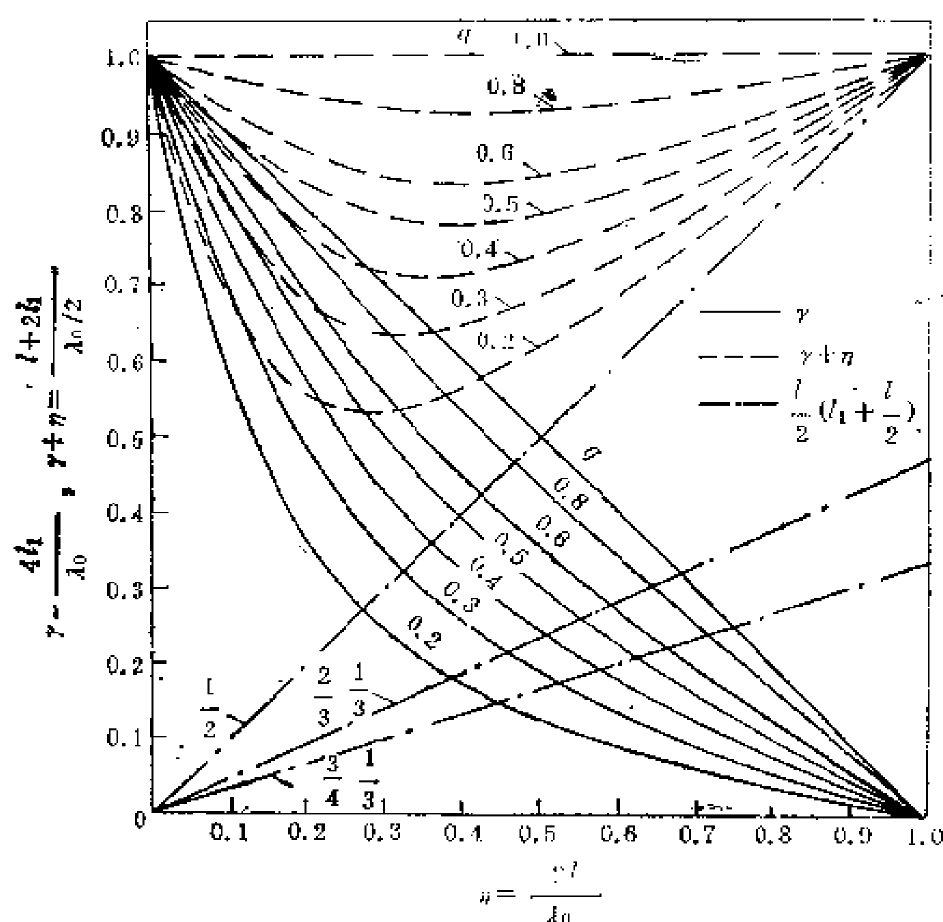


图 7.2.10 共振时换能器芯几何尺寸之间的关系

很快地确定换能器芯共振时的几何尺寸。例如，当给出 l_1 及 f_0 时可计算 l 值.

（二）压电换能器

前面提到，由于压电换能器的电声效率高，所以在功率超声技术中得到广泛的应用. 因为功率超声技术主要是利用声能对物质进行加工处理的一门技术，所以效率问题是首先要考虑的重要问题.

功率超声的应用，绝大部分是在低频超声范围. 为了降低压电换能器的工作频率，常采用一种在片状压电体的两端面夹以金属块而组成的夹心式压电换能器，或称为复合压电换能器. 这种换能器结构是法国物理学家 Langevin 首先提出来的，所以又称 Langevin 换能器. 由于压电体的抗张强度差，所以常常通过金属块给压电体施加预压力，使压电体在强烈的振动时也始终处于压缩的状态，避免压电体破裂。

夹心式压电换能器可以通过改变金属块的厚度来获得不同的工作频率，制作方便，在功率超声应用中广泛被采用. 所以下面着重讨论这种换能器的频率及效率问题. 先讨论有力、电负载和损耗时的普遍情况，然后再讨论几种特殊情况及常用的换能器结构.

(1) 夹心式压电换能器的基本结构和等效网络

夹心式压电换能器的基本结构如图7.2.11所示. 换能器由两金属块和压电片组成. 材料密度，纵波声速，特性阻抗和各元件长

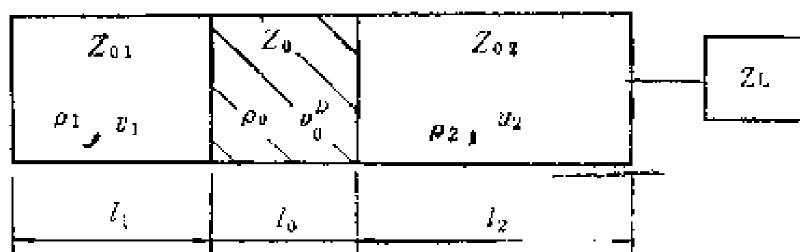


图 7.2.11 夹心式压电换能器的基本结构

度分别以 ρ、v、Z_0 及 l 表示，下标 1，2 代表金属块. 换能器的负载力阻抗以 Z_L 表示。

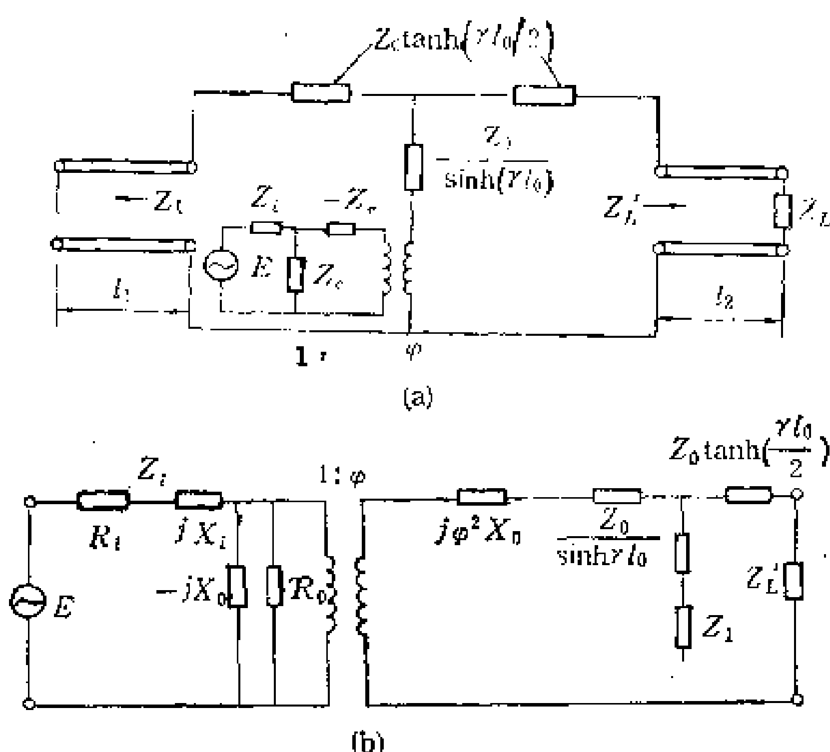


图 7.2.12 有负载的夹心式压电换能器的等效网络

分析这种结构换能器时，不考虑加压对换能器的影响(实际应用时常沿轴线用螺钉将金属块和压电片夹紧)。考虑一维纵振动情况，压电元件部分可用 Mason 的等效网络分析，而两端金属块作为压电元件的负载，以声传输线表示，则具有单边力负载阻抗Z_L的夹心式压电换能器的等效网络如图7.2.12(a) 和 7.2.12(b) 所示：图中 $Z_i = R_i + jX_i$ 为包括电源内阻抗的外电路所连接的电阻抗，R_0 表示压电元件的介电损耗．等效网络中的机械元件用双曲线函数表示是考虑了压电元件以及金属棒的机械损耗.

双曲线函数可以写成下列形式：

$$Z_0\tanh\left(\frac{\gamma l_0}{2}\right) = R + jX,$$

$$\frac{Z_0}{\sin h(\gamma l_0)} = R' + jX',$$

$$Z_1 = Z_{01}\tanh(\gamma_1 l_1) = R_1 + jX_1.$$

而等效负载为：

$$Z_L' = \frac{[Z_L + Z_{02}\tanh(\gamma_2 l_2)]}{[1+(Z_L/Z_{02})\cdot\tanh(\gamma_2 l_2)]} = R_L + jX_L.$$

当把电学端的量转换到力学端时，可以得到如图7.2.13的等效力学网络.

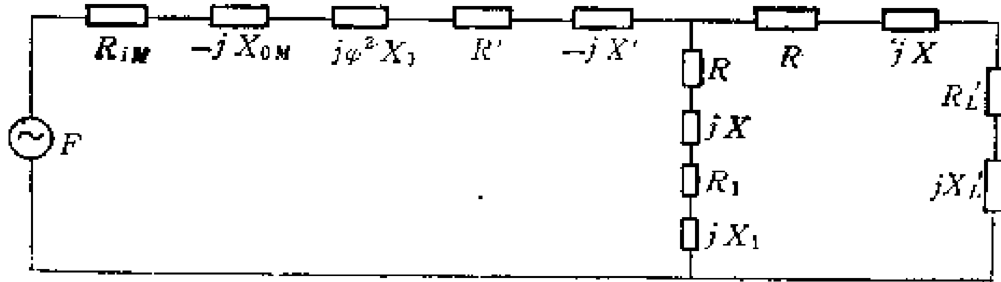


图 7.2.13　有负载夹心式压电换能器的等效力学网络

(2) 夹心式压电换能器的共振频率

由图7.2.13的等效力学网络并用 Thevenin 定理，可以得到振动速度最大时的共振频率的一般表达式为

$$R_e' x_{ee} = x_e' R_{ee}. \qquad (7.2.4)$$

上式和压电体及金属块的几何尺寸、材料的物理参数(如压电材料的纵向耦合系数 K_{33}，介电常数、密度、声速、机械损耗)以及电阻抗 Z_i 和负载力阻抗 Z_L 等有关，计算较为复杂. 下面仅给出几种特殊情况下夹心式压电换能器的频率计算式，有些在工程中是常用的。

(i) 两金属块的材料及厚度不同，忽略电和机械损耗，电端接有电抗 X_i 而负载为纯力阻 R_L 时换能器的频率式。

对这种情况，式(7.2.4)可简化为

$$Z_0\left(\operatorname{ctg}\theta_0 + X_{i0}\frac{K_{33}^2}{\theta_0}\right) = \frac{MZ_1Z_2 - PZ_0^2}{2PZ_0 + PZ_1 + MZ_2}, \qquad (7.2.4a)$$

其中　$P = 1 + (m_L \operatorname{tg}\theta_2)^2, m_L = \dfrac{R_L}{Z_{02}},$

$$M = 1 - m_L^2,\quad Z_0 = Z_0 \operatorname{tg}\left(\frac{\theta_0}{2}\right),$$

$$Z_1 = Z_{01}\mathrm{tg}\theta_1, \quad Z_2 = Z_{02}\mathrm{tg}\theta_2, \quad X_{i0} = \frac{X_0}{(X_i - X_0)},$$

$$Z_{0i} = A_i\rho_i v_i, \quad \theta_i = \beta_i l_i (i = 0, 1, 2),$$

A_i，ρ_i 及 v_i 分别为相应元件的横截面积和材料的密度及纵波速度，$\beta_i = \dfrac{\omega}{v_i}$。

由式(7.2.4a)可见，电端所连接的电抗 X_i 及输出端的负载阻 R_L 对换能器的共振频率都有影响。

(ii) 两金属块的材料及厚度不同，忽略损耗，电抗 X_i 为零及空载时换能器的频率式。

由式(7.2.4a)可进一步简化得

$$Z_0\left(\mathrm{ctg}\,\theta_0 - \frac{K_{33}^2}{\theta_0}\right) = \frac{Z_1 Z_2 - Z_0^2}{2Z_0 + Z_1 + Z_2}, \qquad (7.2.5a)$$

或

$$\mathrm{ctg}\,\theta_0 - \frac{K_{33}^2}{\theta_0} = \frac{(m_1\,\mathrm{tg}\,\theta_1)(m_2\,\mathrm{tg}\,\theta_2) - \left(\mathrm{tg}\dfrac{\theta_0}{2}\right)^2}{m_1\,\mathrm{tg}\,\theta_1 + m_2\,\mathrm{tg}\,\theta_2 + 2\mathrm{tg}\dfrac{\theta_0}{2}}, \quad (7.2.5b)$$

其中

$$m_1 = \frac{Z_{01}}{Z_0}, \quad m_2 = \frac{Z_{02}}{Z_0}.$$

由公式(7.2.5a)我们分两种情况，给出实际中常用的由两压电片组成的夹心式压电换能器的频率公式。

(a) 厚电极对称结构

这类换能器的结构如图7.2.14所示，在两压电片之间夹有一定厚度的电极片用以改善散热。如果两压电片的性能及尺寸一样，两金属棒的材料及长度也相同，空载时，则换能器以0—0为中线，两边是对称的。此时只需要讨论其中的一半。由于0—0线处于波节面，振动位移为零。这相当于电极厚度的一半所构成的声传输线的负载阻抗为无限大，此时 $z_2 = -Z_{03}\,\mathrm{ctg}\,\theta_3$。若以 l_3 代替式(7.2.5)中的 l_2，则得

$$\operatorname{tg}\theta_1=\frac{1}{m_1}\left[W-\frac{\left(W+\operatorname{tg}\frac{\theta_0}{2}\right)^2}{W+m_3\operatorname{ctg}\theta_3}\right], \tag{7.2.6}$$

其中 $W=\operatorname{ctg}\theta_0-\frac{K_{33}^2}{\theta_0}$, $m_3=\frac{Z_{03}}{Z_0}$, $\theta_3=\frac{\omega l_3}{u_3}$,

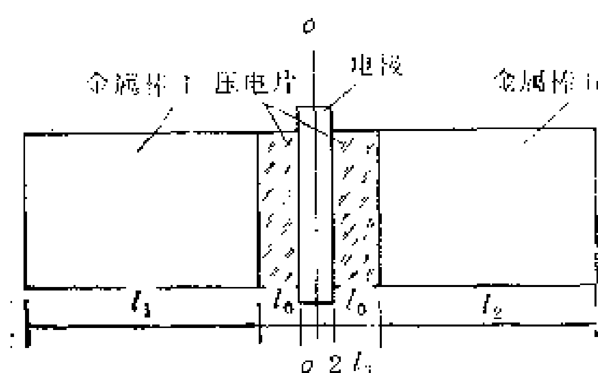


图 7.2.14 厚电极对称结构换能器

v_3 为电极材料中的纵波声速.

(b) 薄电极结构

这种结构相当于图 7.2.14 中 $l_3\to0$ 的情况，由式(7.2.6)简化可得到

$$\operatorname{tg}\theta_1=\frac{1}{m_1}\left(\operatorname{ctg}\theta_0-\frac{K_{33}^2}{\theta_0}\right). \tag{7.2.7}$$

(iii) 厚电极不对称结构换能器的机械共振频率

在功率超声的实际应用中，常需要一种不对称结构的压电换能器. 在换能器的节面作固定支撑. 图 7.2.15 是图 7.2.14厚电极的一种不对称结构. 其振动位移节面处在金属棒 II 与压电片的交界面. 图7.2.15 中 1 为金属棒，3 为电极；2 、4 为压电片. 金属棒 I，电极 3 及两压电片 2、4 在机械上串联，连接组成位移节面(o—o线)左边的一段；而金属棒 II（虚线部分）的长度为四分之一波长. 当不考虑机电耦合，把波节面左边的四个元件作为纯弹性体处理时，在相应的边界条件下由波动方程可以得到机械共振频率方程为

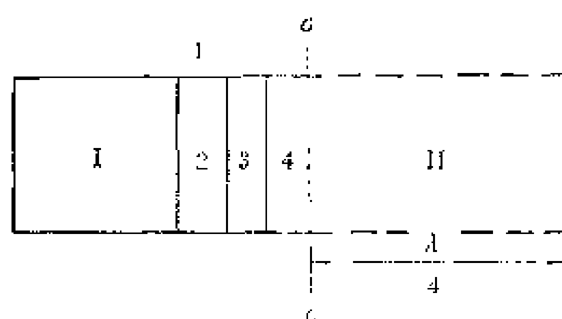


图 7.2.15 由两压电片及厚电极组成的非对称结构换能器

$$\frac{Z_{01}}{Z_{02}}\operatorname{tg}\theta_1\operatorname{tg}\theta_2+\frac{Z_{02}}{Z_{03}}\operatorname{tg}\theta_2\operatorname{tg}\theta_3+\frac{Z_{03}}{Z_{04}}\operatorname{tg}\theta_3\operatorname{tg}\theta_4$$

$$+\frac{Z_{01}}{Z_{03}}\operatorname{tg}\theta_1\operatorname{tg}\theta_3+\frac{Z_{01}}{Z_{04}}\operatorname{tg}\theta_1\operatorname{tg}\theta_4+\frac{Z_{02}}{Z_{04}}\operatorname{tg}\theta_2\operatorname{tg}\theta_4$$

$$-\frac{Z_{01}Z_{03}}{Z_{02}Z_{04}}\operatorname{tg}\theta_1\operatorname{tg}\theta_2\operatorname{tg}\theta_3\operatorname{tg}\theta_4=1, \tag{7.2.8}$$

其中 Z_{0i} 及 $\theta_i(i=1,2,3,4)$ 分别为各段材料的特性力阻抗及相长．如果图7.2.15中只有1,2,3三个元件机械串联，则式(7.2.8)可简化为

$$\frac{Z_{01}}{Z_{02}}\operatorname{tg}\theta_1\operatorname{tg}\theta_2+\frac{Z_{02}}{Z_{03}}\operatorname{tg}\theta_2\operatorname{tg}\theta_3+\frac{Z_{01}}{Z_{03}}\operatorname{tg}\theta_1\operatorname{tg}\theta_3=1, \tag{7.2.9}$$

和式(7.2.6)不计及机电耦合时的结果相同．

图7.2.16是利用式(7.2.5a)计算金属棒分别由钢、钛合金与铝合金组合，在不同频率(15—25kHz)时金属棒长度 l_1 和 l_2 之间的关系的结果．图7.2.16只给出压电元件厚度为1.2 cm时的三个频率．知道频率及两金属棒中的任一根长度，就可以查出另一根金属棒的长度．

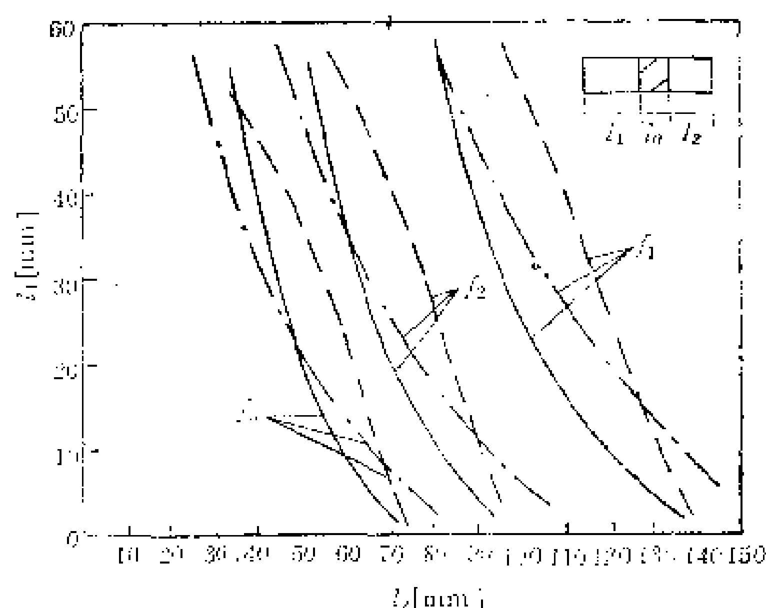


图7.2.16 共振频率 f_1(15kHz)，f_2(20kHz)，f_3(25kHz)时 l_1 与 l_2 之间的关系
——l_1 为钢，l_2 为铝；-----l_1 为铝，l_2 为铝；-·-·-·-l_1 为钢，l_2 为钛合金

图7.2.17和7.2.18是由式(7.2.6)和(7.2.7)对实际中常用的几种材料计算频率与长度 l_1 的关系曲线．只要确定使用的材

料及工作频率，由图中就可以直接查到所需要的长度 l_1.

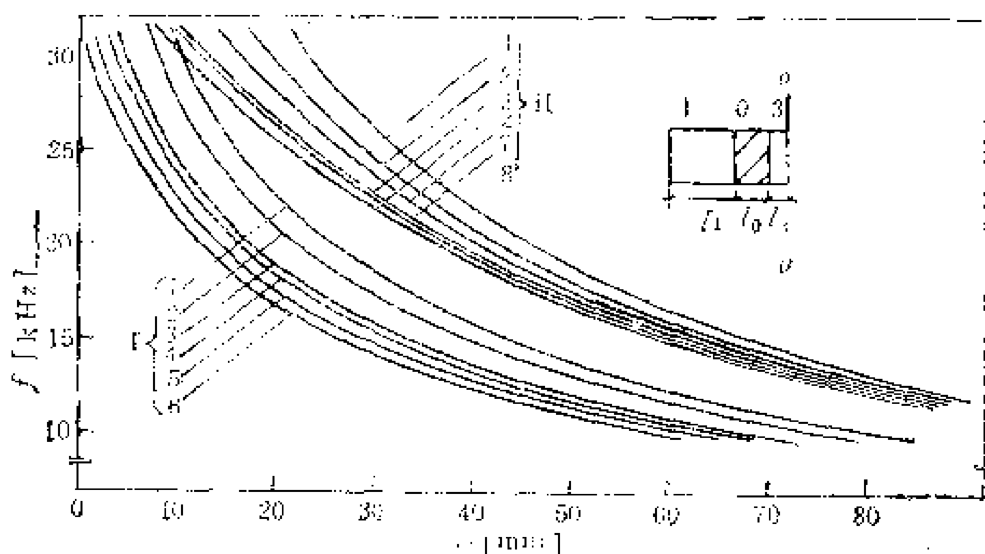


图 7.2.17 计算频率 f 与长度 l_1 的关系曲线

1. $l_0=10\text{mm}$, 2. $l_0=12\text{mm}$, 3. $l_0=15\text{mm}$, 4. $l_0=16\text{mm}$ } $l_1=4\text{mm}$

5. $l_1=6\text{mm}$, 6. $l_1=8\text{mm}$ } $l_0=16\text{mm}$

7. $l_1=6\text{mm}$, 8. $l_1=8\text{mm}$ } $l_0=12\text{mm}$

Ⅰ. 金属棒 1 为钢，电极 3 为铝合金，压电片为 PZT-8

Ⅱ. 金属棒 1 为铝合金，电极 3 为铝合金，压电片为 PZT-8

（3）夹心式压电换能器的效率

由等效网络图7.2.13，可以得到在共振频率时的电声效率为

$$\eta_{ea}=\frac{1}{1+(R_s+R)/R_L'}. \qquad (7.2.10)$$

由式(7.2.10)可见，R_L' 越大，效率越高. 当金属棒Ⅱ(与负载连接的一端)的损耗可以忽略时，

$$R_L'=[R_L(1+\text{tg}^2\theta_2)]/[1+(R_L/Z_{02})^2\text{tg}^2\theta_2].$$

当 $l_2=\lambda_2/4$ (λ_2 为金属棒Ⅱ中的纵波波长)时，$R_L'=Z_{02}^2/R_L$. 可见当 $R_L<Z_{02}$ 时，例如水负载情况，R_L 比金属棒Ⅱ的特性阻抗 Z_{02} 小得多，则四分之一波长段的金属棒相当于一个阻抗变换器. 众所周知，它能把低阻抗的负载变换为较高的阻抗，改善声负载的匹配，从而提高效率.

图 7.2.19 和表 7.2.1 是利用式(7.2.5)的理论计算和实验结

果的比较．计算时取金属棒材料为铝合金，压电片材料为PZT-8．固定 l_2 为62mm，改变 l_1．取 $v_1=5.07\times10^6$ mm/s，$l_0=6.5$ mm，$k_{33}=0.64$，$v_0=3.57\times10^6$ mm/s．

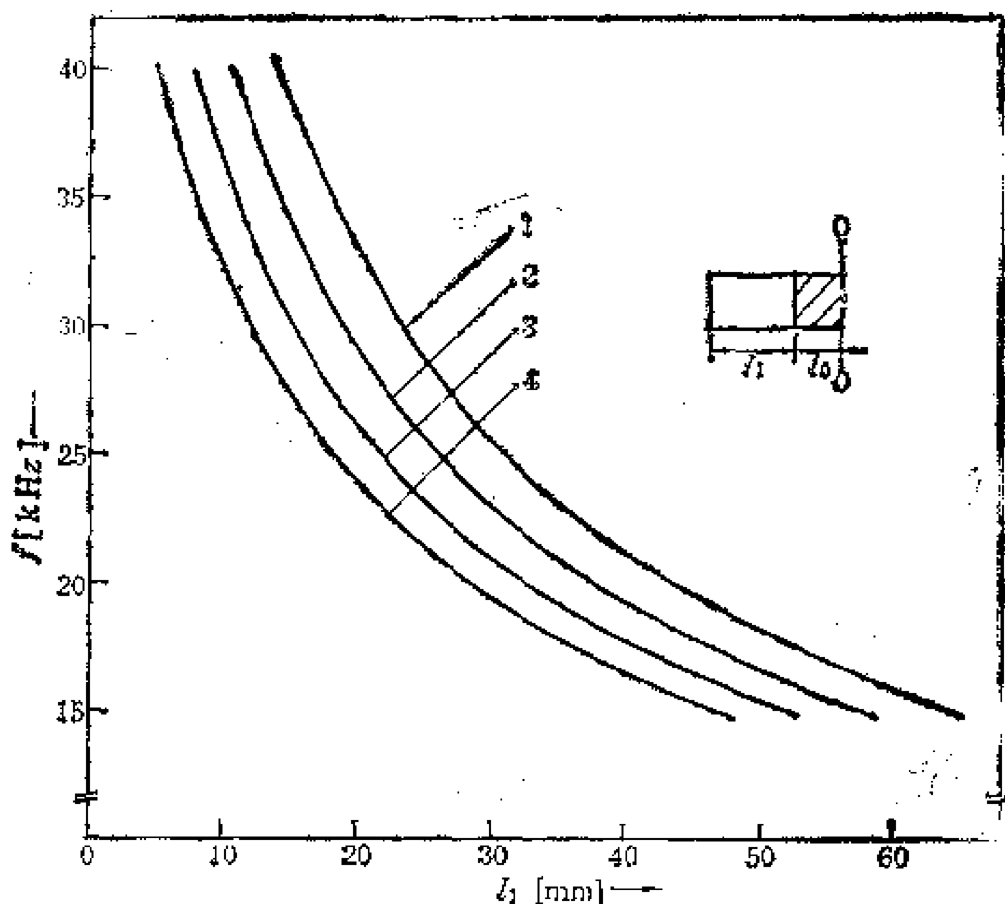


图 7.2.18 计算频率 f 与 l_1 的关系曲线

1．$l_0=6$mm；2．$l_0=8$mm；3．$l_0=10$mm；4．$l_0=12$mm 金属棒1为钢；压电片材料为PZT-8

由图表可以看出，理论计算和实验结果比较符合．但必须指出，夹心式压电换能器的共振频率和换能器的制造工艺有密切关

表 7.2.1

l_1[mm]		13	19	23.5	28	33	37	42	47	53	57
f[Hz]	测量值	27838	26609	25664	24785	23820	22969	22120	21234	20288	19674
	理论值	28410	26954	25933	24963	23939	23158	22228	21348	20358	19736
相对偏差[%]		2	1.3	1	0.7	0.5	0.8	0.5	0.5	0.3	0.3

系，尤其是金属棒与压电元件接触面的耦合状态对换能器的频率影响较大．此外，随着换能器的横向尺寸与波长比值增大，实验与计算结果偏离越大．横向尺寸大于四分之一波长时应考虑二维振动的影响．

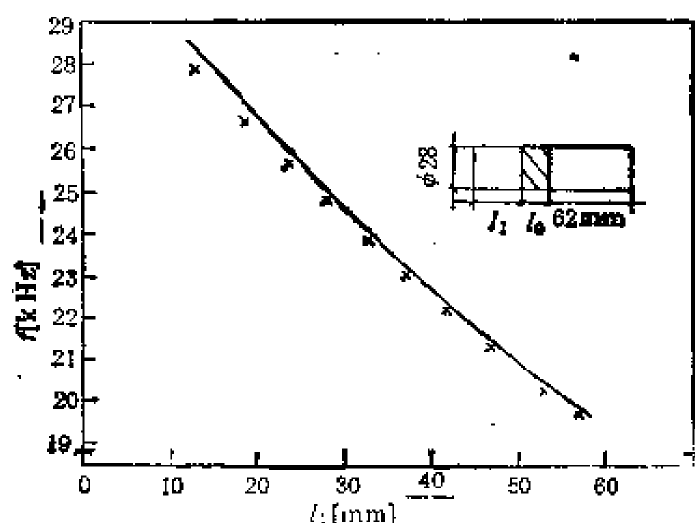


图 7.2.19 理论和实验结果的比较

——计算曲线；×——实验值

（三）换能器的效率

前面已经提到，换能器的电声效率在功率超声处理技术中是一个很重要的问题．现在我们来讨论它与哪些因素有关，在什么负载条件下能够达到最大效率．

电声型超声换能器，不论它的结构如何，在其共振频率附近都

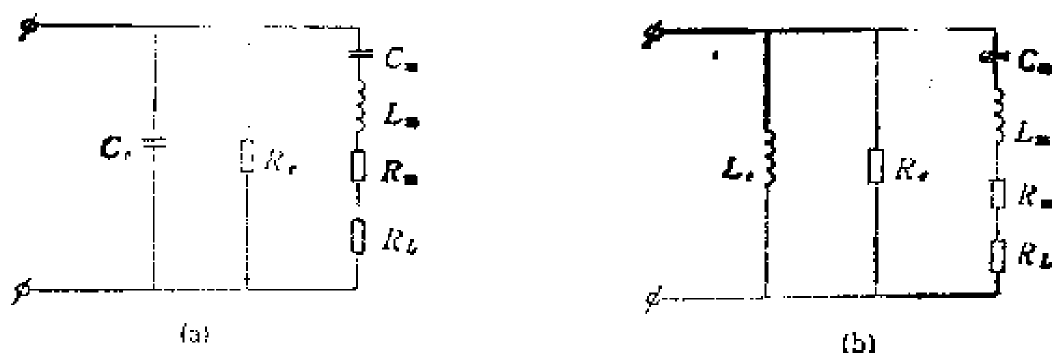


图 7.2.20 换能器在共振频率附近的集总参数等效电路

(a)压电换能器；(b)磁致伸缩换能器

可以用一集总参数的等效电路来近似表示．压电换能器和磁伸缩换能器的等效电路如图 7.2.20 (a) 和 7.2.20(b) 所示．

图7.2.20(a)中的 C_e 为压电换能器的"受挡"电容，或称为静态电容，R_e 为介电损耗电阻；C_m，L_m 及 R_m 分别表示换能器由于振动时引起的电容、电感和电阻；R_L 则代表由于换能器向介质辐射声能而反映到等效电路中的等效电阻．

图 7.2.20(b) 中的 L_e 代表磁致伸缩换能器的"受挡"电感，或称为静态电感，而 R_e' 表示涡流和磁滞损耗．

（1） 换能器的效率和动态参量的关系

设声负载为纯阻，或者它对换能器的共振频率影响不大时，对压电换能器，由图 7.2.20(a) 可以得到如下关系式：

$$\left.\begin{aligned} Q_e^m &= \omega_m C_e R_e, \\ Q_m^m &= \frac{1}{\omega_m C_m R_m}, \\ Q_L^m &= \frac{1}{\omega_m C_m (R_m + R_L)}, \end{aligned}\right\} \tag{7.2.11}$$

其中 Q_e^m，Q_m^m，Q_L^m 分别表示换能器在机械共振频率(用上标 m 表示)时的电品质因数，换能器固有的机械品质因数及有负载时的机械品质因数．$\omega_m = [(L_m \cdot C_m)^{\frac{1}{2}}]^{-1}$ 为机械共振圆频率，在此频率上工作时，其效率最高．根据效率的定义可以得到下列关系式：

$$\eta_{ma}^m = \frac{Q_m^m - Q_L^m}{Q_m^m}, \tag{7.2.12a}$$

$$\eta_{em}^m = \frac{k_1^2 \cdot Q_e^m \cdot Q_L^m}{1 + k_1^2 \cdot Q_e^m \cdot Q_L^m}, \tag{7.2.12b}$$

$$\eta_{ea}^m = \eta_{ma}^m \cdot \eta_{em}^m, \tag{7.2.12c}$$

其中 $k_1^2 = K_{eff}^2/(1-K_{eff}^2)$，$K_{eff}^2 = C_m/(C_m + C_e)$ 为换能器的有效机电耦合系数．η_{ma}^m，η_{em}^m 和 η_{ea}^m 分别为在机械共振频率时的机声，电机和电声效率．

对于磁致伸缩换能器，由图 7.2.20(b) 同样可以得到类似的关系式：

$$\left.\begin{aligned} Q_e^m &= R_e'/\omega_m L_e, \\ Q_m^m &= \omega_m L_m/R_m, \\ Q_L^m &= \omega_m L_m/(R_m+R_L), \end{aligned}\right\} \qquad (7.2.13)$$

其效率和动态参量 Q_e^m,Q_m^m 和 K_{meff} 的关系和式(7.2.12)一样,只要以 k_2^2 代替 k_1^2,而 $k_2^2=(1-K_{meff}^2)/K_{meff}^2$, $K_{meff}^2=L_m/(L_m+L_e)$ 为磁致伸缩换能器的有效机电耦合系数.

(2) 换能器的最佳负载及最大电声效率

现在我们引入一个系数 P,$P=R_L/R_m$,则由式(7.2.11),(7.2.12b)及(7.2.12c)可以得到

$$\eta_{ea}^m=\frac{N_{eff}}{N_{eff}+P+1}\quad\frac{P}{P+1}, \qquad (7.2.14)$$

其中动态系数 $N_{eff}=\dfrac{Q_e^m Q_m^m K_{eff}^2}{(1-K_{eff}^2)}$.

对磁致伸缩换能器,可以得到类似于式(7.2.14)的结果,只要以 N_{meff} 代替 N_{eff}. 其中 $N_{meff}=Q_e^m\cdot Q_m^m(1-K_{meff}^2)/K_{meff}^2$. 由式(7.2.14)对 P 求极值,我们可以得到最佳负载系数 P_{opt} 为

$$P_{opt}=(N_{eff}+1)^{1/2}, \qquad (7.2.15)$$

在此条件下,得到换能器的最大电声效率为

$$\eta_{max}^m=[(N_{eff}+1)^{1/2}-1]^2/N_{eff}. \qquad (7.2.16)$$

由上式可见,换能器的最大电声效率只和动态系数 N_{eff} 有关. 这一结论也适合于磁致伸缩换能器,但式(7.2.16)中的 N_{eff} 要用 N_{meff} 表示.

图 7.2.21,7.2.22 及图 7.2.23 是由式(7.2.14)和(7.2.16)的计算结果. 由图 7.2.21 可以看出,对不同的 N_{eff} 值都存在一最佳负载系数 P_{opt},在这一点上,得到最大电声效率. N_{eff} 值小,其最大效率所对应的 P 值也小. N_{eff} 值大时,电声效率随负载系数 P 变化缓慢. 图7.2.22是换能器的机电效率和 P 的关系. 而图 7.2.23 是换能器最大电声效率与动态系数 N_{eff} 的关系曲线. 最大效率随 N_{eff} 值的增加而增高,与负载系数 P 无关.

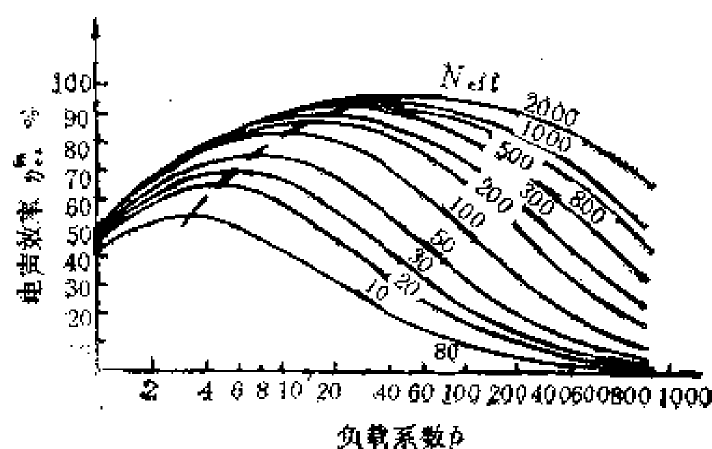


图 7.2.21　电声效率和负载系数的关系

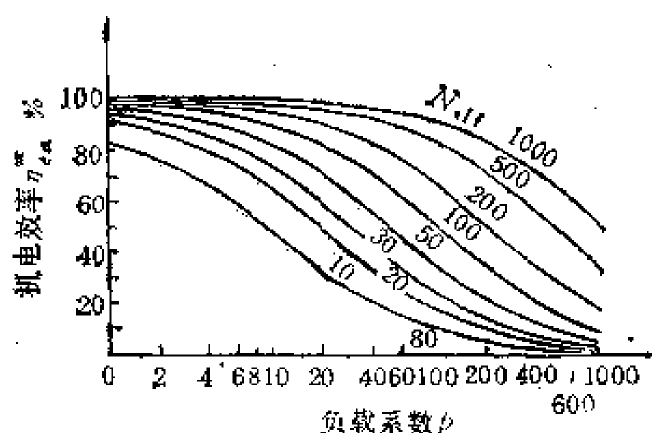


图 7.2.22　机电效率和负载系数的关系

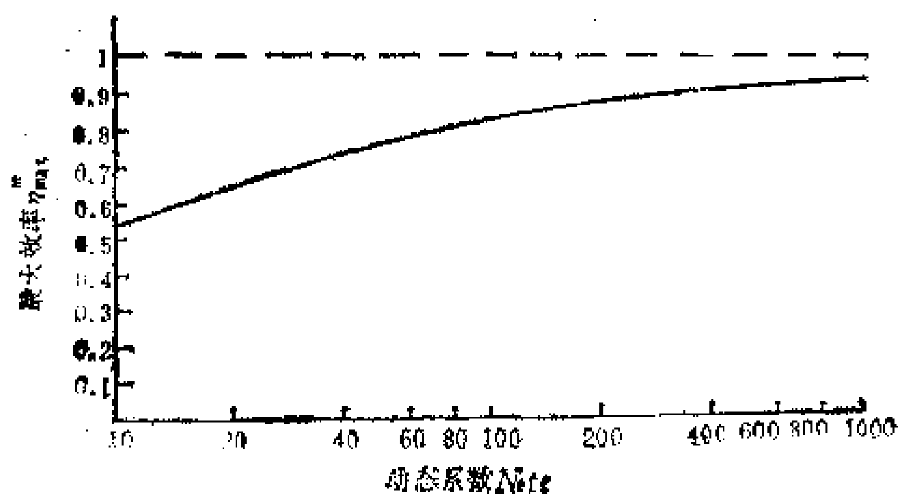


图 7.2.23　最大效率 η_{max}^{m} 和动态系数 N_{eff} 的关系

从上面分析可以看到，换能器的动态系数 N_{eff} 越大，电声效率越高，而且效率受负载的影响越小，即换能器可以在较宽的负载

范围内工作而电声效率变化不大，这对于功率超声设备是很有意义的．N_{eff} 大意味着换能器的电及机械的损耗小，或者有效机电耦合系数大，这些取决于换能器所用的材料、结构及其制造工艺。

（3）压电换能器的导纳圆图及 N_{eff} 的测量

我们先讨论压电换能器在没有负载时的导纳圆图．换能器在共振频率附近的等效电路如图 7.2.20 (a)所示．空载时 $R_L=0$．当频率在换能器共振频率附近变化时，换能器电端对的导纳在复数平面的变化如图 7.2.24 所示．当换能器的机械品质因数足够高时，导纳矢量在复平面上的轨迹接近一个圆，常称为导纳圆．由导纳圆图我们可以确定换能器的特征频率和动态系数 N_{eff}．图 7.2.24中：

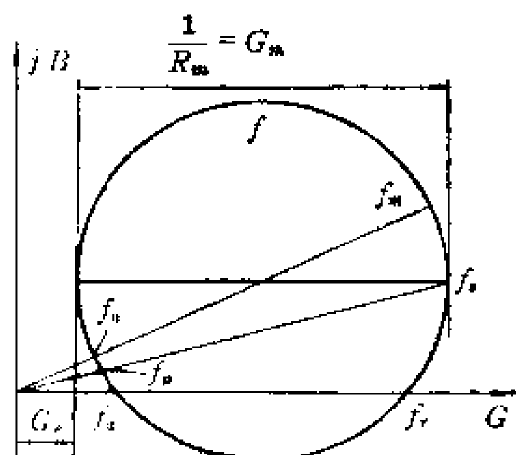


图 7.2.24 换能器的导纳圆图

$f_s=[2\pi(L_mC_m)]^{-\frac{1}{2}}$ 为机械谐振频率，

$f_p=\{2\pi[L_mC_mC_e/(C_m+C_e)]^{\frac{1}{2}}\}^{-1}$ 为并联谐振频率，

f_r 为谐振频率(总电纳为零)，

f_a 为反谐振频率(总电纳为零)，

f_m 为最大导纳频率，

f_n 为最小导纳频率．

压电换能器的动态系数 $N_{eff}=G_m/G_e$，可以由空载时的导纳圆图上直接得到．而磁致伸缩换能器的动态系数 $N_{meff}=R_e/R_m$，也可以由空载条件的阻抗圆图直接测得．如果测得换能器的等效电路中的每一参量，N_{eff} 也可以从这些电路参数中计算得到．

（4）半穿孔结构宽频带压电换能器

在一些实际应用中，要求换能器有较大的频带宽度．例如在超声清洗设备中，时常采用多个夹心式压电换能器并联而用同一

个超声频电功率源驱动的工作方式．如果换能器的频带较窄，则对每个换能器的频率一致性要求高，因而在生产上会遇到较大的困难，工作稳定性较差．一种新型的半穿孔结构压电换能器能够增加在液体负载下压电换能器的频带宽度，而且提高了电声效率．

半穿孔结构宽频带夹心换能器结构上的特点是：在辐射块辐射面一端沿轴向方向均匀地钻有一定数量、同一深度的直孔，构成半穿孔结构．不考虑施预压力螺钉的影响时，其简化的结构如图 7.2.25 所示．换能器由质量块(1)、压电片(2，4)、电极片(3)、多孔结构辐射块(5,6)及盖板(7)等部件机械串联固接而成．电学上质量块和辐射块短路，两压电片并联工作．图中L,A,ρ,V等符号分别表示长度、横截面积、材料密度和纵波速度．其中多孔结构辐射块总长为(L_5+L_6)，原有截面积为A，钻孔孔深为L_6，钻孔部分的有效截面积为A_6．

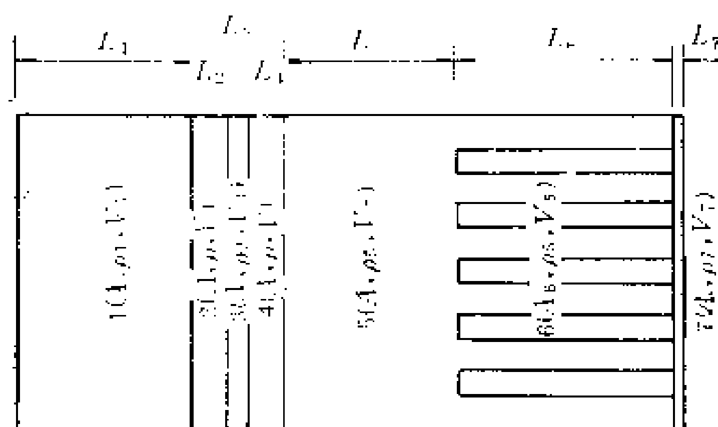
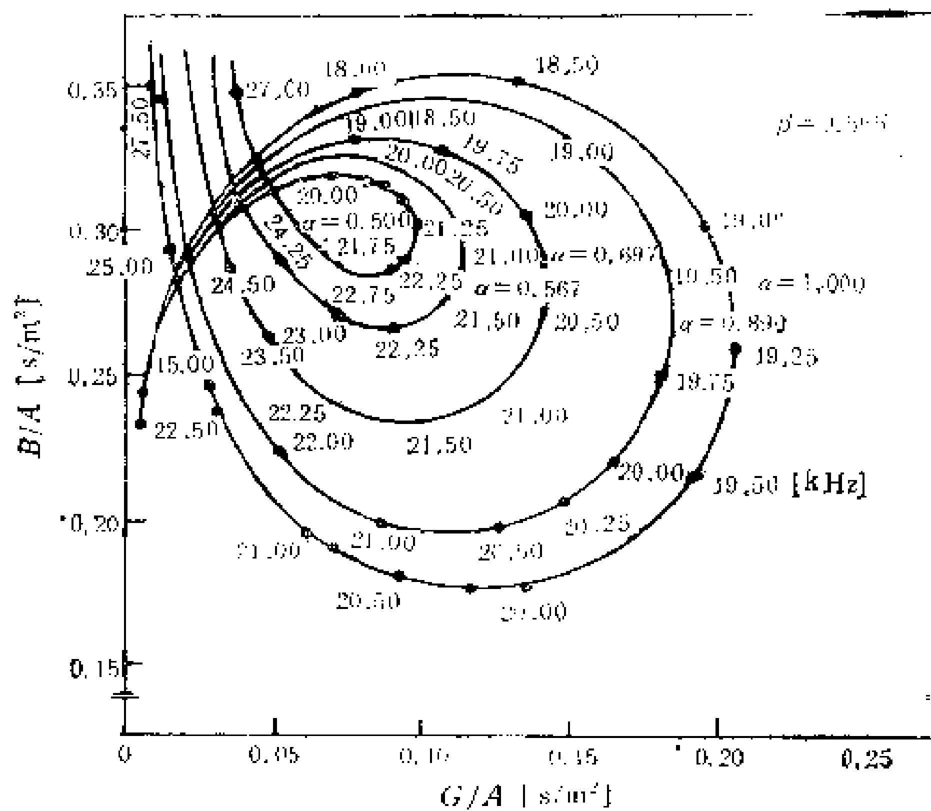


图 7.2.25　半穿孔结构宽频带压电换能器的理论分析模型

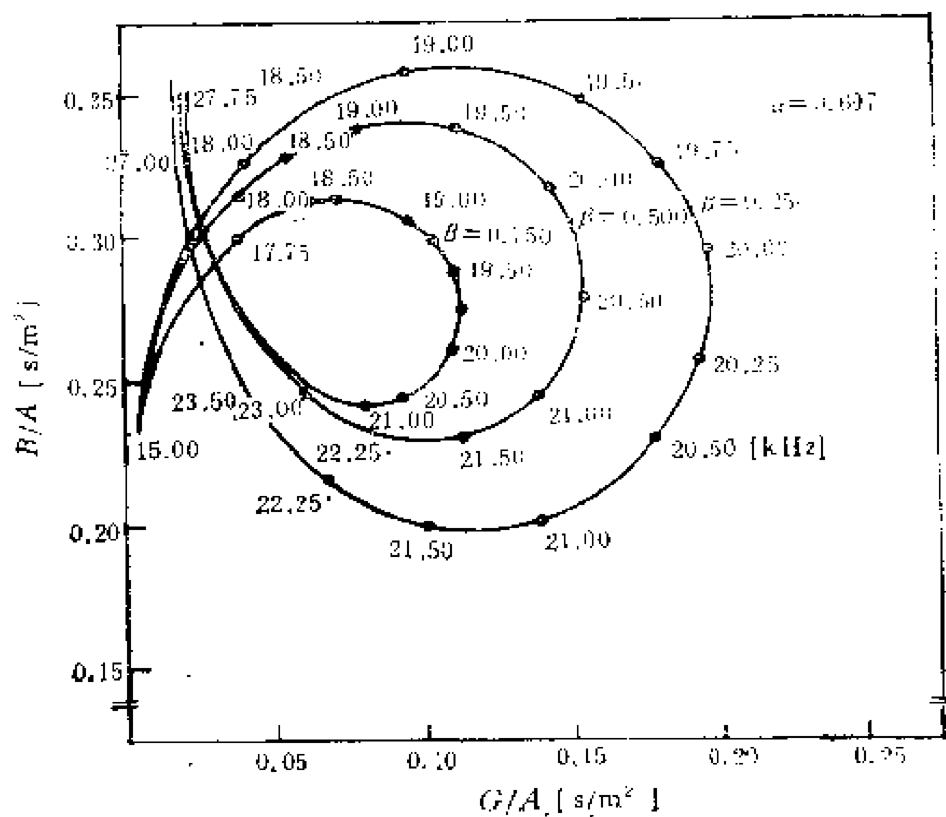
1.质量块；2,4.压电片；3.电极片；5,6.辐射块；7.盖板

设换能器作一维纵向小振动，不计及各部分的机械损耗及压电片的介电损耗．将多孔结构辐射块作变截面的声传输线处理，用压电片的等效机电六端网络及各弹性部件的等效机械四端网络，按其边界连接，采用网络矩阵计算方法进行计算．在水负载的条件下计算换能器的输入电导纳的频率特性．不同孔参数的输入导纳轨迹“圆”图如图7.2.26所示．图中孔参数$\alpha=A_6/A$，$\beta=L_6/(L_5+L_6)$．

由图 7.2.26(a)，(b) 可见：随着α值的减小及β值的增大，



(a)

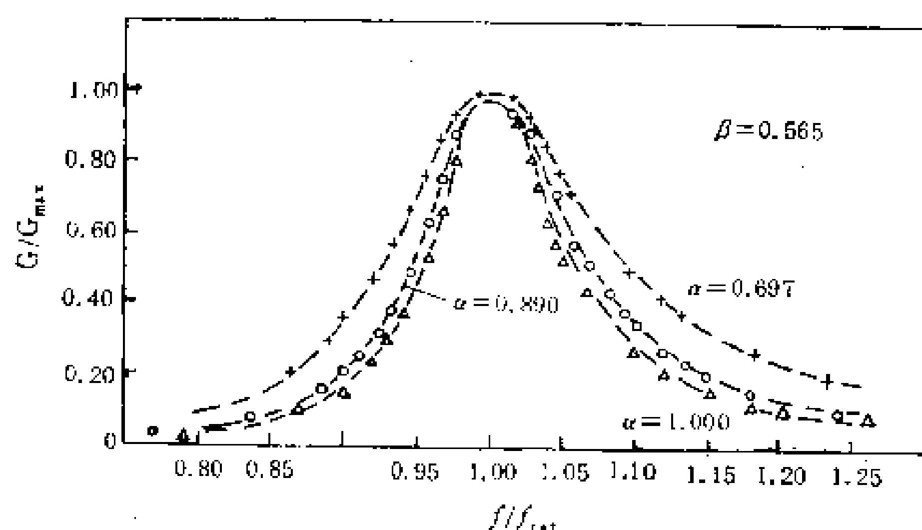


(b)

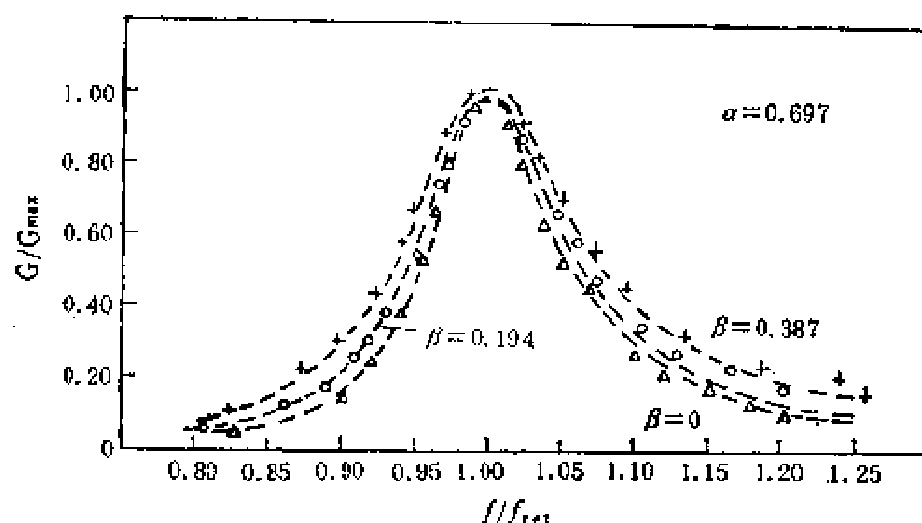
图 7.2.26　换能器输入电导纳理论"圆"图

"圆"直径变小，这表示当增大钻孔面积和钻孔深度时，换能器的频带宽度随之增加.

图 7.2.27(a)，(b) 是理论计算和实验结果的比较. 由图也可以看到，随着钻孔面积和深度增加，频带宽度也展宽.



(a)



(b)

图 7.2.27 换能器输入电导频响曲线的理论计算和实验的比较

×○△——实验点；----- ——理论

7.2.2 超声变幅杆、聚能器和振动方向变换器

变幅杆或聚能器是功率超声技术所具有的独特部分，其主要

作用是放大机械振动位移或速度振幅；或者将超声能量集中在较小的辐射面上，起到聚能作用．除此以外，它还是一种机械阻抗变换器，连接在换能器和声负载之间，可以使声能更有效地向负载传输．

近年来由于功率超声应用的不断扩大，尤其是在机械和冶金工业需要利用功率大、声强高的超声设备进行处理加工，因而发展了各种振动功率合成的超声振动系统．

为不断改进功率超声设备的性能和适应各种具体应用的需要，人们研究了各种类型的变幅杆．从振动模式分，有纵向振动和径向振动变幅杆、聚能器，有扭转振动及弯曲振动变幅杆；从变幅杆的结构分，可以分为单一变幅杆和组合变幅杆．组合变幅杆是由若干不同几何形状的单一变幅杆构成；从变幅杆的几何形状分又有圆锥形、指数形、悬链线形、阶梯形、高斯曲线形以及各种形状组合的变幅杆等等．此外还有各种截面变化的盘形聚能器，由棒或棒与圆盘组成的振动方向变换器等．下面着重讨论纵向振动变幅杆．在讨论之前还应该了解用什么参量来衡量变幅杆的性能．

变幅杆的主要参量有：放大系数，形状因数，激振端的输入阻抗．此外还应该知道变幅杆的共振频率，位移分布等等．变幅杆的放大系数定义为变幅杆的输出端和输入端(激振端)的振动位移或速度振幅的比值；形状因数是衡量变幅杆所能达到最大振动速度的一个系数，它仅与变幅杆的几何形状有关．形状因数愈大，所能达到的最大振动速度也愈大．输入阻抗是指激振端的推动力与质点振动速度的复数比值．在实际应用中要求输入阻抗随频率及负载的变化要小．我们常以稳定性来衡量这种变化，变化小则稳定性高．

(一) 单一变幅杆

(1) 变截面杆的纵振动方程

为简化分析，设杆由均匀的各向同性材料做成，不计及损耗，并假设在杆中传播平面纵波．

图 7.2.28 是一变截面杆，对称轴为坐标轴 x．由牛顿定律可

以得到

$$\frac{\partial(AT)}{\partial x}dx$$

$$= A\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}dx,$$

$$T = Y\frac{\partial u}{\partial x}.$$

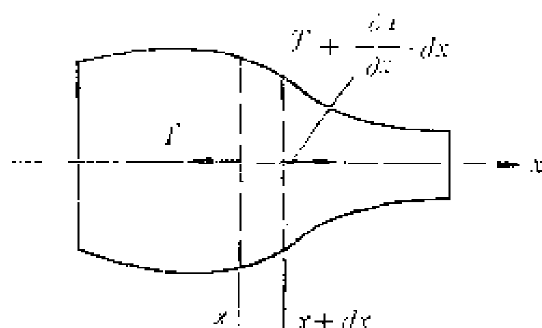


图 7.2.28 变截面杆

简谐振动时我们可以得到波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+k^2u=0, \tag{7.2.17}$$

其中 $A=A(x)$ 为杆截面积函数，ρ 为杆材料密度，Y 为杨氏弹性模量，u 为振动位移振幅，$k=\omega/v$ 为波数，ω 为圆频率，$v=(Y/\rho)^{\frac{1}{2}}$ 为细棒中纵波声速.

作变换 $u=A^{-\frac{1}{2}}y$，式(7.2.17)可改写为

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+k_1^2y=0, \tag{7.2.18}$$

其中 $k_1^2=k^2-A^{\frac{1}{2}}\frac{d^2(A^{1/2})}{dx^2}$. 当变幅杆为圆截面，半径为 r 时，则有

$k_1^2=k^2-\frac{1}{r}\frac{d^2r}{dx^2}$，只有当 k_1 为正常数时才有谐和解.

(2)单一变幅杆波动方程的解

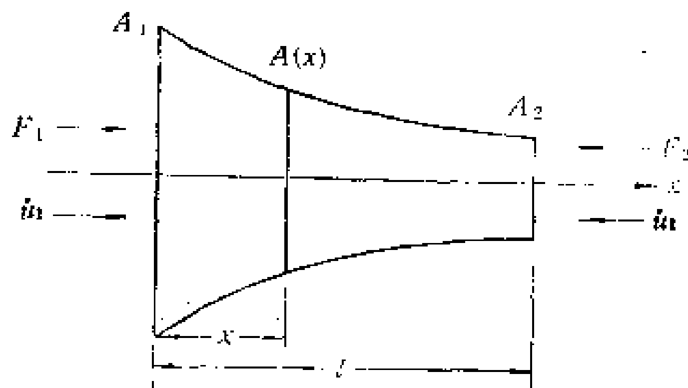


图7.2.29 变幅杆

图 7.2.29 表示一变幅杆，设位于坐标原点的激振端面积为 A_1，振速为 $\dot{u}_1$，力 F_1；位于 $x=l$ 处的变幅杆端面积为 A_2，振速及力分别为 $\dot{u}_2$ 和 F_2. 三种常用变幅杆的面积函数为

$$
\left.\begin{array}{l}
\text{圆锥形：}\ A(x)=A_1(1-\alpha x)^2,\\
\text{指数形：}\ A(x)=A_1e^{-2\beta x},\\
\text{悬链线形：}\ A(x)=A_2\mathrm{ch}^2(\gamma l-\gamma x),
\end{array}\right\}
\tag{7.2.19}
$$

其中 $\alpha=\dfrac{N-1}{Nl}$，$\beta=\dfrac{1}{l}\ln(N)$，$\gamma=\dfrac{1}{l}\mathrm{ch}^{-1}(N)$，$N=(A_1/A_2)^{\frac{1}{2}}$.

将面积函数代入式(7.2.17)，可以得到截面位移通解：

$$
\left.\begin{array}{l}
\text{圆锥形：}\ u=\dfrac{1}{1-1/\alpha}[a_1\cos kx+b_1\sin kx]e^{j\omega t},\\
\text{指数形：}\ u=e^{\beta x}[a_2\cos k_2x+b_2\sin k_2x]e^{j\omega t},\\
\text{悬链线形：}\ u=\dfrac{1}{\mathrm{ch}(\gamma l-\gamma x)}[a_3\cos k_3x+b_3\sin k_3x]e^{j\omega t},
\end{array}\right\}
\tag{7.2.20}
$$

其中 $k_2=(k^2-\beta^2)^{\frac{1}{2}}$，$k_3=(k^2-\gamma^2)^{\frac{1}{2}}$.

边界条件有两种情况：

(i) 端面自由

$$
\begin{array}{l}
u|_{x=0}=u_1,\ \dot{u}_1=\dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{x=0},\qquad \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0}=0,\\
u|_{x=l}=-u_2,\ \dot{u}_2=-\dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{x=l},\ \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l}=0.
\end{array}
\tag{7.2.21}
$$

(ii) 端面受力时

$$
\begin{array}{l}
F_1=-A_1Y\dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0},\\
F_2=-A_2Y\dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l}.
\end{array}
\tag{7.2.22}
$$

利用位移通解及边界条件可以求变幅杆的各种参量．以指数形变幅杆为例，可以得到

频率方程　　$\sin k_2l=0$,

位移节点坐标　　$x_0=\dfrac{l}{\pi}\mathrm{ctg}^{-1}\left(\dfrac{\ln N}{\pi}\right)$,

放大系数 M_p　　$M_p=\left|\dfrac{u_2}{u_1}\right|=e^{\beta l}=N$,

输入力阻抗 $Z_i=\frac{F_1}{j\omega u_1}=jZ_{01}\frac{[(k_2l)^2+(\ln N)^2]^{1/2}}{\ln N+k_2l\ \mathrm{ctg}\ k_2l}$，

$$Z_{01}=A_1\rho v.$$

形状因数 $\varphi=ku_{max}/(\partial u/\partial x)_{max}=\frac{Nk_2}{k}\cdot e^{-\beta x_M}\left(\frac{1}{\sin(k_2x_M)}\right)$，

其中 x_M 为应变极大点坐标，由下式求出：

$$\mathrm{tg}\ (k_2x_M)=-k_2/\beta.$$

（二）组合变幅杆

在功率超声加工处理的实际应用中，时常不但要求变幅杆的放大倍数高，而且还要求形状因数大．单一变幅杆通常不能同时满足两种要求，这时用组合式变幅杆以改善变幅杆的性能．下面我们讨论如图 7.2.30 所示的三段组合的变幅杆．段 I 和 Ⅲ 为等截面杆，Ⅱ 为变截面杆．设杆为圆截面且用同一种材料做成．

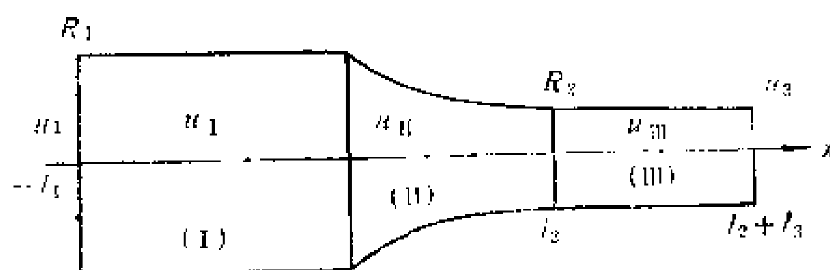


图 7.2.30 组合变幅杆

由变截面杆波动方程可以得到杆中各段的位移：

$$\left.\begin{aligned}u_{\mathrm{I}}&=a_1u_1\cos\ (kx+\alpha_1),\\u_{\mathrm{II}}&=a_2u_1\frac{R_1}{R}\cos\ (k'x+\alpha_2),\\u_{\mathrm{III}}&=a_3u_1\cos\ (kx+\alpha_3),\end{aligned}\right\}\tag{7.2.23}$$

其中

$$a_1=\frac{1}{\cos\ (-kl_1+\alpha_1)},\quad \mathrm{tg}\,\alpha_1=\frac{k'}{k}\mathrm{tg}\,\alpha_2+\frac{R'(0)}{kR_1},$$

$$R'(0)=(\partial R/\partial x)_x=0;$$

$$a_2=\frac{\cos\alpha_1}{\cos\alpha_2}\cdot\frac{1}{\cos\ (-kl_1+\alpha_1)},$$

$$\operatorname{tg}(k'l_2+\alpha_2)=-\frac{k}{k'}\operatorname{tg}kl_3-\frac{R'(l_2)}{k'R_2};$$

$$a_3=\frac{N\cos\alpha_1}{\cos\alpha_2\cdot\cos kl_3}\quad\frac{\cos(k'l_2+\alpha_2)}{\cos(-kl_1+\alpha_1)},$$

$$\alpha_3=-(kl_2+kl_3);$$

$$(k')^2=k^2-\frac{1}{R}\cdot\frac{\partial^2 R}{\partial x^2}\text{，}R\text{ 为杆的半径.}$$

输入力阻抗为

$$Z_i=F_1/j\omega u_1=jZ_{01}\operatorname{tg}(kl_1-\alpha_1)\text{，}\tag{7.2.24}$$

频率方程为

$$\left.\begin{aligned}&\operatorname{tg}(k'l_2+\alpha_2)+\frac{k}{k'}\operatorname{tg}kl_3+\frac{R'(l_2)}{k'R_2}=0\text{，}\\&\operatorname{tg}\alpha_2=\frac{k}{k'}\operatorname{tg}kl_1-\frac{1}{k'}\quad\frac{R'(0)}{R_1}\text{，}\end{aligned}\right\}\tag{7.2.25}$$

$$\text{放大系数 }M_p=\left|\frac{N\cos(k'l_2+\alpha_2)\cos(kl_1)}{\cos(\alpha_2)\cos(kl_3)}\right|.\tag{7.2.26}$$

三段组合变幅杆中的段Ⅱ可以是指数形、圆锥形或悬链线形. 如果两等截面杆的长度相等，则构成具有变截面过渡段的阶梯形变幅杆，这在工程上是常用的.

当段Ⅰ或Ⅲ中的任一段的长度为零，则构成由变截面杆和均匀截面杆组成的另一类组合变幅杆. 指数形，悬链线形杆的大端连接一均匀截面杆或者圆锥形杆的小端连接均匀杆，其空载时的放大系数都比较大. 详细讨论见有关文献.

（三） 有负载的变幅杆理论

变幅杆在实际应用时都是有负载的. 负载的一般情况是复数. 图 7.2.31 中负载力阻抗表示为 $Z_l=R_l+jx_l$. 根据对单一变幅杆的讨论，在有负载情况下可以得到圆锥形、指数形和悬链

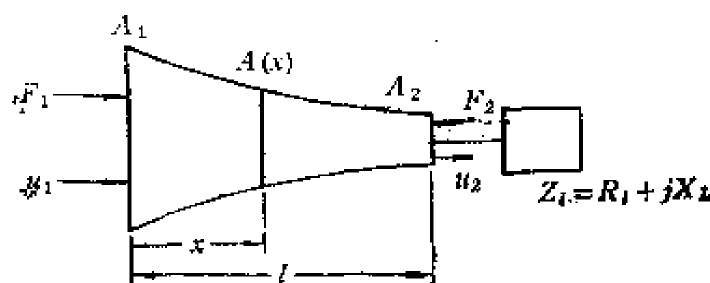


图 7.2.31 有负载的变幅杆

线形三种常用变幅杆在有负载阻抗 Z_l 时振动速度 $\dot{u}$ 及截面力 F 的表达式. 令 Z_i 为激振端的输入阻抗，它等于该端面的力 F_1 与振动速度 $\dot{u}_1$ 之比，则我们可以得到激振端相对输入阻抗 (Z_i/Z_1) 与负载端相对负载阻抗 (Z_l/Z_2) 的关系式是

圆锥形

$$\frac{Z_i}{Z_1}=\left\{\frac{Z_l}{Z_2}\left(\cos\phi-\frac{N-1}{\phi N}\sin\phi\right)+j\left[\left(1+\frac{(N-1)^2}{N\phi^2}\right)\sin\phi-\frac{(N-1)^2}{N\phi}\cos\phi\right]\right\}\Bigg/\left[\left(\cos\phi+\frac{N-1}{\phi}\sin\phi\right)+j\left(\frac{Z_l}{Z_2}\right)\sin\phi\right],\tag{7.2.27}$$

指数形

$$\frac{Z_i}{Z_1}=\frac{\frac{Z_l}{Z_2}\left(\cos\phi_2-\frac{N_2}{\phi_2}\sin\phi_2\right)+j[1+(N_2/\phi_2)^2]^{1/2}\sin\phi_2}{\left(\cos\phi_2+\frac{N_2}{\phi_2}\sin\phi_2\right)+j\frac{Z_l}{Z_2}\left(1+\left(\frac{N_2}{\phi_2}\right)^2\right)^{1/2}\sin\phi_2},\tag{7.2.28}$$

悬链线形

$$\frac{Z_i}{Z_1}=\left\{\frac{Z_l}{Z_2}\left(\cos\phi_3-\frac{N_3}{\phi_3}\text{th}(N_3)\sin\phi_3\right)+j\frac{1}{(1+(N_3/\phi_3)^2)^{1/2}}\times\left(\sin\phi_3+\frac{N_3}{\phi_3}\text{th}(N_3)\cos\phi_3\right)\right\}\Bigg/\left[\cos\phi_3+j\frac{Z_l}{Z_2}\times\left(1+\left(\frac{N_3}{\phi_3}\right)^2\right)^{1/2}\sin\phi_3\right],\tag{7.2.29}$$

其中 $Z_1=A_1\rho v$；$Z_2=A_2\rho v$ 分别为变幅杆激振端和负载端的力阻抗；$N_2=\ln(N)=\beta l$, $N_3=\text{ch}^{-1}(N)=\gamma l$ 分别为指数形和悬链线形变幅杆二端面的广义线度比；$\phi=kl$ 为圆锥形变幅杆的相长，$\phi_2=k_2 l=(\phi^2-N_2^2)^{\frac{1}{2}}$，$\phi_3=k_3 l=(\phi^2-N_3^2)^{\frac{1}{2}}$ 分别为指数形、悬链线形变幅杆的广义相长.

如果以 W 表示相对输入阻抗 (Z_i/Z_1)，以 Z 表示相对负载阻

抗(Z_t/Z_2)，则上面三种变幅杆的两端阻抗关系式可写成

$$W=\frac{aZ+b}{cZ+d}, \tag{7.2.30}$$

式中 a,b,c,d 仅与变幅杆的相长和线度比有关. 对上面所述的三种变幅杆，a，d 为实数，而 b，c 为虚数，且恒有 $\Delta_1 \equiv ad-bc \neq 0$，$(\Delta_1 \equiv 1)$. 当我们以相长、线度比为参数，把 W 看作是 Z 的复变函数时，式(7.2.30)是定义在复平面上双方单值的解析函数，称为 Möbius 变换. a,b,c,d 称为变换系数.

Möbius 变换式(7.2.30)将 Z 平面上负载阻抗 (Z_l/Z_2) 点变换为 W 平面上输入阻抗(Z_i/Z_1)点，两平面的点构成一一对应的映像关系.

当 $c \neq 0$ 时，式(7.2.30)可以写为

$$W=P+\frac{R^2}{Z-Q}, \tag{7.2.31}$$

式中 $R=[(bc-ad)/c^2]^{1/2}=1/|c|$，$P=a/c=jp$，$Q=-d/c=jq$，这里 R 为正实数，p,q 为实数.

式(7.2.31)表明：Z 平面上任一负载点 (Z_l/Z_2) 经过一个关于以 Q 为圆心，R 为半径的反演圆的反演变换，一个对实轴的对称变换，再加上一个沿虚轴的平移变换，即可求得相应于该负载的变幅杆输入阻抗(Z_i/Z_1).

根据 Möbius 变换，在图 7.2.32 中下列各点成对应的映像关系：

$Q(0,-d/c) \to (\infty)$，$H(0,-b/a) \to (0,0)$；

$(\infty) \to P(0,a/c)$，$(0,0) \leftarrow G(0,b/d)$.

点 P 相当于变幅杆终端夹死时输入阻抗，点 G 相当于空载时的输入阻抗.

Möbius 变换将 Z 平面上的直线或圆变换为 W 平面上的圆或直线. 过 Q 点两正交直线 $(R_l/Z_2)=0$，$(X_l/Z_2)=q$，变换为 W 平面上过 P 点两正交直线 $(R_i/Z_1)=0$，$(X_i/Z_1)=p$；把不经过 Q 点的 Z 平面上的等阻负载线 $(R_l/Z_2)=C_r$ $(C_r \neq 0)$，变换为在 P 点和

虚轴相切的，直径为 $d_r = R^2/|C_r|$ 的圆，称为等阻映像圆．$C_r>0$ 时在 W 平面上的右半平面，$C_r<0$ 时在左半平面．不经过 Q 点的平行于实轴的等抗负载线 $(X_l/Z_2)=C_x$，经变换为 W 平面上在 P 点和 $(X_i/Z_1)=P$ 直线相切的等抗映像圆．此圆对虚轴对称，其直径为 $d_x = R^2/|C_x - q|$．$C_x>q$ 时映像圆在 $(X_i/Z_1)=p$ 直线的下方，当 $C_x<q$ 则在直线的上方．这样，Z 平面为正交的等阻和等抗负载线所覆盖，而 W 平面则为正交的等阻和等抗圆所覆盖．

从图 7.2.32 可以看出，W 平面上每一点都有两个坐标值：直角坐标值是变幅杆输入阻抗 (Z_i/Z_1)，曲线坐标值则为负载阻抗 (Z_l/Z_2)，这样在一个平面上就能够把两端阻抗的复杂关系直观地表示出来．当负载阻抗变化时还可以直接了解输入阻抗的变化轨迹．这对于实用是很有意义的．

对于给定负载，当变幅杆的输入抗分量 $X_i=0$ 时，则称变幅杆处于谐振状态．这样，我们可以根据谐振相长及工作频率定出杆的谐振长度．反之，可以从长度定出谐振频率．根据 Möbius 变换式(7.2.30)的反变换有

$$Z=\frac{-dW+b}{cW-a}. \tag{7.2.32}$$

把 W 平面的实轴 $(X_i/Z_1)=0$ 变换到 Z 平面上，它是一个经 H 和 Q 两点，对虚轴对称的一个圆．圆的方程为

$$\left(\frac{R_l}{Z_2}\right)^2+\left(\frac{X_l}{Z_2}-\frac{h+q}{2}\right)^2=\left(\frac{h-q}{2}\right)^2, \tag{7.2.33}$$

上式是具有复数负载阻抗的变幅杆的谐振参数方程．

当负载为纯阻时 $(x_l=0)$，谐振方程变为

$$hq=-(R_l/Z_2)^2; \tag{7.2.34}$$

当负载为纯抗 $(R_l=0)$ 时，谐振方程为

$$h=X_l/Z_2; \tag{7.2.35}$$

当空载时 $(Z_l=R_l+jX_l=0)$，则为

$$h=0 \tag{7.2.36}$$

可以看出，式 (7.2.33) 可以用来计算任意负载阻抗情况的变幅杆

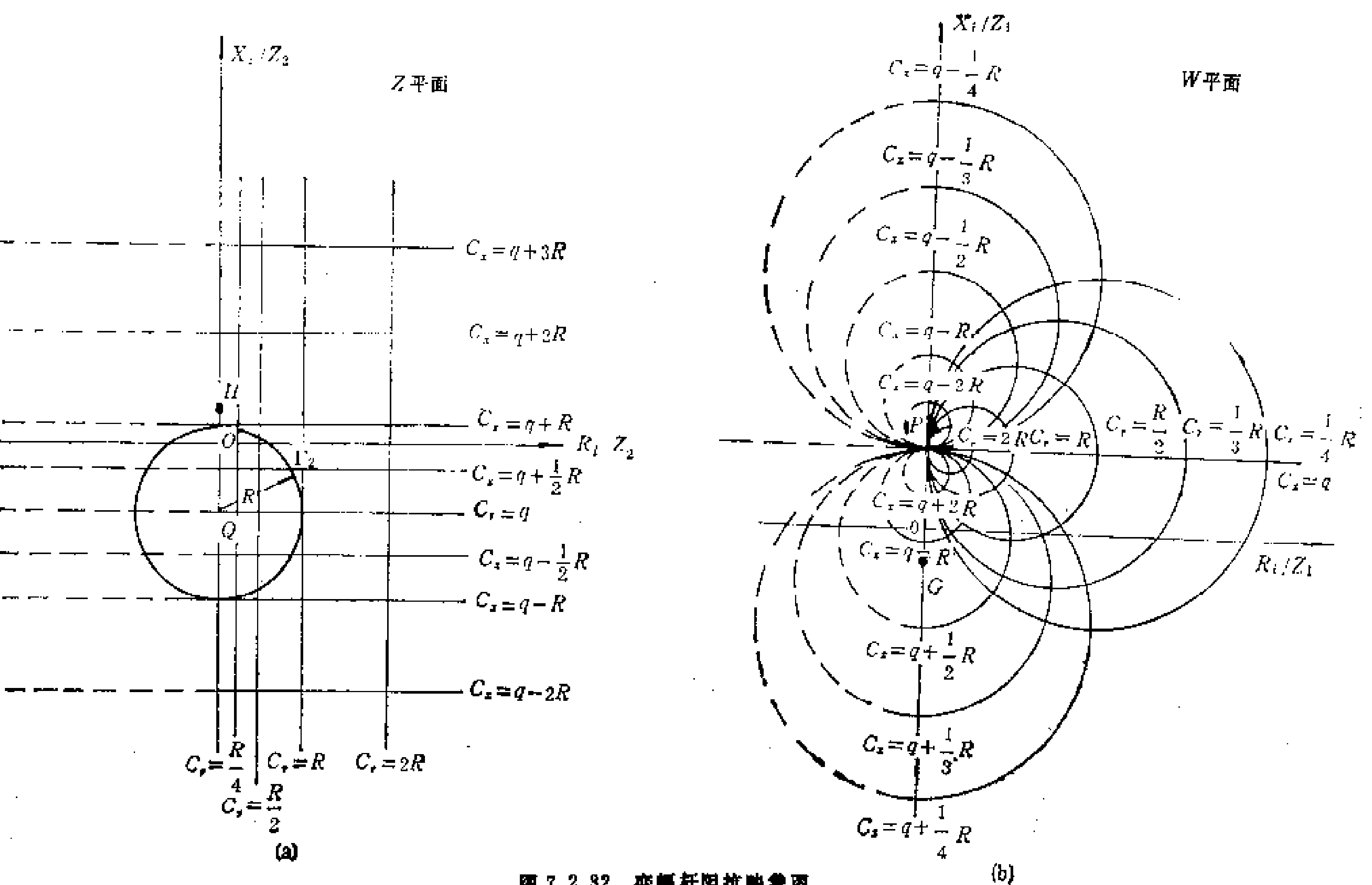


图 7.2.32 变幅杆阻抗映象图

的谐振频率.

除此以外，利用 Möbius 变换的性质还可以在相对阻抗相等点上给出两端阻抗的简单关系，可以讨论变幅杆的稳定性等等.

(四)振动方向变换器

近年来发展的超声金属成型技术，例如超声帮助冷拔金属管、棒以及其他一些应用都需要一种功率大而声强高的超声设备. 因而发展了各种振动功率合成的超声振动系统. 振动方向变换是实现振动功率合成的方法之一.

振动方向变换主要有两种，一种是径向和纵向方向的变换，称为R–L 变换. 比如一个圆盘和一根棒通过圆心而与盘面垂直的直棒组成的振动方向变换器. 当圆盘作径向振动时，通过泊松效应转换为棒的纵向振动. 如果在圆盘的外圆周面上安装若干个换能器，激起圆盘的径向振动，就可以在棒端得到大的纵向振动功率. 另一种是由直棒互相垂直连接而得到不同方向的纵向振动变换. 比如由两根棒在一平面内互相垂直连接可以得到 90° 角的纵向振动变换，常称为 L–L 变换. 如果由三根棒互相垂直连接，则构成三维空间的纵向振动变换，称为 L–L–L 变换. 下面分别介绍这三种常用的振动方向变换器.

(1) L–L–L 振动方向变换器

这种振动方向变换器如图 7.2.33 所示. 当不考虑棒材的损耗，并设棒的横向尺寸比其纵向长度小得多，由于泊松效应，棒的

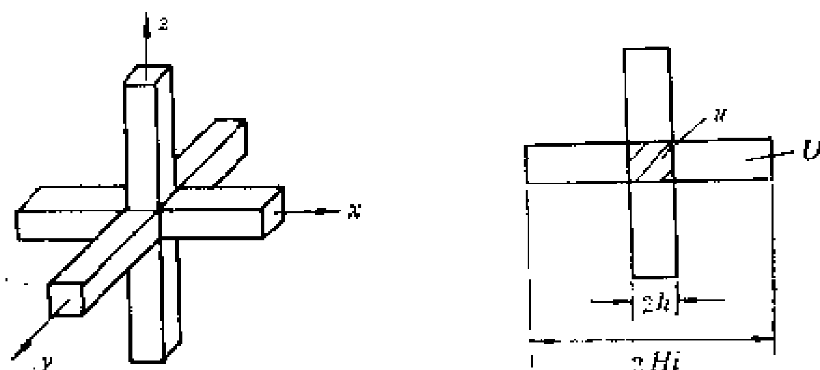


图 7.2.33 L-L-L 振动方向变换器

中心交叉部分使各棒之间有振动耦合，而其他部分没有耦合．坐标原点在变换器系统的中心，而坐标轴为各棒的轴．对棒的中心交叉部分作二维振动分析，由边界的连续条件和位移及应力表达式可以得到振动变换器的频率方程为

$$
\begin{aligned}
&(kh)^3 \sin k(H_1-h)\sin k(H_2-h)\sin k(H_3-h) \\
&-\frac{(1-\sigma)(kh)^2}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}\times[\cos k(H_1-h)\sin(H_2-h)\sin k(H_3 \\
&-h)+\sin k(H_1-h)\cos k(H_2-h)\sin k(H_3-h)+\sin k(H_1 \\
&-h)\sin k(H_2-h)\cos k(H_3-h)]+\frac{kh}{(1+\sigma)^2(1-2\sigma)} \\
&\times[\cos k(H_1-h)\cos k(H_2-h)\times\sin k(H_3-h)+\cos k(H_1 \\
&-h)\sin k(H_2-h)\cos k(H_3-h)+\sin k(H_1-h)\cos k(H_2 \\
&-h)\cos k(H_3-h)]-\frac{1}{(1+\sigma)^2(1-2\sigma)}\cos k(H_1-h)\cos k \\
&\times(H_2-h)\cos k(H_3-h)=0,
\end{aligned}
\tag{7.2.37}
$$

式中 $k=\omega/v$，ω 为圆频率，v 为纵波声速，σ 为泊松比，其他符号如图 7.2.33 所示．H的下标分别代表坐标 x,y,z 方向．

(2) L-L 振动方向变换器

两棒互相垂直的振动方向变换器的共振频率可由三棒系统的频率公式(7.2.37)直接得到，只要令 $H_3-h=0$(或 $H_2-h=0$ 或 $H_1-h=0$)，此时频率方程变成

$$
\begin{aligned}
&(kh)^2\sin k(H_1-h)\sin k(H_2-h)-\frac{kh}{1-\sigma^2}[\sin k(H_1-h) \\
&\times\cos k(H_2-h)+\cos k(H_1-h)\sin k(H_2-h)]+\frac{1}{1-\sigma^2} \\
&\times\cos k(H_1-h)\cos k(H_2-h)=0.
\end{aligned}
\tag{7.2.38}
$$

当 $H_1=H_2=H$，即棒长相等时，频率方程为

$$kh\sin k(H-h)-\frac{1}{1+\sigma}\cos k(H-h)=0,$$

$$kh\sin k(H-h)-\frac{1}{1-\sigma}\cos k(H-h)=0.$$

(3) R–L 振动方向变换器

讨论一厚度均匀的圆盘和棒组成的振动方向变换器，如图7.2.34所示．这种振动方向变换器能够将径向振动的能量集中在圆心部分，并通过耦合变换为棒的纵向振动．这种振动系统有时用于超声帮助冷拔金属管或棒．

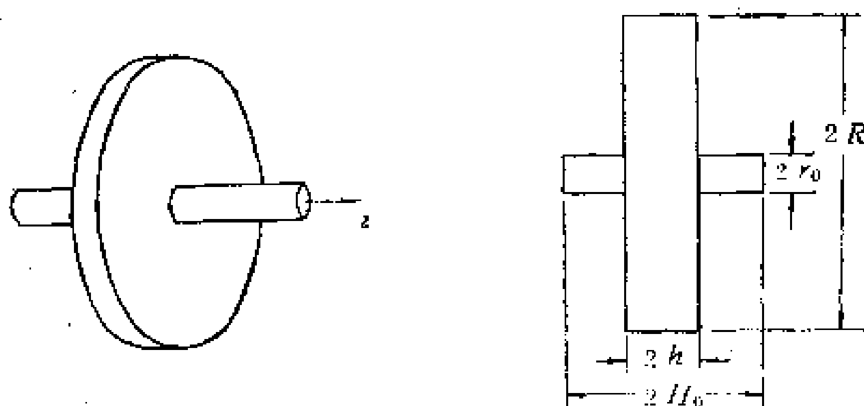


图 7.2.34 R-L 振动方向变换器

设圆盘的外直径为 $2R$，厚度 $2h$，而棒的直径为 $2r_0$，长度 $2H_0$．盘的厚度比其半径及棒的横向尺寸比其长度都小得多．由于泊松效应，棒和圆盘的交叉部分有振动耦合，其余部分盘只作平面径向振动，而棒只作纵向振动．在不考虑损耗下，可以得到这种 R–L 振动方向变换系统的共振频率方程为

$$[y(k_pR)n(k_pr_0)-y(k_pr_0)n(k_pR)]\left[\frac{1-\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}\cos k(H_0-h)-kh\sin k(H_0-h)\right]k_pr_0+[n(k_pR)J_1(k_pr_0)-N_1(k_pr_0)\times y(k_pR)][\cos k(H_0-h)-kh\sin k(H_0-h)]\frac{1-\sigma}{1-2\sigma}=0,$$

(7.2.39)

式中

$$y(k_pr)=J_0(k_pr)-(1-\sigma)J_1(k_pr)/k_pr,$$
$$n(k_pr)=N_0(k_pr)-(1-\sigma)N_1(k_pr)/k_pr,$$

$k_p=\omega/v_p$, $v_p=[Y/\rho(1-\sigma^2)]^{1/2}$ 为板中的纵波速度. J_0 及 J_1 为零阶及一阶第一类贝塞尔函数; N_0 及 N_1 为零阶和一阶第二类贝塞尔函数.

在共振频率时,棒端面和圆盘外周面的位移振幅比为

$$\frac{u}{x}=\frac{h}{r_0}\frac{2\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}[y(k_pR)N_1(k_pr_0)-J_1(k_pr_0)n(k_pR)]\Big/$$

$$\left\{\left[\frac{1-\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}\cos k(H_0-h)-kh\sin k(H_0-h)\right]\right.$$

$$\left.\times[J_1(k_pR)n(k_pR)-N_1(k_pR)y(k_pR)]\right\}, \qquad (7.2.40)$$

其中 u 为棒端面的位移振幅, x 为圆盘外周面的位移振幅.

§7.3 流体动力式发生器

流体动力式发生器是以流体为动力源,利用高速液体或高速气体来产生声与超声的发生器. 它的独特优点是结构简单、造价低、处理量大,操作方便,经久耐用,适合于工业上应用. 流体动力式发生器的基本类型可分三种: (i) 气流式,如哈脱曼哨,旋笛等. (ii) 液流式,如簧片哨. (iii) 气液式,既可以用高速气体,也可以用高速液体作动力源来产生声和超声波,如旋涡哨,圆板哨就是这种发声器的典型代表.

每种流体动力式声和超声发生器都有其不同的结构, 发声机理也各不相同,现分别简介如下.

7.3.1 气流式共振腔哨

气流式警笛(Galton哨): 这种发声器是 F. Galton 所发明, 所以又叫 Galton 哨,它的基本结构如图 7.3.1.

左边是连接器 A. C 是由插塞 F 所形成的环型注孔, 保证同心. 微调器 B 可改变喷嘴与共振腔 R 的距离. 测微头 E 和可调节的圆塞 H 相连接,用来改变共振腔深度,调好后,由锁环 G 来固定.

哨的发声过程是这样的：图 7.3.1 中左边进气，受压气体进入连接器 A，流至插塞 F 所形成的环型注孔 C. 由 C 喷口射出高速射流. 射出的射流有其本身的本征频率，射流的频率与共振腔 R 的本征频率一致时即发生共振，产生强超声波.

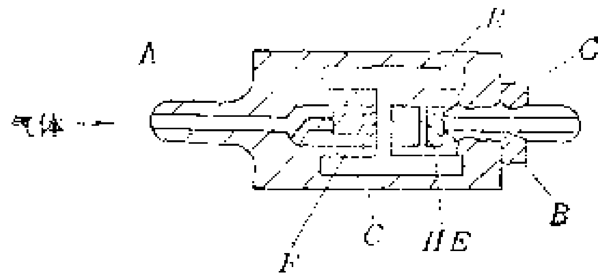


图 7.3.1 Galton 哨的基本结构

共振腔相当于一头开口，一头封闭的管，它的固有频率经验公式为

$$f=\frac{c}{4(h+k)},$$

式中，C 是声速，h 是共振腔深度，k 取决于媒质压强的常数；它的值由实验来确定.

上式是很近似的，后人对于下面将谈到的哈脱曼哨研究所得到的经验公式，更符合实际一些，并对设计者带来一定的方便。

Hartmann 哨：它是 J. Hartmann 改进的一种共振腔哨，其中仍是用高速气体作动力源，能以合理的效率产生较高声强的超声波发生器，把 Galton 哨的环形喷嘴改为锥形喷嘴。Hartmann 哨的基本结构如图 7.3.2.

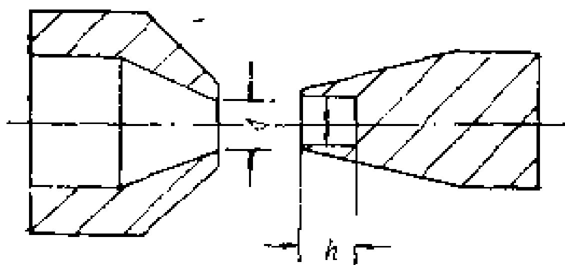


图7.3.2 Hartmann 哨的基本结构

Hartmann 哨是这样工作的：高速气流以超声速从喷嘴喷人共振腔体并满足一定的条件时，Hartmann 哨就发声。此时引起共振腔周期性充气过程，这种过程可以用喷嘴到共振器的超声速气流来研究，如图 7.3.3 所示.

这种过程可分成如下的阶段：(i)气流冲入图右边的共振器，在这种情况下 $V_o>V_p$，这里 V_o 和 V_p 是喷嘴中和共振体内的气体速度，气流柱的形成如图 7.3.3(a)所示；(ii) $V_o=V_p$ 时出现气

流的瞬时动力平衡．流柱构形如图 7.3.3(b) 的形式，因为共振腔内气体压力不能大于喷口内气体的压力，所以气体充满共振腔的过程是反复进行的．

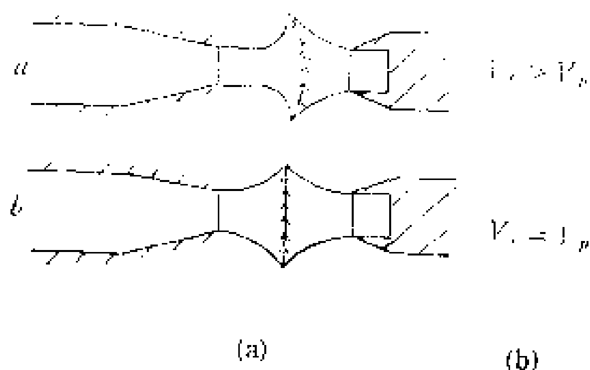


图 7.3.3 Hartmann 哨共振腔的充气

实际上速度 V_c 和 V_p 的两个流柱的衔接处所形成的流柱的交迭地粗大，不是别的，而是振荡性稠密跃变，从而使哨发声。图 7.3.4 是对共振腔哨的发声物理模型解释，但对这个解释还有一些争论．

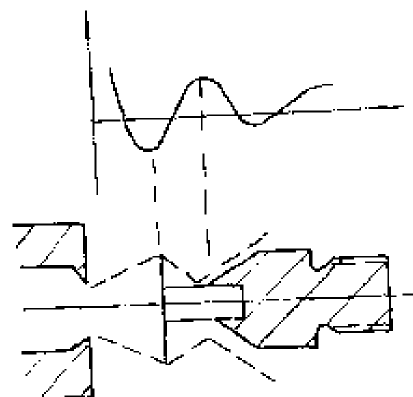


图7.3.4 Hartmann哨的发声物理模型

Hartmann 哨的共振腔体的经验公式为

$$f_{基频}=\frac{c}{4(h+0.3d)}.$$

Буше 哨：这是以多个Hartmann哨组合而成的组合哨，且其中使用了反射面，并装有指数喇叭型的辐射器，是可得到大功率的超声波发生器．这种发声器，是 Буше 发明的，故叫 Буше 哨，见图 7.3.5．

图 7.3.5(a) 是 Буше 哨的剖视图，图 7.3.5(b) 是其声强指向图。径向装置设在指数形的扩展环形喇叭的咽喉处，发生器的结构可以调节，喷嘴和共振器之间的距离为 l，而且还可以调节喷嘴共振器轴线与反射器“4”之间的距离．把反射器调制到与喷嘴共振器轴一定距离时，即能使发声强度尖锐地增大．当超声速流体送进（通过连接管“5”和扩散器“6”）哨的喷嘴时，就发出一定频率的声振动．当喷嘴和共振器口之间的距离 l 与喷咀直径 d 的比约为 1.4 时，得到最大声强（如图 7.3.6 所示）．实验证明，环形反射器的宽度 h 不能小于 $0.6d$，否则声的辐射强度会急剧地减

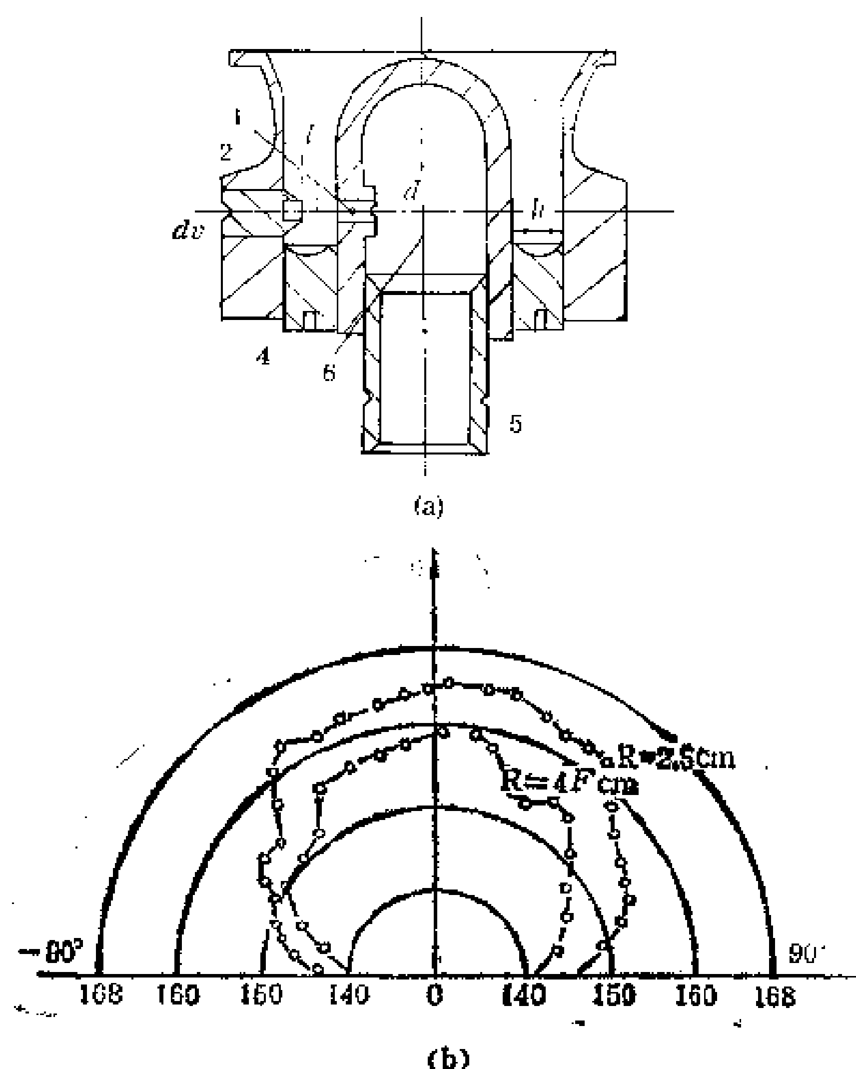


图 7.3.5 Бyme哨的结构和声强指向图

小.

杆式共振哨：为使共振哨更好地在工业上应用，一些国家(包括苏联、中国等)的研究人员分别作了大量的研究，创造了多种类型的杆式共振哨：外腔式，内腔式，以及带有反射器的杆式共振腔哨，已逐步应用于工业炉中的声烧嘴．它能节约燃料和减少大气污染，在工业应用中将发挥较大的作用．外腔式杆式共振哨结构图见图 7.3.7．内腔式的杆式

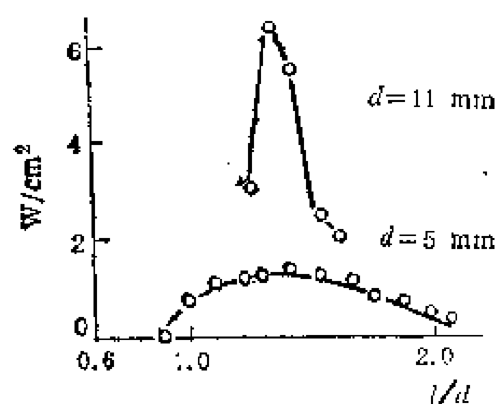


图 7.3.6 曲线①相应于没有反射器的情况；②具有反射器的曲线

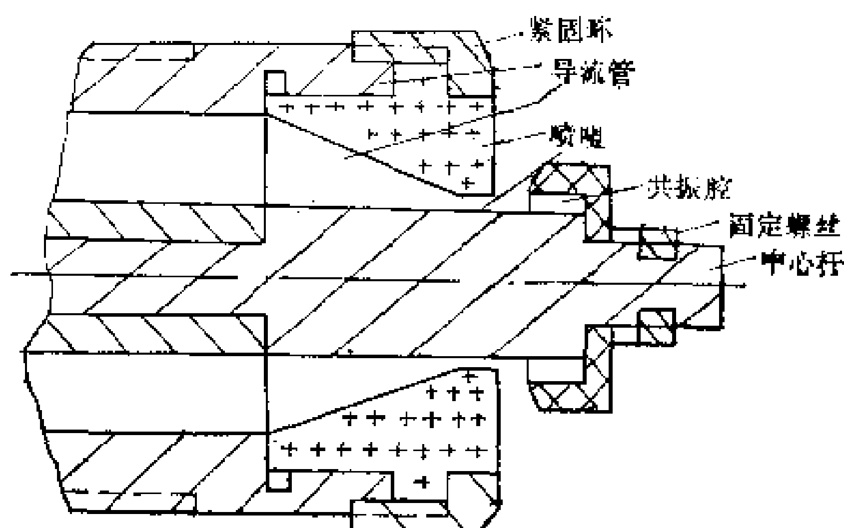


图7.3.7 外腔式杆式共振腔哨

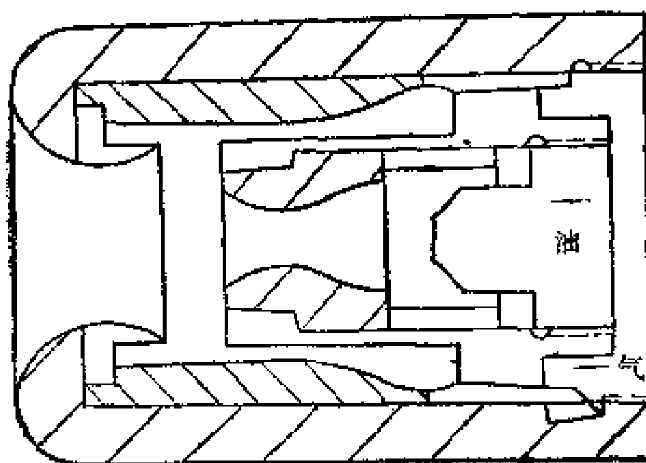


图7.3.8 内腔式声助燃器

共振哨结构图见图7.3.8.

图7.3.9给出带有反射器的杆式共振腔哨结构图.

经过大量的实验总结得到,杆式共振腔哨的经验公式为

$$f_{基频}=\frac{c}{4(h+0.6B)},$$

式中,c是空气中的声速,h为腔体的深度,B为腔体的狭缝宽度.测定值和计算值之间百分误差最大不超过9%. 需要指出,喷口压力对工作频率有一定的影响.

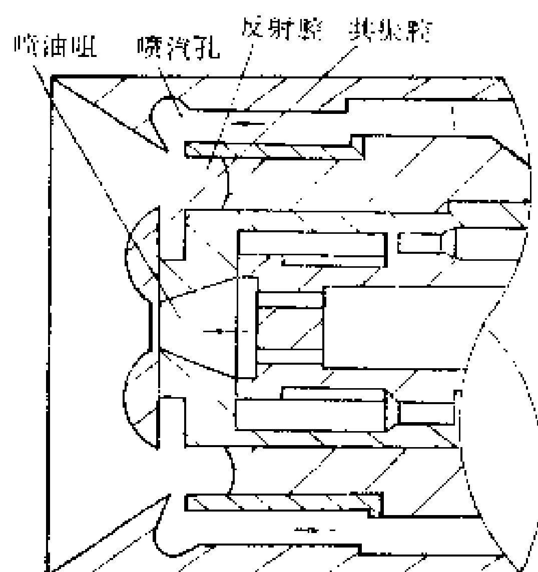


图 7.3.9　带有反射器的杆式共振腔哨

7.3.2　气流式旋笛

旋笛工作原理是：高压气体通过一定气孔以高速交替断续通过转动着的小孔，冲击气体介质而发出声波和超声波．它是一种气流式发声器．为了能获得频率可调的声波和超声波发生器，调制空气通过孔口的次数，采用一个带孔定盘和带孔转盘．旋笛发声器一般结构如图 7.3.10 所示．

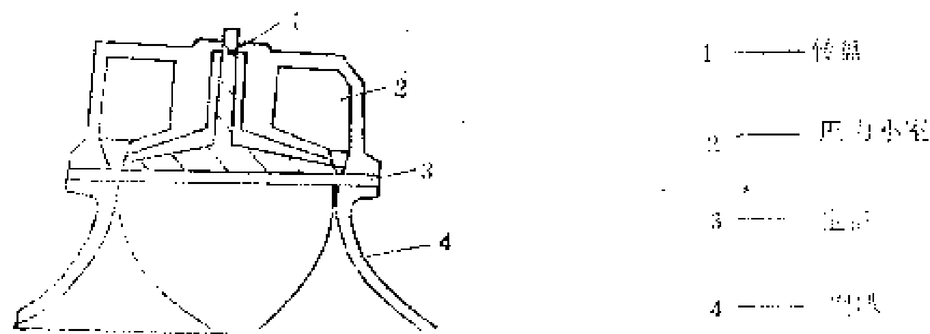


图 7.3.10　旋转发声器

当转盘转动时，定盘上的小孔时而被转盘所掩盖，时而与转盘上的小孔相重合，气流通过这种装置射出，呈脉动的气流柱．从小孔中冲出来的气流柱，即产生声波和超声波．这种结构的气流体发

生器叫旋笛.

转盘一般是圆盘形，在圆盘上有若干个等距分布在圆盘圆周口上的上孔,转子是由电动机带动的,电机是可变速的,如只需固定频率,就用常用电机。转子高速运转时,应力集中现象对元件来说将是很危险的,因此转盘一般用高强度铝合金制成,转盘截面形式一般按下式制作:

$$y = Ae^{-bx^2},$$

这里 y 为厚度, x 为半径. 这样就较好地保证了应力的均匀.

定盘同样是圆盘形的。气孔分布在定盘的圆周上，与转盘小孔数目相比,气孔数可相同,也可不同. 但两个盘上小孔中心必须在同一半径的圆周上.

为了使声波很好地辐射出去而声强不过多减弱，一般在发生器输出端安上喇叭,采用指数形的喇叭. 欲使辐射声波均匀,压力小室应有足够空间,同时必须保证作用在圆盘上的各点压力相等.在某些型式中，为了减少压力小的空气随转盘而旋转所产生的涡流,将压力小塞分成若干部分,各自用隔板隔开.

在理想的情况下,转盘和定盘紧密相接时,旋笛的发声效率是相当高的，但是要完全密合是不可能的. 因为一个转盘高速旋转时,不可能不产生微动. 因此，转盘和定盘应有适当的间隙，造成气体的泄漏,这样效率降低. 所以在设计旋笛时,注意在不影响转盘的高速运行的前提下，间隙尽量要小. 这样对气笛加工精密度提出了较高的要求. 提高旋笛的效率，不仅在于改善转盘和定盘的间隙,还有一个很有效的方法，即改进小孔的形状，选择适当小孔组合,加大流量系数，提高旋笛的输出功率，一般转盘上小孔为距形,定盘上小孔为圆形最为合理.

为了提高旋笛输出功率,往往容易想到提高小室压力,但是要注意,在一定压力内,这是有效的,而超过某一极限值之后,在提高压力时,功率增加很慢,从经济观点来讲是不合算的.

旋笛基频计算公式是

$$f_{基频}=\frac{n\times N_孔}{60}(\mathrm{Hz}),$$

其中 n 是转盘转速(周/分)，$N_孔$ 是转盘上小孔数.

7.3.3 液哨——簧片哨

液哨是利用液体作动力源的声能换能器，其中主要的一种是簧片哨. 簧片哨主要是由一个喷口和一片簧片组合而成的. 它是1948年由 R. Pohlman和 W. Janovsky 首先发明和应用于工业中的，所以也叫 Pohlmon-Janovsky 哨，其结构如图 7.3.11 所示. 确切地讲，簧片哨是在液体中利用液体射流的振动来激发簧片的振动而得到声波和超声波的一种液哨.

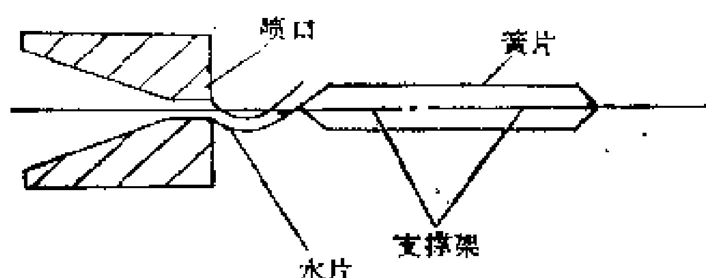


图7.3.11 四支点簧片哨

Pohlman 和 Janovsky 所用的簧片哨中，簧片由四个支撑点支撑，所以这种簧片哨叫四支点簧片哨. 这种哨的簧片的固有频率为

$$f_{固}=\frac{f_{空}}{\sqrt{1+\beta}}\mathrm{Hz},$$

其中 $f_{空}=1.03\frac{t}{l^2}\sqrt{\frac{E}{\rho}}$, $\beta=0.145\frac{\rho_1 l}{\rho t}$,

t 是簧片平均厚度，ρ_1 是液体介质密度，

l 是簧片的长度（有效振动部分），

E 是簧片材料的杨氏模量，

ρ 是簧片的密度.

改进的簧片哨为悬臂式簧片哨，它是由一端固定，一端可自由振动的簧片构成. 其结构如图 7.3.12.

悬臂式簧片哨的簧片固有频率基频的计算公式为

$$f_{簧}=\frac{f_{空}}{\sqrt{H-0.34\frac{\rho_1 M}{\rho t}}},$$

$$f_{空}=0.162\frac{t}{l^2}\sqrt{\frac{E}{\rho}},$$

式中 $M=1.3\sqrt{l\omega}$，ω 为簧片宽度. 簧片哨的液片的本征频率为

$$f_n=\frac{nu}{h}\varphi\left(\frac{h}{nb}\right),$$

式中$n=1,2,3,4,\cdots$，u是液片喷口流速；h是液射流片的长度，即喷口到簧片刃口之距离；b是喷口厚度；φ满足方程：

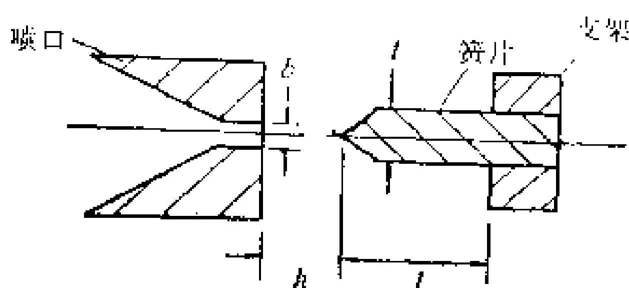


图 7.3.12 悬臂式簧片哨

$$\varphi^3+\left(3-\frac{27}{2}\frac{h}{n\pi b}\right)\varphi^2-4=0.$$

水片振动频率可达七次谐频. 实验中得出，本征谐频率对流速 u 与喷口到簧片刃口之距离 h 之比$\left(\frac{u}{h}\right)$的关系曲线如图 7.3.13 所示.

实验结果表明：簧片有其本身的本征频率，射流液片也有其本身的本征频率. 当一个哨制成之后，通过改变液体的压力，液体射流的流速也随之相应的变化. 当液流片的本征频率和簧片的本征频率吻合时，簧片哨就产生共振，强声波向周围液体介质中辐射.

液体本征频率存在多次谐频，对簧片的本征频率，也存在多次谐频. 液片任意一次谐频与簧片的任意一次谐频相吻合都能共振. 一般来讲，二者基谐吻合时，效率最高. 它可以用于杀菌，清洗，乳化，匀化，粉碎，促进化学反应，提高热传导系数等等.

随着应用的扩大，要求簧片振幅越来越大，而簧片材料因疲劳而断裂成为簧片哨应用的一个障碍．近年来，金属材料科学的发展，使声强可以越来越高，簧片哨的簧片的寿命也不断地增加．簧片刃口的耐磨问题，则用镶嵌技术得到一定程度解决．

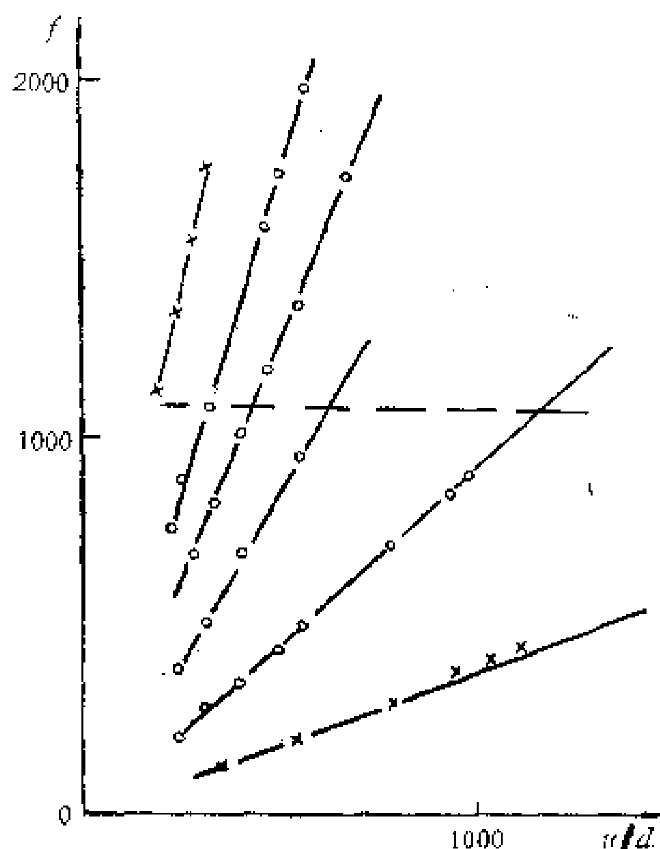
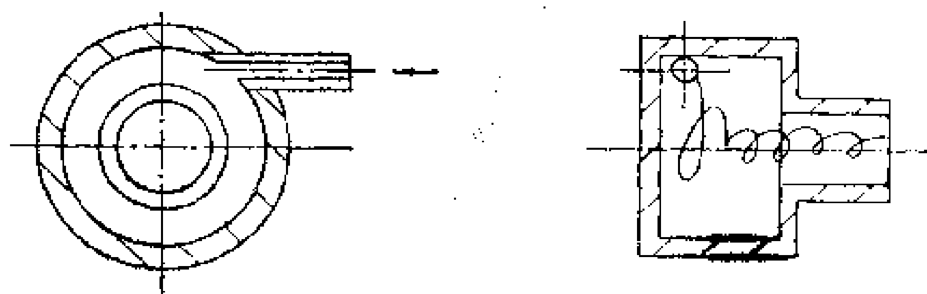


图7.3.13　6 次谐频 f 与 (u/d) 的关系曲线

7.3.4　气液式发生器——旋涡哨

用气体和液体作动力源能起到同样发声的功能．旋涡哨的基本结构包括一个有圆形截面的管（腔体），气体和液体切向地射入管中，由于高速射流迅速的转动而产生涡旋，如让这些转动的气体或液体从一个开孔逸出，则会产生声波，见图 7.3.14．


图 7.3.14　旋涡哨

当气体作为介质时，旋涡哨的频率与压力，哨的尺寸关系式为

$$f=a\left(\frac{c}{\pi D}\right)\left(\frac{p_1p_2}{p_2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

其中 f 为频率，a 为一个小于 1 的常数，c 为声速，D 为管的直径，p_1 为进入口压力，p_2 为排出口压力.

旋涡哨加工方便，结构简单和牢固耐用，是很有前途的哨. 目前已用于冷却工业，水和燃油雾化. 但由于应用不广，尚未被重视. 对它的发声机理研究得很少，所以目前换能效率还很低. 现在只知道出口直径与入口直径之比应为 2 ∶ 1，出口管的长度等不宜太长或太短，尚不知其最佳值.

用液体来激发声波，则声强很弱，效率更低，是否能在液体中得到强声，尚待努力.

7.3.5 圆板哨

圆板哨于 1960 年才问世，它是由气体或液体射流激励圆板或具有张力的圆模，使圆板或圆模发生振动而产生声波和超声波的一种新型的流体动力式发声器.

圆板哨的特点：它是流体动力式发生器中唯一能把射流与声

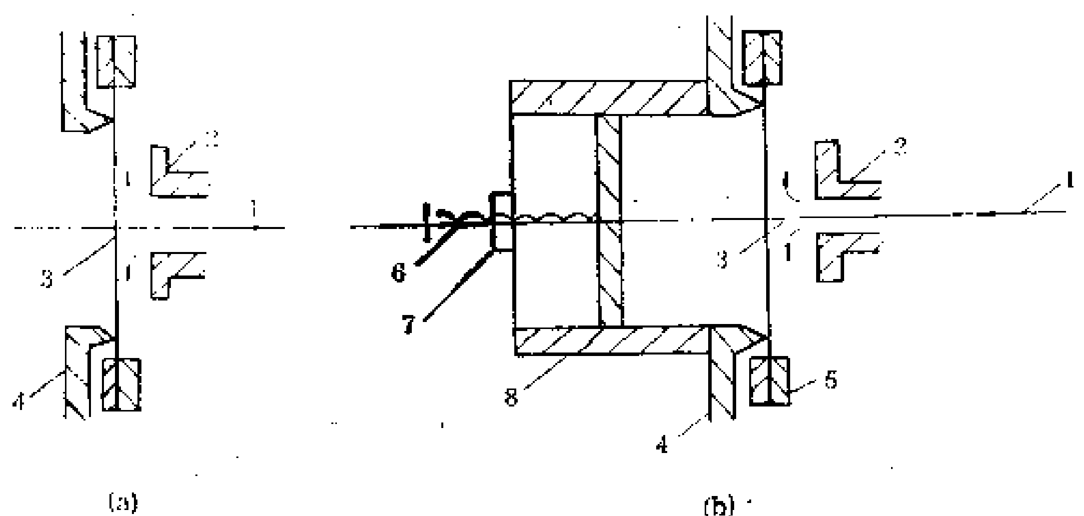


图 7.3.15 圆板哨原理图

1.液体；2.射流喷口；3.板或模；4.张力环；5.支架；6.螺杆；7.锁紧帽；8.共振腔体

波分开的流体动力式发声器．同时它的换能效率较高，在空气介质中声强很高，目前声强已达到 176dB (近场)．在液体介质中声强可达 126dB 以上．它的结构如图(7.3.15)所示，其中 (a) 为不带共振腔式的圆板哨，(b) 为带共振腔式的圆板哨.

在加单面水负载时，圆板固有频率为

$$f=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{hc_p}{a^2}\right)\left\{\frac{3}{4\Lambda}\left[K+\frac{m}{M}+\frac{8\theta}{3\pi}\left(\frac{\rho_\omega}{\rho_p}\frac{a}{h}\right)\right]\right\}^{-\frac{1}{2}},$$

其中：$c_p=\left[\frac{E}{(1-\mu^2)\rho_p}\right]^{\frac{1}{2}}$ 表示材料厚度为均匀无穷大时板中伸缩波的传播速度；

h 为板的厚度，μ 为泊松比，ρ_p 为板的密度；

E 为杨氏模量，a 为圆板半径，ρ_ω 为水的密度；

m 为集中在板中心的质量，$M=\pi\rho_p a^2 h$ 是板的质量；而

$$\Lambda=\left[\frac{1+\mu}{2}\alpha^2+2(1+\mu)\alpha\beta+\left(\frac{10}{3}+2\mu\right)\beta^2\right],$$

$$K=\left[1+\frac{\alpha^2}{3}+\frac{\beta^2}{5}+\alpha+\frac{2}{3}\beta+\frac{1}{2}\alpha\beta\right],$$

$$\theta=\left[1+\frac{14}{15}\alpha+\frac{5}{21}\alpha^2+\frac{214}{675}\alpha\beta+\frac{314}{525}\beta+\frac{89}{825}\beta^2\right],$$

对于水中加紧板：$\alpha=-2\beta=1$.

7.3.6 流体动力式发生器现状和展望

由于流体动力式发生器的结构简单，坚固耐用，处理量大，耗电量小以及它的动力源的方便，因而它是很适合于工业上应用的．目前广泛用于乳化，粉碎，均化，雾化以及用于促进化学反应，除尘，助燃等等．在工业上的应用方面已显示出它的独特的优点，从而展示出它的巨大生命力．然而，由于流体动力哨是用流体射流作为动力源来激发声波的，而射流的流体动力学是一个较为复杂的课题，射流与腔体的耦合发声所涉及到的物理模型也是不详的，存在着多种的观点，此外其中涉及到的数学处理也是非常困难的，

因而至今流体动力哨的发声机理还没有得到较为令人满意的解释，大部分的研究仅限于有关实验现象分析．一系列的应用中，主要基于经验公式以及具体不同的状况的实验曲线给出的结果与特征趋势来考虑问题．对于实际要求来说，理论上的精确预示与计算有关的声波特征，如频率、强度、声场分布等等，无疑能更有利于它的应用以及控制．因而，对流体动力发生器声波的产生和特征的进一步研究是今后值得深入探讨的研究方向．

§7.4 功率超声的空化现象

空化是液体中的一种物理现象．在液体中由于涡流或超声的物理作用，液体的某一区域会形成局部的暂时负压区，于是在液体中产生空穴或气泡．这些充有蒸气或空气的气泡处于非稳定状态．当它们突然闭合时，会产生激波，因而在局部微小区域有很大压强．由于气泡的非线性振动和它们破灭时产生的巨大压力，伴随着这种空化现象会产生许多物理和化学效应．这些效应有积极和消极的两个方面．例如，超声空化的“腐蚀”作用在超声清洗中是很有用的．许多实验证明，物体的表面污膜在强超声场中会被破除，其主要原因是超声的空化作用．利用超声空化效应还能使两种不相溶的液体乳化，其它应用有：超声搪锡，超声破碎生物细胞等等．这在功率超声的应用一节中将详细介绍．在水声方面，空化作用常常表现为消极的方面．例如舰船用的高速旋转的螺旋桨叶的表面会受“腐蚀”损坏，大量气泡的出现会影响螺旋桨的推力，会使声呐降低辐射功率，增加声在介质中传播的衰减以及空化噪声对水声的干扰等等．

本节简单地介绍超声空化现象，产生空化的最低声压幅值，即空化阈与哪些因素有关以及空泡闭合时所产生的激波强度，以帮助了解下一节中将要介绍的超声某些应用机理

7.4.1 液体的强度

对于纯净的液体，由于分子的内聚力很大，所以理论强度很

高．纯水在 20℃ 下的理论强度约为 3250 公斤/厘米²．设想用声波的作用把液体分子拉开，则声强要达到 3.7×10^{6} 瓦/厘米²，这是很难实现的．但实验表明，液体的空化阈值要比理论值小得多，估计水的实际强度不会超过几百个大气压．这种现象一般可用稳定气泡核学说来解释．空化首先是从液体中强度薄弱的地方开始，这些地方由于热起伏或其他物理原因出现一些很小的蒸气气泡，或者那里原来就有溶解在液体中的空气泡(称为核)．于是在声压负压的作用下，气泡核膨胀而产生空化．一定状态下，空化核只能以一定大小存在于液体中，气泡太大就浮出液面，太小在静压力的压缩下就溶于液体中．

以水为例，设静水压为 P_0，蒸气压为 P_v，表面张力为 T，而空化核的开始半径为 R_0，在等温和绝热过程下，水的强度 P_t 为

$$P_t=-P_v+\frac{2}{3\sqrt{3}}\sqrt{\left(\frac{2T}{R_0}\right)^3\Big/\left(P_0-P_v+\frac{2T}{R_0}\right)}. \quad (7.4.1)$$

由上式可见，液体强度降低的原因是液体中存在小气泡核，气泡核的半径 R_0 愈大，则该处液体的强度愈弱．如果气泡核的半径 R_0 很小，要使液体空化就需要更强的负外压才能发生．

产生气泡核的可能原因有：液体中的热起伏，液体在运动过程中混入气体，此外激光脉冲和高能粒子也能引起气泡核．

7.4.2 空化阈

使液体空化的最低声强或声压幅值称空化阈．设液体的静压力为 P_0，交变声压幅值为 P_m，则只有 $P_m>P_0$ 时才能出现负压．负压超过液体强度时才能形成空化．因此空化阈 P_c 可由下式表示

$$P_c=P_0-P_v+\frac{2}{3\sqrt{3}}\sqrt{\left(\frac{2T}{R_0}\right)^3\Big/\left(P_0-P_v+\frac{2T}{R_0}\right)}. \quad (7.4.2)$$

可见，空化阈值随不同液体而不同；对于同一种液体，不同的温度、压力、空化核半径及含气量，空化阈值也不同．液体含气量越少，空化阈越高．例如在 10kHz 以下，自来水的空化阈是 0.5

atm左右，除气后空化阈升到1.5 atm左右．空化阈随液体的静压力增加而增加．此外，空化阈还与液体的粘滞性有关，液体的粘度大，空化阈也高．表7.4.1给出几种不同粘滞系数的液体在25kHz下的空化阈．

表7.4.1 25kHz空化阈和粘滞性的关系

材　料	粘滞系数(25℃) (Ns/m^2)	声　速 (m/s)	密　度 (kg/m^3)	空化阈声压 (atm)
六氟二甲苯	0.00084	879	1370	1.5
四氯化碳	0.00098	926	1595	1.2
煤油	0.004	1324	810	2.0
二甲基酞酸酯	0.0178	1463	1176	3.3
鲸油	0.025	1440	880	2.8
亚麻油	0.038	1468	921	2.5
玉米油	0.063	1463	914	3.1
橄榄油	0.084	1431	912	3.4
蓖麻油	0.063	1477	969	3.9

空化阈和粘滞系数的关系大致可用经验公式表示：

$$P_c = 0.8(\log\eta + 5), \tag{7.4.3}$$

式中 P_c 是空化阈，η 是粘滞系数．

空化阈和声波的频率也有密切关系．频率越高空化阈也越

表7.4.2 不同频率声波的超声空化阈值 P_c

f(kHz)	P_{eff} (atm)	说　明
0	⩾0.5	
0.1	⩾0.25…0.9	空化出现在边界面上
1.5	>0.1	未观察到
3.0	>0.5	空化出现在除气水中
15.0	0.5—2.0	—
175.0	4.0	空化出现在自来水中
365.0	7—20	—
500.0	12—25	—
3300.0	230—300	—

高，在 100 到 1000kHz 之间空化阈值增加很快，到 5MHz 时几乎超过 100 个atm. 表 7.4.2 给出水在不同频率时的空化阈值.

7.4.3 气泡的运动

气泡在声场的作用下会进行振动，但不一定会发生气泡闭灭. 当声波的频率小于气泡的谐振频率时才会使气泡闭灭，而当声波频率超过气泡的谐振频率时，气泡进行复杂的振动，但不能使气泡闭灭.

气泡的谐振频率决定于气泡原始半径 R_0 及液体的静压力 P_0 以及其它物理常数. 谐振频率大致可由下式计算：

$$f_0=\frac{1}{2\pi R_0}\sqrt{\frac{3\gamma}{\rho}\left(P_0+\frac{2T}{R_0}\right)}, \tag{7.4.4}$$

式中 γ 是比热比，T 是液体的表面张力，ρ 是液体的密度. 以大气压力下的水为例，$P_0=10^5\mathrm{N/m^2}$，$\gamma=1.4$，$\rho=1\mathrm{kg/m^3}$ 可求得不同气泡半径 R_0 时的气泡谐振频率.

f_0(kHz)	1	10	100	1000
R_0(mm)	3.3	0.33	0.033	0.0033

设液体不可压缩，液体中有一气泡，半径为 R；气泡所在液体中静压为 P_0，超声声压为正弦变化：$P_m\sin\omega t$，则可以求得气泡的运动方程为

$$R\frac{d^2R}{dt^2}+\frac{3}{2}\left(\frac{dR}{dt}\right)^2+\frac{1}{\rho}\left[P_0-P_m\sin\omega t-P_v+\frac{2T}{R}-\left(\frac{R_0}{R}\right)^3\left(P_0-P_v+\frac{2T}{R_0}\right)\right]=0, \tag{7.4.5}$$

式中所用符号与前面的式子相同. 解这个方程，可求出在不同初始条件下气泡的增长和闭合运动.

图 7.4.1 给出两组参数 (R_0, P_0, P_m, ω) 情况下，气泡半径 R 随时间变化数值解的曲线图形.

图7.4.1 中曲线 1 和 2 对应两种情况：取 $P_0=10^5\mathrm{N/m^2}$ 声压

幅值 $P_m = 4\times10^5\ \mathrm{N/m^2}$，$R_0 = 0.8\times10^{-4}$ cm时，第一种情况，当声波频率 f_1 为 4.8MHz；第二种情况是声波频率 f_2 为 14.3 MHz．气泡的谐振频率约为7 MHz，是介乎 f_1 和 f_2 之间．上下图对应于两种不同频率下气泡半径的动态曲线．上图是声压变化曲线，虚线 1 对应于 $f_1<f_0$（f_0 为气泡的谐振频率）的情况．气泡半径随声压趋向于负值而不断增大．当声压为正压力时，由于气泡表面振动的惯性作用，仍以某一速度膨胀，达到某一最大值 R_m 以后开始收缩．在正压作用下，收缩速度愈来愈快，以至气泡迅速闭合．从气泡最大半径到闭合的时间只有 10^{-8} s数量级，只及声波的四分之一周期．实线 2 则对应于 $f_2>f_0$ 的情况，气泡作非线性振动而不闭合．由此可见，气泡振动和声波频率有关．对一定强度的声波，能够产生空化的气泡，其半径有一最小临界值，半径小于这个临界值的气泡不可能拉开；气泡半径也不能太大，半径大的气泡的谐振频率低于声波频率时，气泡虽然被拉开，但不闭合．

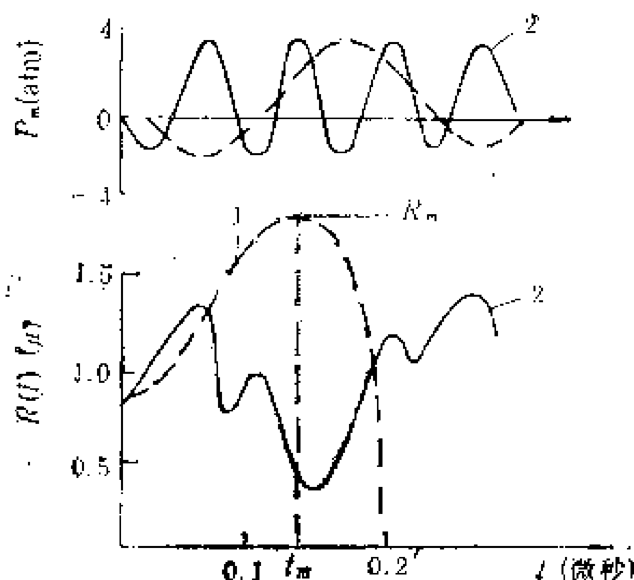


图 7.4.1　对应两种频率气泡半径随时间的变化

图 7.4.2 是簧片哨在液体中引起声空化全过程的照片．这是用高速摄影机（最高速度为 4×10^4张/s）拍摄的在簧片哨共振工作情况下声空化泡生长闭合的全过程．簧片两侧的黑点是声空化气泡．从气泡的大小可以看出声空化气泡从生长到闭合，又生长到闭合的全过程．

7.4.4　气泡闭合时所产生激波的强度

设液体不可压缩，忽略气泡中的气体，则气泡的收缩速度为

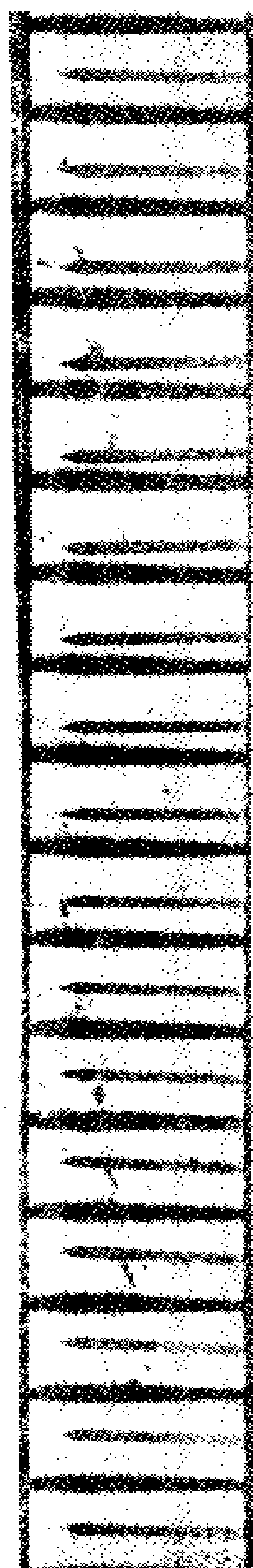


图 7.4.2 簧片哨产生的声空化过程

$$V = \sqrt{\frac{2}{3}\frac{P_0}{\rho}\left(\frac{R_m^3}{R^3} - 1\right)}, \quad (7.4.6)$$

式中 R_m 为气泡膨胀到最大时的半径．由上式可见，当 R 收缩到零时，收缩速度趋近于无穷大．这显然是不可能的，因为上式没有考虑到介质的吸收，而且气泡压缩到很小时，绝热假设不成立，受压缩时温度会升高，形成温度梯度而产生热损失。所以上式是近似的，但说明收缩速度随半径的减小愈来愈快．

Rayleigh 做过简化计算，求得气泡完全闭合所需要的时间约为

$$\tau = 0.915 R_m (\rho/P_0)^{\frac{1}{2}}. \quad (7.4.7)$$

在大气压力下，一直径为 0.1mm 的气泡的闭合时间为 5 μs，比声周期小得多．Rayleigh 并且给出，当气泡被压缩到 R 时，距离 $1.587R$ 处的压力最大，可达到

$$P_{max} = P_0 4^{-\frac{4}{3}}\left(\frac{R_m}{R}\right)^3. \quad (7.4.8)$$

根据上式估算，局部压力可达千个大气压，由此足以看出空化能产生巨大作用的原因．

如果考虑气泡内含有气体且泡内压强为 Q（包括蒸气和扩散进去的气体的总压强），则得到气泡收缩速度为

$$V = \left\{\frac{2}{3}\frac{P_0}{\rho}\left(\left(\frac{R_m}{R}\right)^3 - 1\right) - \frac{2Q}{3\rho(\gamma-1)} \times \left(\frac{R_m^{3\gamma}}{R^{3\gamma}} - \frac{R_m^3}{R^3}\right)\right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (7.4.9)$$

其中 γ 为气体的等压比热和等容比热的比

值.

气泡在闭合过程中，在气泡附近的压强 $P(r)$ 为

$$P(r)-P_0=\frac{1}{3Z}\frac{R_{max}}{r}\left[\frac{Z^{\gamma}Q}{\gamma-1}(3\gamma-4)\frac{ZQ}{\gamma-1}+(Z-4)P_0\right]$$
$$-\frac{1}{3Z^4}\frac{R_{max}^4}{r^4}\left[P_0(Z-1)-\frac{Q}{\gamma-1}(Z^{\gamma}-Z)\right], \qquad (7.4.10)$$

式中 $Z=\left(\frac{R_{max}}{R}\right)^3$，$\gamma=\frac{4}{3}$. 可见气泡在闭合过程中，气泡压缩到最小半径时，产生的压强最大. 气泡原来半径愈大，闭合半径愈小，则激波压力也愈强.

实际上气泡半径的最大值 R_m 决定于声压振幅 P_m 和频率，P_m 愈大 R_m 也大；而频率较低时，周期更长，气泡能膨胀到相当大并闭合，于是所产生的激波更强. 但是当声波频率比气泡的谐振频率高时，则气泡难以闭合而产生空化.

§7.5 功率超声的主要应用及其作用机理

功率超声目前已广泛地应用于工业、农业、国防、医药卫生和环境保护等部门. 根据应用面和共同的物理或工艺基础，主要应用大致有下列几个方面：(i)超声清洗；(ii)超声塑料和金属焊接；(iii)超声金属成型；(iv)超声加工；(v)超声化学处理等. 应用较小的领域还有：超声疲劳破坏试验、压缩粉末、振动筛；在液体中的应用有超声电解处理、热传送处理、搪锡、乳化和分散、解聚、除气和腐蚀试验；在气体中的应用有超声产生气溶胶，气溶胶沉淀，干燥，消泡沫和杀菌等等. 下面简单地介绍一些主要应用及其作用机理.

7.5.1 超声清洗

图 7.5.1 是超声清洗的原理图. 换能器通过槽壁向盛在槽中的清洗液辐射声波，由于超声空化的力学效应使浸在液体中的零

部件的表面污物迅速被除去.

超声清洗的特点是速度快、质量高，易于实现自动化，特别适用于清洗件表面形状复杂的细致清洗，某些场合可以用水剂代替油或有机溶液进行清洗. 对于需要用酸或碱清洗的某些零部件，用超声清洗可以降低酸碱的浓度，因而能降低成本和改善劳动条件. 因此超声清洗已广泛地用于电子和仪表工业中，它可以清洗半导体元器件、印刷电路板及电真空零件，清洗继电器和轴承等. 超声清洗也广泛用于机械工业中，如清洗各种零部件，小的如手表零件、油泵油嘴偶件、大的如柴油机、汽车部件以及整个导弹部件. 在光学和医药工业中可清洗各种光学玻璃、药瓶和针管等等.

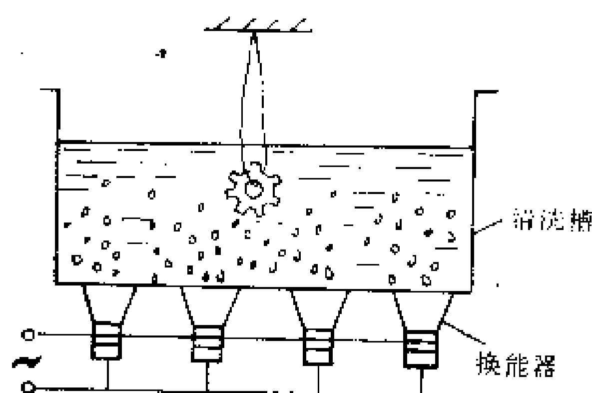


图7.5.1 超声清洗示意图

对某些清洗程度要求很高的零部件，用超声清洗可以达到所要求的清洁度，如集成电路、惯性导航的螺陀仪和航空轴承等可以用超声清洗；在另一些难于清洗而有损人体健康的场合，如核工业及医疗中的放射性污物的清洗，可以用超声洗净，并能实现遥控或自动化清洗.

超声清洗是功率超声应用最广泛的一种，其作用机理主要是超声空化作用. 存在于液体中的微气泡(空化核)在声场的作用下振动，当声压达到一定值时，气泡迅速增长然后突然闭合，在气泡闭合时产生激波，在其周围产生上千个大气压力，破坏不溶性污物而使它们分散于溶液中. 蒸气型空化对污层的直接反复冲击，一方面破坏污物与被清洗件表面的吸附，另一方面也会引起污物层的疲劳破坏而脱离. 气体型气泡的振动能对固体表面进行擦洗，污层一旦有缝可钻，气泡还能"钻入"裂缝作振动，使污层脱落. 由于超声空化作用，两种液体在界面迅速分散而乳化. 当固体粒子被油

污裹着而粘附在被清洗件表面时，油被乳化，固体粒子即脱离. 超声空化在固体和液体界面所产生的高速微冲流能够除去或削弱边界污层，增加搅拌作用，加速可溶性污物的溶解，强化化学清洗剂的清洗作用.

如上所述，超声清洗的主要机理是超声空化作用，所以要达到良好的清洗效果必须选择适当的声学参数和清洗液的物理化学性质. 例如，并不是声强越高，清洗效果越好. 声强过高会产生大量气泡，在声源表面形成一道屏障，声不易辐射到整个液体空间，因而在远离声源的地方清洗作用减弱. 又如从前面讨论的超声空化知道，频率越高，空化阈越大，也就是说要产生超声空化需要大的声强. 一般说，频率在 10 kHz左右空化较强，但空化噪声大，因此从清洗效果及经济性考虑，频率一般选择在 20—40 kHz范围，而声强为 1 — 2 W/cm^2. 对于一些难清洗的污物，如金属表面的氧化膜，清洗时则常采用较高的声强.

清洗液的温度增高时，空化核增多对产生空化有利，但温度过高时，气泡中的蒸气压增大对空化不利，此外温度还与清洗液的溶解度有关. 对水，较适宜的温度约 60℃. 此外，在选择清洗液时一般选用表面张力较大而蒸气压及粘性较低的液体.

7.5.2 超声搪锡

在容器中的锡被加热熔解成液态锡后，在锡液中引入超声，将金属件插入锡液中，由于锡液中超声空化所产生的力效应能除去浸在其中金属表面的氧化物，而搪上一层锡，这就是超声搪锡的基本原理.

铝制品的超声搪锡是很有实用价值的. 我们知道，铝件表面要搪上一层锡是很困难的，因为铝表面的氧化层很难除去，即使除去也很快氧化，因此用一般方法很难在铝件上搪锡. 一个成功的例子是，用超声方法使电力开关板上所用的铝母线(铝排条)搪锡，使得铝铜搭接中所产生的电化腐蚀作用大大减少，因而提高了铝母线的载流量，这不但节约了大量铝材而且缩小了体积，提高运行

的安全性．又如，在电子工业中的无线电元器件的引线采用超声搪锡，能够提高劳动生产率．此外，在铝制热交换器以及铝电缆的搪锡，超声技术都得到应用．

7.5.3 超声节能

本项应用一般使用流体动力式发声器．有以下几个主要方面：

(1) 超声乳化油水掺杂体　燃油掺水经超声乳化后燃烧，能起节约燃油、减少大气污染的作用．柴油、重油等燃油均可掺水乳化，随后在内燃机、锅炉、窑炉、加热炉、隧道炉、平炉中烧用．以柴油掺水作例，节油率常达6—8％，并减少大气污染．

(2) 超声制备煤浆　超声粉碎和乳化，是超声制备油煤浆、油水煤浆等关键所在．如超声制备油煤浆(COM)，含煤粉浓度最高可达约50％．可以实时制备，即边制备，边燃烧；可以加入亲水性或亲油性的添加剂(稳定性更好)，也可以不加任何添加剂．燃烧效率可达98％．可以煤代油35—40％．

(3) 超声助燃　在工业炉中试验表明，使用超声助燃器节油可达10％；燃烧时火焰发白、发亮，稳定性好．

7.5.4 超声粉碎

(1) 工业用的二硫化钼的粉末中，在0.5μm的微粒要占95％以上，用超声簧片哨来粉碎，能得到良好效果，因为二硫化钼作为润滑剂，它的细度是质量的一个重要指标之一．

(2) 染料的粉碎　染料厂的染料粉碎，特别是不可溶性的矿物质染料的粉碎，如士林染料粉碎，若采用超声技术能获得2μm以下的染料粒子，可以作悬浮体来染色．这样不仅能节约染料，还能提高所染的布的质量，染色色质鲜艳，牢度增加，比胶体磨的耗电量小．

(3) 其它物质的粉碎　超声对食品工业中的可可粉、咖啡粉、巧克力粉等的粉碎，以及对矿山矿粉、碎性药品、上浆淀粉、化工日

用产品等的粉碎以及生物细胞的破碎都有效果.

7.5.5 超声焊接

超声焊接金属或塑料时不需要外加热. 图 7.5.2 是超声焊接两金属片的原理图. 焊件置于反射声极上,焊接时在焊件上施加一定的压力,当超声焊头(劈刀)作切向振动时,两金属片即焊上.

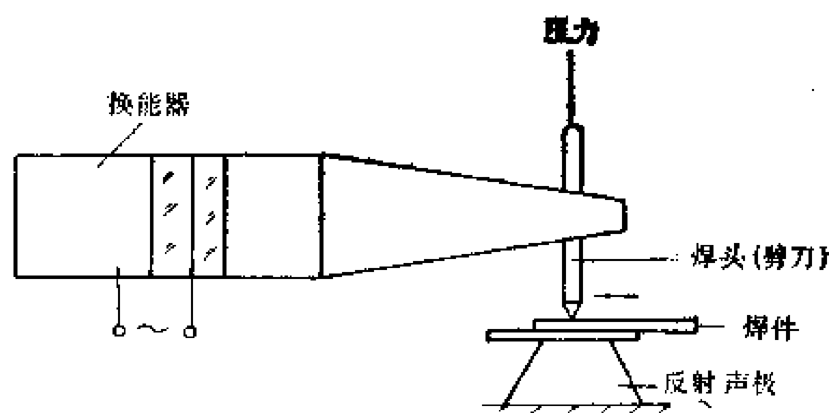


图 7.5.2 超声焊接原理图

超声金属焊接是30年代偶然发现的. 当时在作电流点焊电极加超声振动试验时, 发现不通电流也能焊上, 因而发展了超声金属冷焊技术. 超声焊接虽然发现较早,但是到目前为止,其作用机理尚不十分清楚. 它类似于摩擦焊,但有区别,超声焊接时间很短(1 s左右), 温度低于再结晶; 超声焊接和压力焊也不同, 因为所加的静压力比压力焊小得多. 普遍认为, 在超声焊接过程的初始阶段,切向振动能去除金属表面的氧化物,并使粗糙表面的凸出部分产生反复的微焊和破坏的过程,使接触面增大,到达一定时间后即焊上. 焊接时间过长或超声振动幅度过大都会使焊接强度下降,甚至破坏.

超声金属焊接的特点是: 不需要焊剂和外加热, 不因受热而变形,没有残余应力. 不但同类金属,而且异类金属之间也可以焊在一起. 可以将薄片或细丝焊在厚板上. 超声焊接良导电体的能量消耗比电流焊少得多. 在电子工业中常用于晶体管或集成电路

的引线焊接. 用于药物和易爆材料的密封焊时，能避免一般焊接因有熔解物而污染药品，不会因受热而发生爆炸等等.

除了超声金属焊接外，目前应用更广泛，发展速度更快的是超声焊接硬热塑性塑料. 其作用机理一般认为是在两塑料焊件的交界面由于振动摩擦而产生热，使在交界面比较薄的一层熔化而连接. 这种焊接的特点是在焊接时不必去油污. 用粘结或溶剂连接时需要胶粘剂或溶剂，因而有污物，焊件表面不干净且污染空气. 而超声焊接则不需要溶剂或胶粘剂，焊接速度快（一般少于 1 s），易于实现自动化；用加热熔接塑料时需要将焊件加热到材料的熔点以上，这种熔接方法会使焊件变形，而用超声焊接则只有交界面一薄层熔化，不会使焊件变形. 超声能够焊接高频热压焊不能焊接的介电损耗小的塑料膜.

除了塑料与塑料之间的焊接外，超声还能使金属零件镶嵌在塑料制品中. 超声振动施加于金属件，使金属件很快地镶嵌到塑料制品中，这在轻工塑料制品中是一种新工艺，使用方便而迅速，可以简化塑料模具制作. 超声还能对塑料薄膜及复合包装纸进行缝焊、封装，对化纤织物进行无线缝纫、剪裁及印花等等.

7.5.6 超声加工

超声加工是利用加工工具作超声振动并通过磨料冲击被加工工件来碎除材料的技术. 图 7.5.3 是超声加工原理图. 加工时，工具以一定静压力压在工件上，在加工区域送入磨料悬浮液. 工具作超声纵向振动时，对处于工具下端与被加工材料表面之间的磨料进行周期性的锤击，通过磨料的冲击把加工区的材料粉碎成细粒而从材

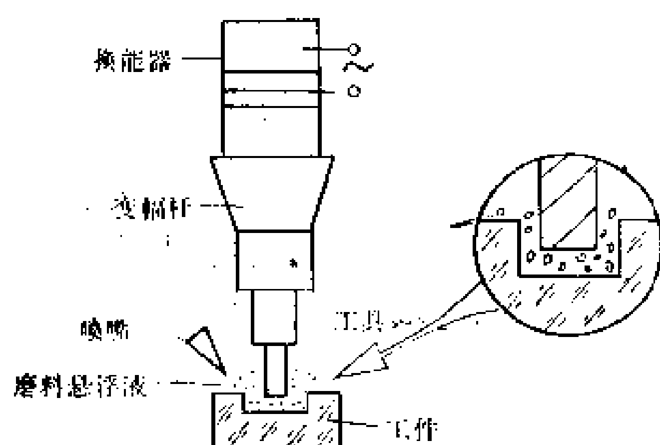


图 7.5.3 超声加工原理图

料上脱落下来．磨料悬浮液作循环流动，带走被粉碎下来的材料微粒和更新磨料，工具在静压力的作用下逐渐深人工作区而形成与工具形状相同的孔穴．

由上述加工过程可以看到超声加工的特点是：被加工材料不受导电的限制，特别适合于加工硬脆材料，如玻璃、石英、陶瓷、硅、锗和宝石等；加工形状不限于圆孔，可以加工各种复杂形状的型孔、型腔、深孔等；对工件的宏观作用力小，热影响小，不会产生残留应力；加工精度和表面光洁度较高．由于超声加工有这些特点，所以这种新工艺已经广泛应用于非导电的硬脆材料加工、套料、切割和雕刻等等．

上面叙述了借助工具的超声纵向振动通过分散的磨料来碎除材料的超声加工方法．目前由于超精密机械加工的需要，超声振动切削又引起人们的重视．从广义上来说，超声振动切削也是一种超声加工方法．它是利用超声振动激励刀具以改善切削性能的一种切削方法．其优点是能提高切削速度、减少切削力和功耗、延长工具寿命、提高加工精度、提高表面光洁度和表面质量．不圆度和粗糙度能达到0.1 μm 的超精密加工水平．它既是一种精密加工方法，也是一种高效率的切削方法．对于难加工材料、难加工项目和高精度零件，超声加工是一种很有前途的加工方法．超声振动切削包括车削、铣削、套料钻、麻花钻、研磨、拉削、绞孔、攻丝、刨、抛光、精研和去毛刺等等．

7.5.7 超声金属成型

50年代 Blaha 和 Langenecker 在用锌单晶加超声振动作拉伸实验时，发现张应力下降的“软化”现象．从此人们对这种现象进行了一系列的研究，并将它用于工业上帮助冷拔金属材料，这称为超声金属成型．

图 7.5.4 是超声冷拔金属管的原理图．在冷拔过程中，超声振动施加于外模或内模（芯棒），这样能够降低拉拔力、提高产品质量．经过实验及工业应用证明，超声冷拔金属管有下列优点：

(i)降低拉拔力，提高延伸系数，减少中间热处理，进行多道连拉．能够拉拔塑性小的难拔材料，如锆、铌、钛、钨及硼钢等．(ii)减少破裂，提高表面光洁度、尤其是内表面的光洁度．(iii)能够拔制复杂形状的管子，如核反应堆用的U形管，航空高压油管；易控制尺寸的精度，可拔制直径厚度比达 500:1 的管子，而用一般方法只能达到 50：1．(iv)延长工具寿命，节约劳动时间等等．

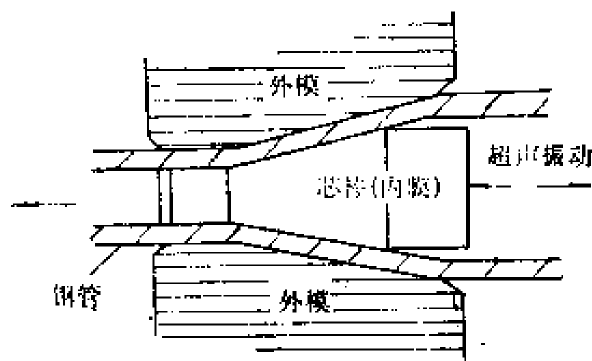


图 7.5.4 超声冷拔金属管的原理图

除了超声冷拔金属管以外，已用于工业生产的还有冷拔金属丝．其他应用还有超声挤压、拉伸成型、铆镦，超声弯管和矫直，粉末冶金处理和滚轧、冷锻等等．

超声金属成型的作用机理一般认为有两个方面．一是表面效应，由于超声振动而减少金属件与模具表面之间的摩擦力；另一方面是体积效应，包括叠加、锻击和冶金学效应．这一效应表现为金属塑性增加．

7.5.8 超声雾化

超声雾化是利用超声能量使液体形成微细雾滴的过程．超声使液体雾化有两种方式：一种是处于振动表面的薄液层在超声振动作用下激起毛细——重力波．当振动面的振动幅度达到一定值时，液滴即从驻波峰上飞出而成雾．雾滴直径大小与振动频率及液体的物理参数有关．雾滴直径D可由下式近似计算：

$$D=\alpha\left(\frac{8\pi T}{\rho f^2}\right)^{1/3},$$

式中T为液体的表面张力系数，ρ为液体的密度，f为声振动频

率，$\alpha=0.3$.

由上式可见，改变频率可方便地控制液滴的直径大小. 雾滴直径大小分布比较均匀，这是超声雾化的优点之一.

另一种雾化方式是超声喷泉成雾. 所用的频率为兆赫级. 在液体的一定深度用强超声朝液面辐射而形成喷泉，雾化. 这种雾化机理还不完全清楚，不少人是用超声空化或空化和毛细波的共同作用来解释.

由于超声雾化有上述的一些特点，所以它已成功地用于医疗. 在工业上用于制造金属粉末，尤其是适用于制造易延展和软而低熔点金属材料的粉末，如锌、铝、镉和铋等粉末. 用于燃料油的雾化，可以改善燃烧，和用于增加室内湿度.

7.5.9 声和超声悬浮技术及应用

声和超声悬浮移动是在重力或微重力空间利用强驻波声场中的辐射压力与固体、液体微粒或生物细胞的重力相平衡，而使其稳定悬浮在声场中或在空中移动的技术. 利用这种新技术可以用较少的设备实现一种无明显机械接触的理想实验环境来研究液体和生物媒质力学性质；用来无容器的熔化和固化材料，消除容器对所制备材料的污染，得到纯度很高的材料等. 这一技术已在航天飞机的太空实验中得到应用.

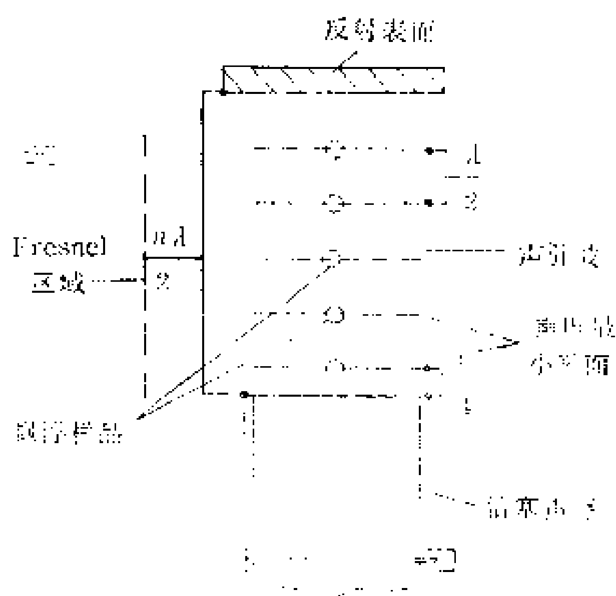


图7.5.5　声飘浮原理图

图 7.5.5 是声悬浮的原理图. 活塞声源装在长圆管中，在活塞辐射面的对面设有反射器，在其间建立驻波声场，辐射面与反射面相距为半波长的整倍数. 当声场中的辐射压力与物体的重

力相平衡时，物体即悬浮在空间. 如果改变反射器的距离或振动器的频率，则可以移动物体在空间的位置. 当驻波声场中有高温或低温装置时，就可以实现无容器、非接触的材料熔炼或凝固.

美国喷气推进实验室发展了一种互相垂直的三轴声定位装置，易于控制物体的位置，具有均匀高温、温度梯度和点热的三种不同温度分布的高温装置，可以用来熔炼和凝固材料样品. 西德曾研究一种椭圆镜炉，用 300W 的钨卤灯丝置于椭圆的一个焦点处，要加热的样品用声悬浮移动技术置于另一个焦点进行熔炼，然后移开热区凝固.

声和超声悬浮移动技术已得到越来越广泛的应用. 例如，它可用来研究液体分界面的表面张力，研究液体的粘滞特性；测量微量液体或生物组织的绝热压缩系数和声速，特别适用于研究某些生物细胞如红血球的特性，因为它的性质依赖于它所存在的环境.

利用超声悬浮和雾化技术，可以将塑料或石腊均匀地包敷在微玻璃球的表面. 微玻璃球在驻波声场中悬浮，涂敷材料溶于溶液中并用超声雾化而涂在玻璃球基体上. 例如用这种新技术可以在玻璃球上包敷 50 μm 厚的聚苯乙烯，表面不均匀性小于几百埃. 此外还用来制造高质量的半导体晶体，远红外透光新玻璃等等.

7.5.10 其它一些应用

除了上述一些应用外，超声凝聚、杀菌和萃取等在环境保护中也得到一些应用. 例如炼油厂排放的含油污水中，常常含有与油粘结在一起的被油包着的固体微粒；存在着油水乳化液，用一般的方法来分离油、水和固体微粒是很困难的. 用低声强超声可以破乳而澄清油，用强超声则可以乳化包在固体外的油膜，使固体粒子分离出来. 如此反复地用低和高声强超声进行处理就可以将油、固体微粒和水分离开来. 超声和臭氧联合净化饮用水可以提高处理效率，超声空化能使细菌团分裂，使臭氧气泡保持较小的状

态，从而提供较大的氧化面积，大大提高杀菌能力．又如环境样品中污染物的提取、土壤及家畜肉类中残留农药的提取等，目前仍然使用经典的索氏萃取法．这种方法提取速度很慢．采用超声提取则可以大大提高速度和提取率．比如提取环境样品中的苯并（*a*）芘致癌物，用索氏法需要 8—24 h连续萃取，而用超声方法只需要 6 min，且提取率高，操作简单易于推广．超声清除污水处理的过滤器的沉积物也是很有效的，工作中不需要停机清除，而且过滤速度大大提高．

在石油管部件的抗锈保养方面，作为油管橡胶或塑料包敷前的去锈预处理，超声除锈已得到应用．英国金属处理专业公司最近发展了一种超声腐蚀处理设备已用于生产．超声空化腐蚀还可用来加速测试金属的抗腐蚀性能，用于金属疲劳强度的测试，可以大大缩短试验时间．

在农业中，超声处理冬小麦，在适宜的处理规范内可以提高小麦的发芽率、出苗率、提高产量．超声处理某些中草药种子有显著的效果，例如处理重楼种子，可以提早一年半发芽．处理桔梗和丹参时大大加速发芽和促进生长．用超声处理桔梗种子产量比对照品种高 44—58％，丹参根产量比对照品种高2—7 倍．

在化学工业中超声可用来加速化学反应过程，在高分子化学中用来破碎分子链研制新的高分子材料．

在空气中，强超声可以加速干燥过程，除尘、消毒等等．

§7.6 功率超声的测量

功率超声换能器振动系统以及处理应用中的某些参量的测量，无论在方法上或仪器设备方面都还不完善，有些问题比较复杂，还没有成熟的测量方法．比如在各种处理应用中，功率超声产生系统的输出声功率的测量、液体处理中的空化强度测量等问题都还没有完全解决，而这些问题在衡量系统的性能和处理效果方面又很重要．本节将简略地介绍声功率及空化强度的一些测量方

法.

7.6.1 声场中的辐射力

物体在声场中会受到一种力，其大小比例于声场中的声能密度，人们习惯称这种力为辐射压力. 若在描述声场的微分方程中保留非线性项，就可求出在一周期内时间平均不等于零的辐射力.

Rayleigh 在研究声波在一封闭容器中传播时，考虑状态方程的非线性，得到辐射力F的表示式:

$$F=\frac{1}{2}(1+\gamma)EA,$$

其中E是声场中的能量密度，γ是媒质的比热比，A是物体的面积，它垂直于声波传播的方向.

如果声波在开空间中传播，则得到的是 Langevin 辐射力，此时

$$F=EA.$$

设在两种液体间存在交界面，在一种液体中传播的平面波声束垂直入射到交界面，则在交界面的辐射压力P_r为

$$P_r=\langle E_1\rangle(1+R)-\langle E_2\rangle.$$

在介质 1 中的声束所产生的辐射力若指向介质 2，则P_r为正值. 式中E_1和E_2分别为介质 1 和 2 中的声能密度;$\langle\ \rangle$表示在一个周期内的时间平均值;R为交界面的声能密度反射系数.

7.6.2 声强和声功率的测量

在超声处理的各种应用中，了解超声能量对各种处理过程的影响是很重要的，为此曾研究过各种测量方法.

大家知道，在声场中声强J和质点位移振幅u、振动速度v、声速ν和声压P间存在下列关系:

$$J=\frac{1}{2}\rho\nu u^2\omega^2=\frac{1}{2}\rho v\nu^2=\frac{1}{2}\,\frac{P^2}{\rho v}.$$

只要知道介质密度 ρ，声速 v，测量位移振幅u，振动速度 v 或声压 P就可以得到声强 J. 用力学方法测量声强往往是困难的，因为测量工具的几何尺寸常常大于波长，因而对声场有干扰. 此时可以通过测量声辐射压力来得到声强，因为辐射力为

$$F=\frac{dJ}{v},$$

其中 d 为比例常数. 这种测量方法只有在低声强，不产生空化时才有效. 对于高声强，有时采用热电偶来测量声场中的局部温升以检验声能的空间分布. 一般说在有空化的情况下，测量声能的分布是很困难的，但是可以用量热法来测量总声能.

测量液体介质中的声功率的量热法中，目前最常用的是恒流量热法. 声功率或电功率在液体中转换为热量时，根据热功转换关系，我们有

$$P_a=C\rho V_a\Delta t_a,$$
$$P_e=C\rho V_e\Delta t_e,$$

其中 V_a 及 V_e 是液体的流量，C 是液体的比热，ρ 是液体的密度，P_a 和 P_e 分别为超声功率和电功率，而 Δt_a 和 Δt_e 分别是超声功率及电功率在液体中引起的温升. 当 $\Delta t_a=\Delta t_e$，$V_a=V_e$ 时，则 $P_a=P_e$. 也就是说，在一具有确定液体的量热计中，若分别向其中辐射超声能或电加热的方法使该液体温度上升，若两者的流量相同，则相等的温升对应于相等的功率. 因为电功率可以准确的测量，所以相应的声功率可以测定.

前面提到，物体在声场中所受到的辐射力正比例于声场中的声能密度，因此可以利用一种特制的靶来测量声功率. 这种方法常常用于测量兆赫级的超声换能器向液体中辐射的总声功率. 超声换能器向液体媒质所辐射的总声功率W与作用在全反射靶上的辐射力之间的关系式为

$$W=\frac{vF}{2\cos^2\theta},$$

其中

F——超声沿轴线方向作用于靶上的力，N，

v——超声在传播媒质中的传播速度，m/s；

θ——反射表面法线与入射声速之间的夹角，rad.

图 7.6.1 表示一种毫瓦级超声功率测量装置示意图. 测量装置是由电子微量天平、全反射靶和消声水槽组成. 被测超声换能器安装在槽的底部，发射声束垂直向上作用于全反射靶上，所产生的辐射力用电子微量天平来测量，整个装置安装在隔振台上. 利用辐射力测量声功率的方法只适用于非空化情况，因为空化会产生声能的散射和吸收，辐射力的读数不稳定.

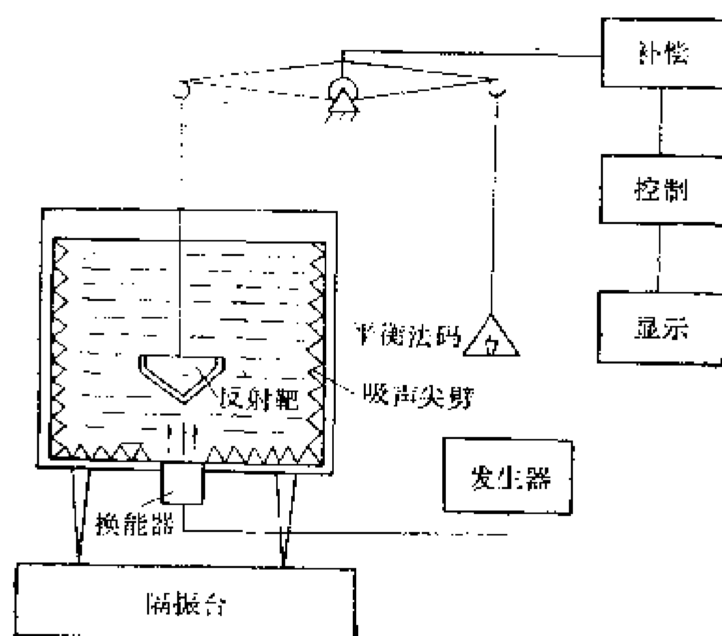


图 7.6.1　一种毫瓦级超声功率测量装置

7.6.3　空化强度的测量

超声处理的某些应用效果与空化强度有直接关系，例如超声清洗，所以测量空化强度比测量声能更有用. 但是，超声空化强度还没有一种绝对测量的方法. 空化强度不但和空化泡闭合时所产生的压力大小有关，而且还和单位体积中空化泡的数量有关. 另一方面，空泡中充气或充蒸气、或者接近真空的各种类型空化泡所产生的空化强度不是用一种方法都能测量出来的，只能测量相对强度. 各种测量方法之间所得的结果不尽相同. 各种方法的测量误差不易小于±10%. 从超声清洗应用的角度，采用腐蚀法测量比较实用. 其他还有用化学方法和测量空化噪声的方法等等. 为直接衡量清洗效果，有时还测量污物样品的除去量.

生产超声清洗器的工厂，有时用一种带有放射性的污物作为

清洗样品,因为污物除去数量可以定量测量,用这一种方法可以衡量清洗效果或相对空化强度.

用厚度约 20μm的铝、锡或铅箔置于声场中受空化腐蚀,在一定的时间内取出,称出腐蚀样的重量,这种方法称为腐蚀法,用它可衡量相对空化强度. 这种方法要求金属样品表面的光洁度一致,测量进行多次,取其平均值. 这种方法可以测量由液体表面到不同深度的相对空化强度.

化学方法的过程是: 用碘化钠置于四氯化碳中,在声空化作用下释放出碘,用分光光度计或者放射性示踪方法作释放碘的定量分析. 声强为 5 —30W/cm^2. 处理时间为 1 min 的结果表明,碘的释放量随声强的增加而增加. 用分光光度计分析碘释放量得到声强和碘释放量之间是线性关系.

参 考 书 目

[1] J. Matauschek, Einführung in Die Ultraschall Technik VEB Verlag Technik, Berlin (1957).

[2] A. B. Донской, О. К. Келлер, Г. С. Кратыш, Ультразвуковые Электротехнологические Установки, ЭНЕРГОИЗДАТ (1982).

[3] L. D. Rozenberg, High-Intensity Ultrasonic Fields, PLENUM PRESS, NEW YORK (1971).

[4] L. D. Rozenberg, Physical Principles of Ultrasonic Technology, Vol. 1,2, PLENUM PRESS, NEW YORK (1973).

第八章　高频超声

施　仲　坚

§8.1　概　　述

现代声学所涉及的频段很宽，约从 10^{-4} — 10^{14}Hz. 高频超声一般指的是频段从 10^{8} — 10^{14}Hz的声. 如图 8.1.1 所示，可知高

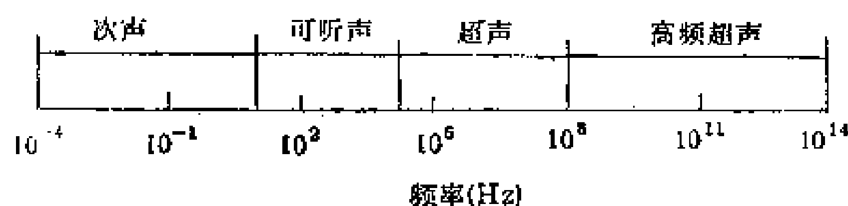


图 8.1.1　声学频段的划分

频超声研究的频段约占整个声学频段的三分之一. 关于高频超声的现象与规律，人们知道的还比较少.

我们进一步来比较声波的波谱与电磁波的波谱. 如图 8.1.2 所示，高频超声对应于电磁波波谱中的分米波到中红外波段. 由于声波在介质中的传播速度比电磁波在介质中的传播速度低 5 个数量级，当声电进行同频率转换时，声波的波长要小 5 个数量级，这 5 个数量级使声学技术具有很大的吸引力.

从声衰减的角度看，一般地说，液体比气体小，而固体比液体小；在固体的范围内，无机物比有机物小，单晶比多晶小，绝缘体单晶比半导体单晶和金属单晶小；高压气体比常压气体小，低温液体比常温液体小. 因此，一般是在固体中研究高频超声，必要时要在低温下的绝缘体单晶中研究. 这样我们必须了解固体的特性，特别是单晶体的结构与特性、固体热力学与本构关系等知识.

声波在大多数固体中的声速为 10^{3} — 10^{4}m/s. 若取固体中

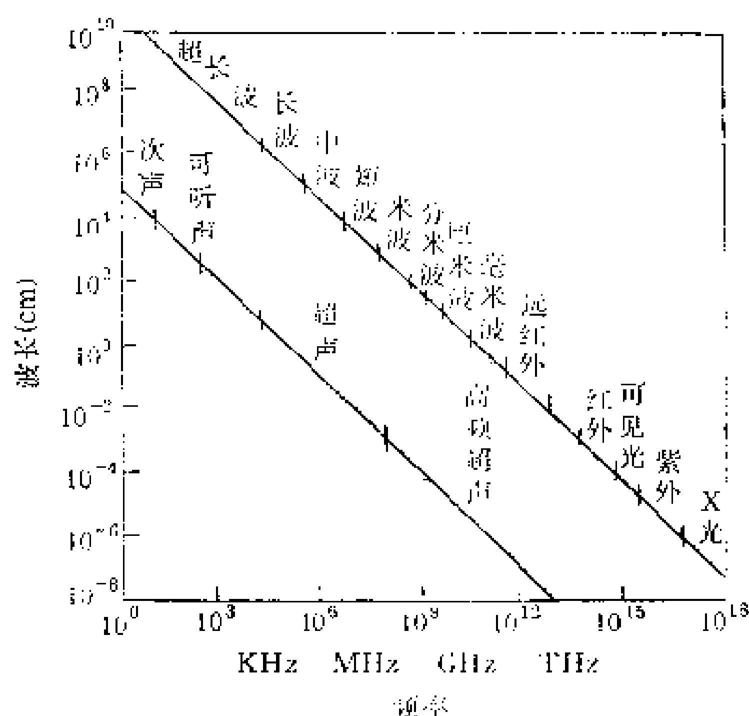


图8.1.2 声波与电磁波波谱对照图

原子的平均间距为 3 Å，则在固体中可存在的声波最高频率约为 10^{13}Hz，这是由于声波是物质中的机械波，当波长小于原子间距时，声波便不能存在．因此，3 Å 约为声波在固体中的极限波长．

由于 10^{8} — 10^{12}Hz是电磁波波谱中的微波频段，因此称这个频段的高频超声为微波超声，也称为特超声．当声波的频率高于约 10^{9} Hz时，声波不但具有波动性，而且具有明鲜的粒子性，故又称这个频段的声波为声子．

在本世纪的 60 年代初期，微波超声实验获得成功，高频超声迅速发展．目前较活跃的频段是从 10^{8} — 10^{11} Hz，人们发现它与固体中的其他元激发存在相互作用，声学在这个阵地又与物理学的其他领域发生深一层次的交叉．这赋于声学以新的生命力，人们期待着这一工具，以便更广阔地研究物质的性质，这些性质是用电磁技术和粒子技术所难以了解到的．声学从此引起人们的重视，并视为研究物质性质的三大工具之一．

§8.2　晶体的结构与特性

8.2.1　晶体结构的几何特性

组成固体的质点，即原子、离子或分子，在三维空间中常规则地或周期性地排列，这种固体称为晶体，更准确地称为单晶体. 对于气体和液体，其质点并不具有任何周期性的排列，但是，并非所有的固体都是单晶体，如由硅和氧组成的固体，当规则排列时形成石英单晶体，当无规排列时形成玻璃.

晶体质点的规则周期结构称为晶格，它是一种想像的格子或骨架. 我们用一些几何的点模拟晶体内部的结构，排列形成的空间几何图形称为晶体的空间点阵，或简称为点阵. 晶格骨架的结点组成点阵. 晶体内的周期结构的特点是存在一个重复单元，称为晶胞，又称单胞，它代表一种晶体的结构特点. 晶胞便是晶格中的一个格子，在格子的角顶具有组成晶体的质点，这些质点构成最小的特征点阵.

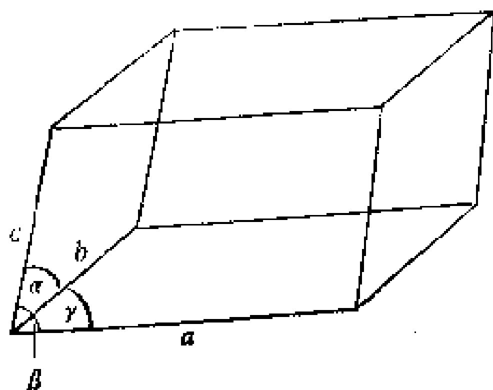


图 8.2.1　晶胞与晶胞常数

晶胞的几何性质可以用三个矢量来描述，这三个矢量与晶胞的外形有联系，用它们的长度和它们之间的夹角来表示这些矢量，并称这些长度和夹角为晶胞常数或点阵参数. 如图 8.2.1 所示，它是一个晶胞，其中 a、b、c 和 α、β、γ 是点阵参数. 根据点阵参数的特点，可以对晶体进行分类. 无论是天然的或人工的晶体，若按点阵参数分类仅有七种类型，称为七大晶系，示于表 8.2.1. 表中同时给出 14 种 Bravais 点阵. 简单的 Bravais 点阵是指如图 8.2.1 所示的点阵；如果在这样的六面体的上下两底面的中央各还存在一个质点，则称为底心的 Bravais 点阵；六个面的中央各存在一个质点者称为面心的；六面体内部中心存在一个质点者称为体心.

表 8.2.1 七大晶系与十四个 Bravais 点阵

七大晶系	点阵参数	Bravais 点阵
三斜	$a\neq b\neq c, \alpha\neq\beta\neq\gamma\neq 90°$	简单
单斜	$a\neq b\neq c, \alpha=\gamma=90°\neq\beta$	简单、底心
正交	$a\neq b\neq c, \alpha=\beta=\gamma=90°$	简单、底心、面心，体心
三方	$a=b=c, \alpha=\beta=\gamma\neq 90°$	简单
四方	$a=b\neq c, \alpha=\beta=\gamma=90°$	简单、体心
六方	$a=b\neq c, \alpha=\beta=90°, \gamma=120°$	简单
立方	$a=b=c, \alpha=\beta=\gamma=90°$	简单、面心，体心

三维空间的晶格，含有许多晶轴和晶面，即点阵方向与点阵平面．从几何上不难理解，二点可连直线、三点可组成平面，设法把这些线和面作定量描述，便可知道具体的方位．Miller 用一个方括号，其中写了三个数，来表示某一晶轴；又用小括号，其中写了三个数，来表示某一晶面，人们称它为 Miller 指数，如图 8.2.2 所示．晶轴指数 $[lmn]$ 中，l、m、n 是晶轴在晶体坐标系中方向余弦的质数比；在晶面指数 (hkl) 中，h、k、l 是晶面在晶体坐标系中截距倒数的互质数比．

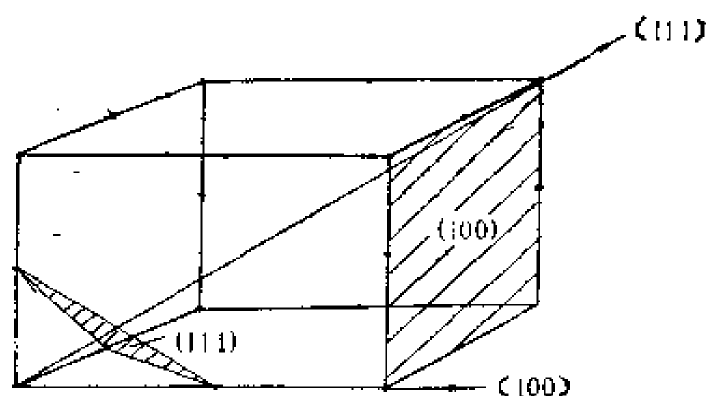


图 8.2.2 Miller指数

对于六方晶系的晶面指数，常示为 $(hkil)$，其中 $h+k=-i$，故又记为 (hk,l)．在上述某指数取负值时，则在该指数上方加一横杠，如$[\bar{l}mn]$或$(h\bar{k},l)$．至于各晶系的坐标系，有统一的规定．

8.2.2 对称元

人们认识晶体是从其宏观的对称性开始的，晶体的对称性是晶体的一个最基本而重要的特性．所谓对称是指物体相等的部分排列的规律性，挪动相等的部分使之重现或重合的操作称为对称

操作，进行对称操作时所借用的参考几何元素称为对称要素，或称为对称元．晶体的宏观对称操作只有四种，即反映、旋转、反伸和旋转加反映．这些关系如表8.2.2所示．在旋转操作中，根据旋转

表8.2.2 晶体的对称元

对称元	对称操作	辅助的几何图形
对称面	反　映	平　面
对称轴	旋　转	直　线
对称心	反　伸	点
旋转反映轴	旋转＋反映	直线和其垂直面

角度的大小，把对称轴又细分为五种，称为 n 次旋转轴，也称为 n 重轴．这里 $n=360°/\alpha$，α 是使之重合的最小转角，经反复研究得知，n 只能取 1、2、3、4 和 6 五个数值．关于对称元、国际上有统一的符号与图形来描述，（有些作者曾用其他某种记法）如表 8.2.3 所示．显然，二次倒转轴，即旋转反映轴，等于对称心，而二次倒转轴等于与此轴垂直的对称面．

表8.2.3 对称元的记法与图形

对称元	旋转轴					对称心	对称面	倒转轴		
记　法	一次	二次	三次	四次	六次			三次	四次	六次
习惯符号	L^1	L^2	L^3	L^4	L^6	C	P	L_i^3	L_i^4	L_i^6
国际符号	1	2	3	4	6	$\bar{1}$	m	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$
图形符号		0	△	□	⬡		‖或▌	◬	◈	⬢

兹举一个如图 8.2.3 所示的例子，它是一个立方体，切开它为二个相等长方体的平面是对称面，其对称操作是把 a_1 搬至 a_2．另一方面，从 a_1 至 a_2 可视它存在一个四重轴；a_1 至 a_3 是由于存在三重轴；a_1 与 a_4 对称是由于存在一个二重轴；a_1 还与 a_6 对称，因为存在一个倒转四重轴，等等．这些都在图 8.2.3 中标出，要注意的是，我们还可以找出其他许多对称元．

8.2.3 生成元与诱导元

从图 8.2.3 可知，一个立方体存在许多对称元，它们的集合称

对称群. 根据对称群的规律，群中的有些对称元是由于其他对称元的存在而必然出现的. 因其他对称元的存在而必然出现的对称元称为诱导元，产生诱导元的基本对称元称为生成元. 诱导元的出现是根据对称元的组合定理，而对称元的组合定理很多，比如欧拉定理，它的内容是：通过两个相交旋转轴的交点，必然能找到第三个旋转轴.

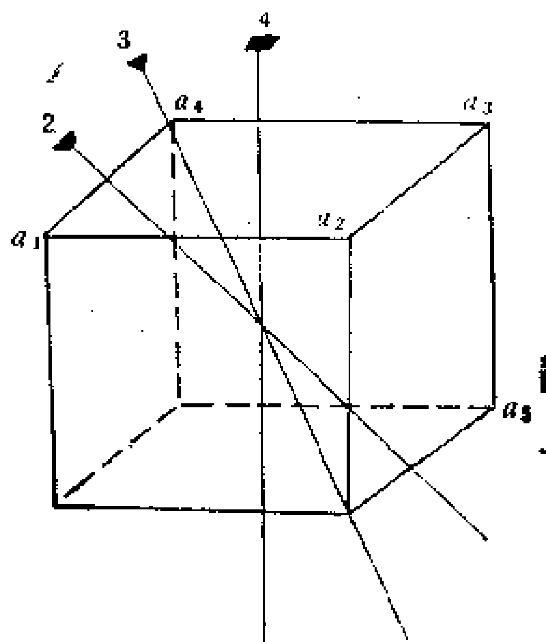


图 8.2.3 立方体的一些对称元

人们已经了解各种晶格的生成元. 首先，七个晶系中可划分为 32 种对称群，下面还将对此进一步介绍，这里暂先引用. 32 种对称群的生成元列于表 8.2.4 中，在同一表中，我们给出生成元矩阵，即生成元的矩阵表示. 在变换

表 8.2.4 32种对称群的生成元

晶 系	对称群	生成元	生 成 元 矩 阵
三 斜	1	1	$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$
	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$
单 斜	m	m	$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$
	2	2	$\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$
	$\frac{2}{m}$	2, m	$\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$
正 交	$mm2$	2, m	$\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$
	222	2, 2	$\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

表 8.2.4（续）

晶　系	对称群	生成元	生成元矩阵
	mmm	m,m,m	$\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$
三　方	3	3	$\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}&0\\-\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}&0\\0&0&1\end{bmatrix}$
	$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}&0\\\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$
	$3m$	$3,m$	$\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}&0\\-\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}&0\\0&0&1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$
	32	3, 2	$\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}&0\\-\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}&0\\0&0&1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$
	$\bar{3}m$	$\bar{3},m$	$\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}&0\\\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$
四　方	4	4	$\begin{bmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$
	$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\begin{bmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$
	$\frac{4}{m}$	$4,\ m$	$\begin{bmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$
	$4mm$	$4,\ m$	$\begin{bmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$
	$\bar{4}2m$	$\bar{4},2$	$\begin{bmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$
	422	4, 2	$\begin{bmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$

表 8.2.4(续)

晶　系	对称群	生成元	生 成 元 矩 阵
	$\frac{4}{mmm}$	$4,m,m$	$\begin{bmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$
六　方	6	6	$\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}&0\\-\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&1\end{bmatrix}$
	$\bar{6}$	$\bar{6}$	$\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}&0\\\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$
	$\frac{6}{m}$	$6,m$	$\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}&0\\-\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$
	$6mm$	$6,m$	$\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}&0\\-\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$
	$\bar{6}m2$	$6,2$	$\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}&0\\\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}&0\\0&0&-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$
	622	$6,2$	$\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}&0\\-\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$
	$\frac{6}{mmm}$	$6,m,m$	$\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}&0\\-\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$
立　方	23	$2,3$	$\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}$
	$m3$	$2,3,m$	$\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$

表 8.2.4(续)

晶　系	对称群	生成元	生成元矩阵
立　方	$\bar{4}3m$	$\bar{4}$，m	$\begin{bmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$
	432	4,2	$\begin{bmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$
	$m3m$	4,2,m	$\begin{bmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$

矩阵$[a_{ij}]$中，a_{ij}是变换前后坐标系间的方向余弦．要注意的是，同一个符号的生成元 2，有三种可能的矩阵形式，它们对应于三种可能的方位．

8.2.4　倒格子矢与倒易空间

在研究点阵的衍射效应时，布喇格定律是大家所熟悉的，但是还出现一些用布喇格定律不能解释的衍射效应，如所谓非布喇格角上的漫射衍射，因此有必要发展一般的衍射理论，在这项工作过程中，引入了倒易点阵的概念，倒易点阵也称为倒格子．

对于任一晶体点阵，均存在一个对应的倒易点阵，其所以称为倒易点阵，是因为它的许多性质为晶体点阵的倒数．在图 8.2.1 中，晶胞是由矢量 **a**、**b** 和 **c** 来限定的，这三个矢量称为晶体的点阵矢量．晶体的倒易点阵矢量，或称为倒格子矢，定义为

$$\mathbf{A}=2\pi\frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c}};\ \mathbf{B}=2\pi\frac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c}};$$

$$\mathbf{C}=2\pi\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c}}. \tag{8.2.1}$$

倒易点阵就是用矢量 **A**、**B** 和 **C** 来限定的晶胞所形成的点阵，即以 **A**、**B** 和 **C** 进行重复平移，便可建成整个倒易点阵．在式 8.2.1 中，其分母 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c}$ 是晶胞的体积．倒易点阵有二个很重要的性质：

(i) 从倒易点阵的原点至坐标为 hkl 的任一结点的矢量 $\mathbf{H}_{hkl}$，

与晶体点阵中Miller指数为hkl的面垂直，这个矢量为

$$\mathbf{H}_{hkl}=h\mathbf{A}+k\mathbf{B}+l\mathbf{C}. \tag{8.2.2}$$

(ii) 矢量 $\mathbf{H}_{hkl}$ 的长度等于(hkl)面的面间距 d 的倒数，即

$$|\mathbf{H}_{hkl}|=d_{hkl}^{-1}. \tag{8.2.3}$$

上面这两个性质说明，倒易点阵中的结点可完全描述晶体，具体说，倒易点阵中的每个结点均与晶体中的一组面相联系，并代表该组面的取向和面间距. 经研究知道，晶体的衍射图像是倒易点阵的映像. $\mathbf{H}_{hkl}$ 称为倒易点阵矢量，以倒易点阵矢量来描绘的空间为倒易空间.

8.2.5 晶体 32 点群的特性

在 8.2.3 中我们曾提到，在七个晶系中有32 种对称群.随着晶体对称理论的发展，从实验和理论均确知，晶体有而且只有 32 种对称型，这些对称型是共点的对称群，故称为晶体 32 点群. 这个结论首先是来源于宏观几何结晶学. 随着晶体物理学的进展，对 32 点群的力学性能、热学性能、光学性能、电学性能和磁学性能等等以及晶体的微观性能都进行了大量的研究. 通过这些研究得出的一个重要的结论是：晶体的物理性能与晶体的对称性之间存在许多制约关系，如 Naumann 原理——一个晶体任何的物理性能的对称元素应包含该晶体所属点群的对称元素.

在 8.2.3 中我们仅涉及晶体的宏观几何性质，在这里我们将更多地涉及晶体的物理特性. 分析晶体 32 点群的几何特性，同时注意晶体 32 点群的物理特性，得知在不影响传统的晶体分类的基础上，晶体不但可以划分为七大晶系，同时还可划分为两大晶类和七大晶种. 按晶体 32 点群特性，可得表 8.2.5. 这个表能更多地显示晶体 32 点群的几何特性和物理特性，特别是点群间的联系与规律. 表中列出点群的两种符号：一是标准符号；二是 Schönflies 符号，以便查阅.

晶体 32 点群划分为二大晶类，可以更清晰地显示它们之间的联系，如表 8.2.6 所示.

表8.2.5 晶体32点群特性表

晶族	晶系 \ 晶类 晶种	A: I	A: II	A: III	B: IV	B: V	B: VI	B: VII
低级	三斜	$1\ C_1$		$\bar{1}\ C_i$				
	单斜				$m\ C_s$		$2\ C_2$	$2/m\ C_{2h}$
	正交				$mm2\ C_{2v}$		$222\ D_2$	$mmm\ D_{2h}$
中级	三方	$3\ C_3$		$\bar{3}\ C_{3i}$	$3m\ C_{3v}$		$32\ D_3$	$\bar{3}m\ D_{3d}$
	四方	$4\ C_4$	$\bar{4}\ S_4$	$4/m\ C_{4h}$	$4mm\ C_{4v}$	$\bar{4}2m\ D_{2d}$	$422\ D_4$	$4/mmm\ D_{4h}$
	六方	$6\ C_6$	$\bar{6}\ C_{3h}$	$6/m\ C_{6h}$	$6mm\ C_{6v}$	$\bar{6}m2\ D_{3h}$	$622\ D_6$	$6/mmm\ D_{6h}$
高级	立方	$23\ T$		$m3\ T_h$	$\bar{4}3m\ T_d$		$432\ O$	$m3m\ O_h$

表 8.2.6 两大晶类 A,B 的联系

特性 \ 晶种 \ 晶类	A			B			
	I	II	III	IV	V	VI	VII
劳厄图的对称型	同一晶系相同			同一晶系相同			
弹性特性	同一晶系具有相同的弹性系数矩阵			同一晶系具有相同的弹性系数矩阵			
光学特性	同一晶系具有相同的光弹系数矩阵			同一晶系具有相同的光弹系数矩阵			
温差电特性	同一晶系具有相同的温差电系数矩阵			同一晶系具有相同的温差电系数矩阵			

把晶体划分为七大晶种，可以更清晰地显示它们之间的联系，如表 8.2.7 所示. 需要对此表加以几点说明：关于群论特性，

表 8.2.7 七大晶种 I、II、III、IV、V、VI、VII的联系

序号	特性 \ 晶种 \ 晶类	A			B			
		I	II	III	IV	V	VI	VII
1	对称型	均为原始式	均为倒反原始式	均为心式	均为面式	均为倒反面式	均为轴式	均为面轴式
2	点群中心	在旋转轴上任意点 23*	在倒反轴上任意点	在倒反中心	在旋转轴上任意点 m*$\bar{4}3m$*	在倒反轴上任意点	在旋转轴上的交点 2*	在倒反中心
3	电极性	均是23*	均不是	均不是	均是 $\bar{4}3m$*	均不是	均不是2*	均不是
4	热电性	均有23*	均无	均无	均有 $\bar{4}3m$*	均无	均无2*	均无
5	压电性	均有	均有	均无	均有	均有	均有432*	均无
6	静水压压电性	均有23*	均无	均无	均有$\bar{4}3m$	均无	均无2*	均无

表 8.2.7(续)

序号	晶类 / 晶种 / 特性	A			B			
		I	II	III	IV	V	VI	VII
7	旋光性	均有	均有$\bar{6}$*	均无	均有 $3m$* $6mm$* $4mm$* $\bar{4}3m$*	均有 $\bar{6}m2$*	均有	均无
8	群论特性	G_{I}	$\approx G_{I}$	$G_{I}\times\bar{1}$	G_{IV}	$\approx G_{IV}$	$\approx G_{IV}$	$G_{IV}\times\bar{1}$
9	空间点阵点群	—	—	—	—	—	—	全对称群($\bar{1}$)
10	极性群	极性晶体群23*	极性中和晶体群	无极性晶体群	极性晶体群$\bar{4}3m$*	极性中和晶体群	极性中和晶体群2*	无极性晶体群
11	铁电相变	←—— $m3$* ←—— $\bar{4}$* ←——			←—— $2/m$* ←—— —— 222*			
12	去耦的声表面波模式群	A_1 A_2 1*、3*	A_1A_2	—	B_1 B_2 $\bar{4}3m$*	B_2	A_2 432*	—

* 表示该点群是例外的点群。

第II种晶体的点群分别与同一晶系的第I种晶体的点群同构，而第III种晶体点群的群特性为同一晶系第I种晶体的点群乘以$\bar{1}$点群，余类推．关于铁电相变，在不同温度下，铁电体产生结晶学的变态，一般地说，伴随相变晶体的对称型亦变．晶体从顺电态到铁电态的相转移，即铁电相转移，在一般情况下，会伴随着晶体对称性的改变．如在第VII种晶体中，铁电相变规律为

$$m3m\to 4mm;\ 6/mmm\to 6mm;\ 4/mmm\to mm;$$
$$\bar{3}m\to 3m;\ mmm\to mm2;\ 2/m\to 2.$$

也就是说，原为第VII种点群的晶体，发生铁电相变时可变为第IV种点群的晶体．在这一规律中，$2/m$ 点群例外，它变为2，而不变为 m，余类推．

从上面的论证我们可知，若把晶体 32 点群排列成表 8.2.5 所示的格式，便能显示晶体 32 点群间较多的联系，晶体点群似乎呈现周期性，即在 32 点群中，随着点群对称度的不断增加，点群的几何性质和物理性质不断地重复出现，即在晶系中呈现周期性.

8.2.6 固体热力学

在研究高频超声时，不但遇到固体的微观性能，亦遇到固体的宏观性能，本节将从唯象理论出发，介绍固体的热力学特性.

考虑一个力、电、磁和热的固体系统，其 Gibbs 函数为

$$G = u - S_i T_i - E_m D_m - H_m B_m - \sigma\theta, \quad \begin{matrix} i = 1\cdots 6 \\ m = 1\cdots 3 \end{matrix} \tag{8.2.4}$$

其中 u 为内能，S_i 为应变，T_i 为应力，E_m 为电场强度，D_m 为电位移，H_m 为磁场强度，B_m 为磁通量密度，σ 为熵，θ 为温度. 对于可逆过程，

$$dG = -S_i dT_i - D_m dE_m - B_m dH_m - \sigma d\theta, \tag{8.2.5}$$

而

$$\begin{aligned} S_i &= \left(\frac{-\partial G}{\partial T_i}\right)_{E,H,\theta}; \quad D_m = \left(\frac{-\partial G}{\partial E_m}\right)_{H,T,\theta}; \\ B_m &= \left(\frac{-\partial G}{\partial H_m}\right)_{E,T,\theta}; \quad \sigma = \left(\frac{-\partial G}{\partial \theta}\right)_{E,H,T}. \end{aligned} \tag{8.2.6}$$

取 S_i 等量的全导数得

$$\begin{aligned} dS_i = &\left(\frac{\partial S_i}{\partial T_j}\right)_{E,H,\theta} dT_j + \left(\frac{\partial S_i}{\partial E_m}\right)_{H,\theta,T} dE_m + \left(\frac{\partial S_i}{\partial H_m}\right)_{T,E,\theta} dH_m \\ &+ \left(\frac{\partial S_i}{\partial \theta}\right)_{T,H,E} d\theta, \\ &i, j = 1\cdots 6;\ m = 1\cdots 3 \end{aligned} \tag{8.2.7}$$

$$dD_m = \left(\frac{\partial D_m}{\partial T_j}\right)_{E,H,\theta} dT_j + \left(\frac{\partial D_m}{\partial E_k}\right)_{T,H,\theta} dE_k$$

$$+\left(\frac{\partial D_m}{\partial H_k}\right)_{T,E,\theta} dH_k+\left(\frac{\partial D_m}{\partial \theta}\right)_{T,E,H} d\theta,$$

$$j=1\cdots 6;m、k=1\cdots 3 \tag{8.2.8}$$

$$dB_m=\left(\frac{\partial B_m}{\partial T_j}\right)_{\theta,E,H} dT_j+\left(\frac{\partial B_m}{\partial E_k}\right)_{H,\theta,T} dE_k$$

$$+\left(\frac{\partial B_m}{\partial H_k}\right)_{\theta,T,E} dH_k+\left(\frac{\partial B_m}{\partial \theta}\right)_{E,H,T} d\theta,$$

$$j=1\cdots 6;m、k=1\cdots 3 \tag{8.2.9}$$

$$d\sigma=\left(\frac{\partial \sigma}{\partial T_j}\right)_{\theta,E,H} dT_j+\left(\frac{\partial \sigma}{\partial E_m}\right)_{\theta,H,T} dE_m+\left(\frac{\partial \sigma}{\partial H_m}\right)_{T,E,\theta} dH_m$$

$$+\left(\frac{\partial \sigma}{\partial \theta}\right)_{E,H,T} d\theta.$$

$$j=1\cdots 6;m=1\cdots 3 \tag{8.2.10}$$

因为 dG 是一个完全微分，定义

$$\left.\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial D_m}{\partial T_j}\right)_{H,\theta}=\left(\frac{\partial S_j}{\partial E_m}\right)_{H,\theta}=d_{mj}^{H,\theta} && \text{压电常数,}\\
&\left(\frac{\partial B_m}{\partial T_j}\right)_{E,\theta}=\left(\frac{\partial S_j}{\partial H_m}\right)_{E,\theta}=d_{mj}^{E,\theta} && \text{压磁常数,}\\
&\left(\frac{\partial D_m}{\partial \theta}\right)_{T,H}=\left(\frac{\partial \sigma}{\partial E_m}\right)_{T,H}=p_m^{T,H} && \text{热电常数,}\\
&\left(\frac{\partial B_m}{\partial \theta}\right)_{T,E}=\left(\frac{\partial \sigma}{\partial H_m}\right)_{T,E}=i_m^{T,E} && \text{热磁常数,}\\
&\left(\frac{\partial D_m}{\partial H_k}\right)_{T,\theta}=\left(\frac{\partial B_k}{\partial E_m}\right)_{T,\theta}=m_{mk}^{T,\theta} && \text{磁介常数,}\\
&\left(\frac{\partial S_j}{\partial \theta}\right)_{E,H}=\left(\frac{\partial \sigma}{\partial T_j}\right)_{E,H}=\alpha_j^{E,H} && \text{热膨胀系数.}
\end{aligned}\right\} \tag{8.2.11}$$

此外，定义

$$
\left.\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial S_i}{\partial T_j}\right)_{E,H,\theta}=S_{ij}^{E,H,\theta} && \text{弹性顺性常数,}\\
&\left(\frac{\partial D_m}{\partial E_k}\right)_{T,H,\theta}=\varepsilon_{mk}^{T,H,\theta} && \text{介电常数,}\\
&\left(\frac{\partial B_m}{\partial H_k}\right)_{T,E,\theta}=\mu_{mk}^{T,E,\theta} && \text{磁导率常数,}\\
&\left(\frac{\partial \sigma}{\partial \theta}\right)_{E,H,T}=\frac{\rho c^{E,H,T}}{\theta} && \rho\ \text{为密度,}\ C\ \text{为热容,}
\end{aligned}\right\}\qquad(8.2.12)
$$

于是式(8.2.7)至式(8.2.10)可化为

$$
\left.\begin{aligned}
&S_i=S_{ij}^{E,H,\theta}T_j+d_{mi}^{H,\theta}E_m+d_{mi}^{E,\theta}H_m+\alpha_i^{E,H}d\theta,\\
&D_m=d_{mi}^{H,\theta}T_i+\varepsilon_{mk}^{T,H,\theta}E_k+p_m^{T,H}d\theta+m_{mk}^{T,\theta}H_k,\\
&B_m=d_{mi}^{E,\theta}T_i+\mu_{mk}^{T,E,\theta}H_k+i_m^{T,E}d\theta+m_{km}^{T,\theta}E_k,\\
&d\sigma=\alpha_i^{E,H}T_i+p_m^{H,T}E_m+i_m^{E,T}H_m+\frac{\rho c^{E,H,T}}{\theta}d\theta,\\
&\qquad i,j=1\cdots6;\ m,k=1\cdots3.
\end{aligned}\right\}\qquad(8.2.13)
$$

在式(8.2.13)的诸分式中,凡重复出现的下标,要对该下标求和.一般情况下,式(8.2.13)里共有13个方程式,即6个S方程,3个D方程,3个B方程和一个$d\sigma$方程. 对于最复杂的晶体即对称度最低的晶体,有21个独立的弹性常数,18个独立的压电常数,18个独立的压磁常数,6个独立的介电常数,6个独立的磁导率常数,3个独立的热电常数,3个独立的热磁常数,9个独立的磁介常数,6个独立的热膨胀系数和一个比热,共有91个独立的物理常数. 随着固体对称度的增加,上述诸独立的物理常数不断减少.另一方面,有的固体的某些物理常数很小甚至可略不计,如对压电材料,往往可以忽略磁场的效应等等,因此对更多的实际固体其独立的物理常数比较少.

在高频声学里,人们更关心的是绝热条件下的物理常数,除非所用的固体的热电性很强. 下面将推导如何从上面所得到的等温条件下的物理常数来描述绝热条件下相应的物理常数. 利用式(8.2.13),令$d\sigma=0$,得

$$d\theta = -\left[\frac{\alpha_i^{E,H}\theta}{\rho c^{E,H,T}}T_i + \frac{p_m^{H,T}\theta}{\rho c^{E,H,T}}E_m + \frac{i_m^{E,T}\theta}{\rho c^{E,H,T}}H_m\right]. \tag{8.2.14}$$

把它代入式(8.2.13)中的第一个分式，可得

$$S_i = \left[S_{ij}^{E,H} - \frac{\alpha_i^{E,H}\alpha_j^{E,H}\theta}{\rho c^{E,H,T}}\right]T_j + \left[d_{mi}^{H,\theta} - \frac{\alpha_i^{E,H}p_m^{T,H}\theta}{\rho c^{E,H,T}}\right]E_m$$
$$+ \left[d_{mi}^{E,\theta} - \frac{\alpha_i^{E,H}i_m^{T,E}\theta}{\rho c^{E,H,T}}\right]H_m. \tag{8.2.15}$$

把它写成

$$S_i = S_{ij}^{E,H,\sigma}T_j + d_{mi}^{H,\sigma}E_m + d_{mi}^{E,\sigma}H_m, \tag{8.2.16}$$

同样地把式(8.2.14)代入式(8.2.13)的其他分式中，可以得到类似于式(8.2.16)的其他关系式。总之，绝热条件下的物理常数定义为

$$\left.\begin{aligned}
s_{ij}^{E,H,\sigma} &= s_{ij}^{E,H,\theta} - \frac{\alpha_i^{E,H}\alpha_j^{E,H}\theta}{\rho c^{E,H,T}},\\
d_{mi}^{H,\sigma} &= d_{mi}^{H,\theta} - \frac{\alpha_i^{E,H}p_m^{T,H}\theta}{\rho c^{E,H,T}},\\
d_{mi_m}^{E,\sigma} &= d_{mi}^{E,\theta} - \frac{\alpha_i^{E,H}i_m^{T,E}\theta}{\rho c^{E,H,T}},\\
\varepsilon_{mk}^{T,H,\sigma} &= \varepsilon_{mk}^{T,H,\theta} - \frac{p_m^{T,H}p_k^{T,H}\theta}{\rho c^{E,H,T}},\\
m_{mk}^{T,\sigma} &= m_{mk}^{T,\theta} - \frac{i_k^{T,E}p_m^{T,H}\theta}{\rho c^{E,H,T}},\\
\mu_{mk}^{T,E,\sigma} &= \mu_{mk}^{T,E,\theta} - \frac{i_m^{T,E}i_k^{T,E}\theta}{\rho c^{E,H,T}}.
\end{aligned}\right\} \tag{8.2.17}$$

另一方面，我们也可以用热力势 H_A 直接求得类似于式(8.2.13)的绝热条件下的方程组。取系统的热焓：

$$\left.\begin{aligned}
H_A &= u - S_iT_i - E_mD_m - B_mH_m,\\
dH_A &= -S_idT_i - D_mdE_m - B_mdH_m + \theta d\sigma.
\end{aligned}\right\} \tag{8.2.18}$$

类似于上述方法可求得

$$
\left.
\begin{aligned}
S_i &= S_{ij}^{H,E,\sigma} T_j + d_{mi}^{H,\sigma} E_m + d_{mi}^{E,\sigma} H_m + \left(\frac{\partial S_i}{\partial \sigma}\right)_{E,H} d\sigma, \\
D_m &= d_{mi}^{H,\sigma} T_i + \varepsilon_{mk}^{T,H,\sigma} E_k + m_{mk}^{T,\sigma} H_k + \left(\frac{\partial D_m}{\partial \sigma}\right)_{T,H} d\sigma, \\
B_m &= d_{mi}^{E,\sigma} T_i + \mu_{mk}^{T,E,\sigma} H_k + m_{mk}^{T,\sigma} E_k + \left(\frac{\partial B_m}{\partial \sigma}\right)_{T,E} d\sigma, \\
d\theta &= \left(\frac{\partial \theta}{\partial T_i}\right) dT_i + \left(\frac{\partial \theta}{\partial E_m}\right)_{T,H} dE_m + \left(\frac{\partial \theta}{\partial H_m}\right)_{T,E} dH_m \\
&\quad + \frac{\theta}{\rho c^{E,T,H}} d\sigma.
\end{aligned}
\right\} \tag{8.2.19}
$$

因为 dH_A 是全微分，故

$$
\left.
\begin{aligned}
\left(\frac{\partial S_i}{\partial \sigma}\right)_{E,H} &= \left(\frac{\partial \theta}{\partial T_i}\right)_{E,H}, \\
\left(\frac{\partial D_m}{\partial \sigma}\right)_{T,H} &= \left(\frac{\partial \theta}{\partial E_m}\right)_{T,H}, \\
\left(\frac{\partial B_m}{\partial \sigma}\right)_{T,E} &= \left(\frac{\partial \theta}{\partial H_m}\right)_{T,E}.
\end{aligned}
\right\} \tag{8.2.20}
$$

式(8.2.13)称为等温条件下固体的本构关系式，式(8.2.19)称为绝热条件下固体的本构关系式，它们都是最普遍的形式．某特殊情况如下：忽略等温和绝热条件的差异，不计及磁场下的效应，它们便成为压电本构关系；不计及电场下的效应，成为压磁本构关系；同时不计及磁场和电场的效应，成为弹性本构关系；同时不计及磁场和力的影响，成为介电本构关系．

§8.3 点阵波与声子

8.3.1 单原子链动力学

在处理高频超声问题时，在其低频端常常把对象视为连续介质．但是在高频超声的高频端，则涉及离散体系的点阵动力学问

题．若用铌酸锂单晶的压电体产生 1 THz 的基频振动，晶片的厚度仅约为 37 Å，一个铌酸锂六角晶胞的长度，即点阵参数 C_H，为 13.863 Å，可见尺度已经相当接近．

这里首先讨论最简单的单原子链，即由N个质量为m以等间距 a组成的链，如图 8.3.1 所示．设u_r为第r个质点的位移，在x正方向作用于该质点上的力F_r为

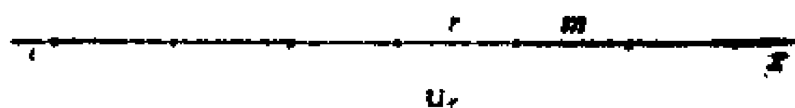


图 8.3.1 单原子链

$$F_r=\beta(u_{r+1}-u_r)-\beta(u_r-u_{r-1})=m\ddot{u}_r, \qquad (8.3.1)$$

其中β为力常数．设解为

$$u_r=Ae^{i\omega t}e^{-ikx}, \qquad (8.3.2)$$

这里$x=ra$，于是$u_{r+1}=u_re^{-ika}$，$u_{r-1}=u_re^{ika}$．代入式 (8.3.1)，可得

$$m\omega^2=2\beta(1-\cos ka),$$

$$\omega=2\left(\frac{\beta}{m}\right)^{1/2}\sin\frac{ka}{2}. \qquad (8.3.3)$$

在这个色散关系中，$\omega(k)$是周期函数，如图 8.3.2 所示．

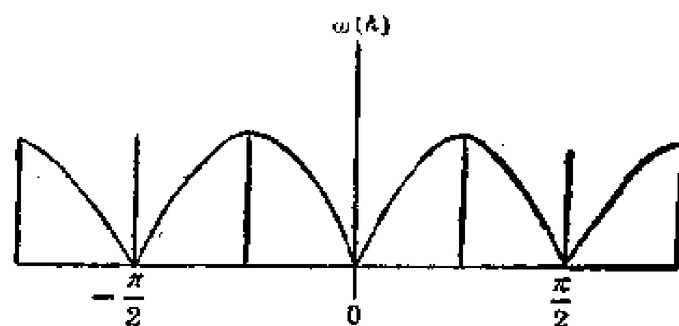


图 8.3.2 单原子链的 Brillouin 区

定义：

第一 Brillouin 区，$-\frac{\pi}{a}<k\leqslant\frac{\pi}{a}$；

第二 Brillouin 区，$-\frac{2\pi}{a}<k\leqslant-\frac{\pi}{a}$和$\frac{\pi}{a}<k\leqslant\frac{2\pi}{a}$;

第三 Brillouin 区，$-\frac{3\pi}{a}<k\leqslant-\frac{2\pi}{a}$和$\frac{2\pi}{a}<k\leqslant\frac{3\pi}{a}$.

下面讨论第一 Brillouin 区的物理意义.

(i)弹性波仅存在于此区，因为相邻原子位相差大于π时无意义.

(ii)在边界上是一个驻波. 因为在边界上$k=\pm\frac{\pi}{a}$,即为驻波位移解.

(iii)若ka很小,即波长比a大得多，这时相当于连续介质声学.

从色散关系可求得相速度为

$$v^2=\frac{\omega^2}{k^2}=\frac{\beta a^2}{m}\left[\frac{\sin(ka/2)}{ka/2}\right]^2,$$

即

$$v=a\left(\frac{\beta}{m}\right)^{1/2}\frac{\sin(ka/2)}{ka/2}. \tag{8.3.4}$$

当$ka\to0$,可得v的极大值为$a(\beta/m)^{1/2}$,在边界上减小$2/\pi$因子. 引入链的线密度$\rho=m/a$后,可得

$$\rho v^2=\beta a\left[\frac{\sin(ka/2)}{ka/2}\right]^2. \tag{8.3.5}$$

于是,当$ka\to0$时得

$$\rho v^2=\beta a, \tag{8.3.6}$$

这个βa类比于弹性劲度.

又因为群速$\xi_i=\partial\omega/\partial k_i$,可得

$$\xi=a\left(\frac{\beta}{m}\right)^{1/2}\cos\frac{ka}{2}, \tag{8.3.7}$$

可知,在边界上$\xi=0$.

要注意的是，上面是针对无限长的色散系统. 若这条链是由N个原子组成，且有不同的边界条件，可以求得如下的本征值：

$$\left.\begin{aligned}&\omega^2=4\frac{\beta}{m}\sin^2\frac{s\pi}{2(N+1)}, \text{ 对于固定边界}\\&\omega^2=4\frac{\beta}{m}\sin^2\frac{2\pi}{N}, \text{ 对于周期边界}\\&\omega^2=4\frac{\beta}{m}\sin^2\frac{(s-1)\pi}{2N}, \text{ 对于自由边界}\end{aligned}\right\}\qquad(8.3.8)$$

其中$s=1\cdots N$.

8.3.2 双原子链动力学

现在考虑一个由质量分别为M和m(设$M>m$)两种质点等距相间组成的双原子链(如图8.3.3所示).

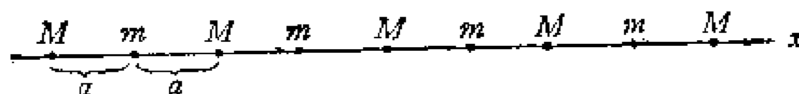


图8.3.3 双原子链

其运动方程为

$$\begin{aligned}&m\ddot{u}_{2r}=\beta(u_{2r+1}-2u_{2r}+u_{2r-1}),\\&M\ddot{u}_{2r+1}=\beta(u_{2r+2}-2u_{2r+1}+u_{2r}).\end{aligned}\qquad(8.3.9)$$

设有行波解

$$\begin{aligned}&u_{2r}=A\exp i(\omega t-2rka),\\&u_{2r+1}=B\exp i(\omega t-(2r+1)ka),\end{aligned}\qquad(8.3.10)$$

可得

$$\begin{bmatrix}2\beta-m\omega^2 & -2\beta\cos ka\\-2\beta\cos ka & 2\beta-M\omega^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}=0.\qquad(8.3.11)$$

A,B为非零解的条件为

$$\omega^2=\beta\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right)\pm\beta\left[\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right)^2-\frac{4\sin^2ka}{mM}\right]^{1/2}.\qquad(8.3.12)$$

可知，$\omega(k)$是周期函数，有两个分支，并均具有色散特性. 它的第

一Brillouin 区如图8.3.4所示.

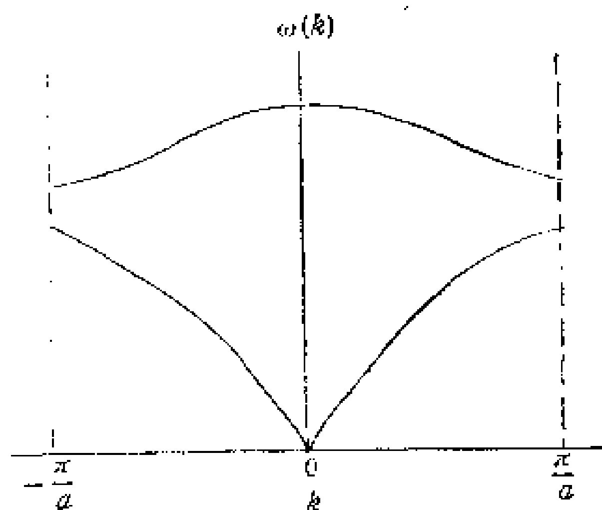


图 8.3.4 双原子链的第一 Brillouin 区

对于小的 ka 值,可得

$$\omega^2 \approx 2\beta\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right)$$

称为光学支, (8.3.13)

$$\omega^2 \approx \frac{\frac{1}{2}\beta}{m+M}(ka^2)$$ 称为声学支. (8.3.14)

当 ka 从 0 至 $\pi/2$ 变动时,得

$$0 \leqslant \omega^2 \leqslant \frac{2\beta}{M}, \tag{8.3.15}$$

$$2\beta\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right) \geqslant \omega^2 \geqslant \frac{2\beta}{m}. \tag{8.3.16}$$

这意味着,在双原子链中存在频率禁区

$$\frac{2\beta}{M} < \omega^2 < \frac{2\beta}{m}. \tag{8.3.17}$$

将式(8.3.16)代入式(8.3.10),可得振幅比:

$$A/B = -M/m,$$

即质点 m 和 M 的位移反相. 对于许多的真实晶体,其光学支的频率落在远红外的频谱区.

8.3.3 三维点阵动力学

考虑一个三维点阵,其中第 l 个晶胞的第 j 个质点的平衡位置为

$$\mathbf{r}\begin{pmatrix} l \\ j \end{pmatrix} = \mathbf{R}(l) + \mathbf{r}_j, \tag{8.3.18}$$

其中

$$\mathbf{R}(l) = n_1\mathbf{a} + n_2\mathbf{b} + n_3\mathbf{c}. \tag{8.3.19}$$

而 $\mathbf{r}_j$ 为第 j 个质点在晶胞中的位置，其位移为

$$\mathbf{u}\begin{pmatrix} l \\ j \end{pmatrix} = u_\alpha\begin{pmatrix} l \\ j \end{pmatrix}, \quad \alpha = 1, 2, 3, \tag{8.3.20}$$

其运动方程可写为

$$m_j \ddot{u}_\alpha\begin{pmatrix} l \\ j \end{pmatrix} + \sum_{l'j'} \Phi_{\alpha\beta}\begin{pmatrix} l & l' \\ j & j' \end{pmatrix} u_\beta\begin{pmatrix} l' \\ j' \end{pmatrix} = 0, \tag{8.3.21}$$

其中 m_j 为第 j 个质点的质量，力常数为

$$\Phi_{\alpha\beta}\begin{pmatrix} l & l' \\ j & j' \end{pmatrix} = \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial a_\alpha\begin{pmatrix} l \\ j \end{pmatrix} \partial x_\beta\begin{pmatrix} l' \\ j' \end{pmatrix}}\right]_{u=0}, \tag{8.3.22}$$

其中 Φ 为位能，α 与 β 取 1，2，3 之值．式(8.3.21)的解为

$$u_\alpha\begin{pmatrix} l \\ j \end{pmatrix} = A_\alpha \exp i\omega t \exp\left[-ikr\begin{pmatrix} l \\ j \end{pmatrix}\right]. \tag{8.3.23}$$

把式(8.3.23)代入式(8.3.21)，可得到 $3n$ 个线性方程组，它的有解条件给出 ω^2 的一个 $3n$ 次方程式，从而给出了 $3n$ 个解 ω_p，$p = 1, 2, \cdots, 3n$，n 是单胞中的质点数．在长波的极限下，其中三个解的 $\omega_p \propto k$，而且对这三个解 A_1、$A_2 \cdots A_n$ 趋于相同，即整个晶胞一齐移动，这三个解实质上就是一般所指的连续介质弹性波；另外 $(3n-3)$ 个解描述 n 个格子之间的相对振动，并具有有限的振动频率．在三维的点阵中，对一定的波矢 $\mathbf{k}$，有三个声学支，$(3n-3)$ 个光学支．式(8.3.23)表示三维晶格格波的一般形式．对于一个含有 N 个晶胞的晶体，所有不同格波的总数是 $3nN$，这正好等于晶体 Nn 个原子的自由度，这也是晶体的全部振动模式．

8.3.4 声　子

上面我们提到格波或称为点阵波的问题．声子指点阵波的量子化，它的能量等于 $\hbar\omega$．

在现代固体物理学中，把固体看为弱相互作用的粒子组成的集团，这些粒子称为元激发．从场的角度看，这些粒子是一些波，可总结于表 8.3.1 中．固体的元激发又称为固体中的微观结构．

表8.3.1 固体中的元激发

元激发	电子	光子	声子	激子	极化子	磁振子	等离子激元
场		电磁波	弹性波	极化强度波	电子＋弹性形变	磁化强度波	集体电子波
符号	→						
英文名称	*Electro*	*photon*	*phonon*	*exciton*	*polaron*	*magnon*	*plasmon*

高频超声不但具有波动性，还有粒子性．称声场中的量子为声子．声子是晶格振动的量子化，声子不象电子、中子这种真正的粒子，而是准粒子．声子等价于一个频率为 ω 的量子谐振子，能量为 $\hbar\omega$，动量为 $\hbar\mathbf{k}$，$\mathbf{k}$ 是声子的波矢．声子与固体其它元激发的相互作用有产生和淹没的过程，有寿命与平均自由程的问题．

在连续介质声学中，常用一个波矢量来描述一个平面波，矢量的方向为波的传播方向，大小为波数．在研究声子问题时，亦常规定一个空间坐标，空间中的一点与坐标原点相连，其长度等于波矢 $\mathbf{k}$ 的大小，其方向与波矢方向一致．用于表示波矢的点组成的空间称为 k 空间，这样 k 空间的一个点表示声子的一个波矢，表示声子的一个运动状态．

研究超声在各向异性的晶体中传播问题时，得知一般情况下相速度矢与群速度矢不重合，即存在波束偏斜问题．声子在各向异性晶体中传播时，亦出现如此的现象，称为声子聚焦效应．既然是偏斜，能流不单可以聚焦、也可以发散．图 8.3.5 给出两个例

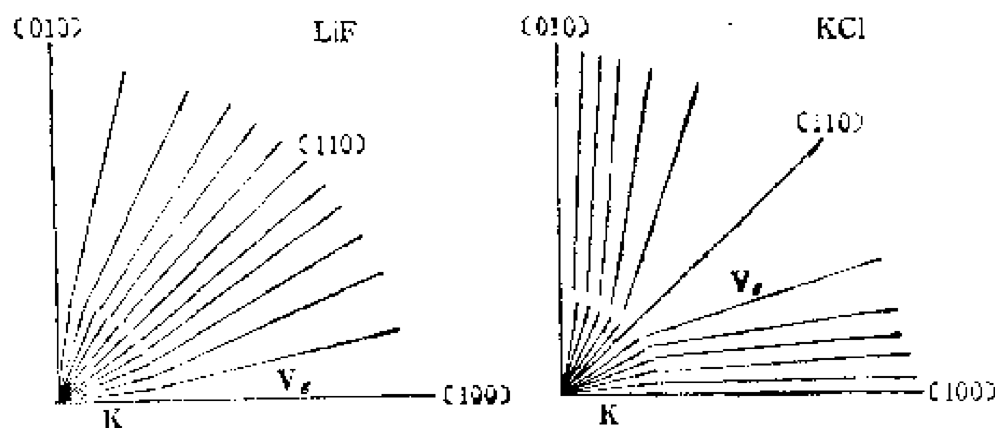


图 8.3.5 声子聚焦效应

子．声子在 LiF 单晶的〔110〕方向附近发射后，将沿〔110〕方向聚焦；声子在 KCl 单晶的〔110〕方向附近发射后，将离〔110〕方向发散．衡量声子聚焦可引用一个增益系数，它定义为波矢和能流矢两个立体角的比值，对于具体的晶体和具体的方位，可以进行理论计算．

点阵的热振动产生热声子．在晶体中，若热能不太大，这时热能仅能维持质点在其平衡位置附近进行振动，各质点间的相互作用很弱，这些热声子犹如理想气体，称为声子气．当温度升高时，质点振动的动量增加，声子气密度增加，这时出现类似于光学中的普朗克辐射，其纵声子谱方程为

$$\frac{\Delta W_l}{\Delta \nu}=\begin{cases}\dfrac{\pi}{c_l^2(\omega)}\,\dfrac{\hbar\nu^3}{e^{\hbar\nu/kT}-1} & \text{当 } \omega<\omega_{l\max}, \\ 0 & \text{当 } \omega>\omega_{l\max},\end{cases} \tag{8.3.24}$$

其中 W_l 为在面积 A 内辐射到介质中的纵声子能量，ν 为频率，$\Delta\nu$ 为频带宽，$C_l(\omega)$ 为纵波相速度、K 为玻尔兹曼常数、$\omega_{l\max}$ 为纵声子截止频率．在某个温度 T 下，辐射热声子最可几频率为

$$\nu=3kT/2\pi\hbar, \tag{8.3.25}$$

对于横声子亦有类似的结果．

§8.4 高频超声的产生与接收

8.4.1 压电法

利用压电晶体的正逆压电效应来接收或产生超声是一种最通常的方法，在高频超声里，这种方法仍占有极重要的地位．压电法可以用于体波也可以用于表面波，可以工作于纵波也可以工作于横波．在高频超声里，常用的压电材料有石英、铌酸锂、氧化锌、锗酸铋和有机压电薄膜 PVDF（即 PVF_2）．根据压电体体波模式的频率常数，从所需获得的超声频率便可知道压电体的厚度．比如，要用 x 切石英产生 1GHz 的体纵波基频振动，其厚度约为 0.0028 mm，这个厚度要用机械减薄的办法是十分困难的，需要离子刻蚀

的办法．利用离子刻蚀的办法，已在铌酸锂材料上制成基频为11GHz的压电换能器，这时片子的厚度仅约为3000Å．离子减薄的速率不高，每小时以Å计，因此在使用离子减薄技术之前，需要一般的机械办法把压电片尽可能地减薄．高频超声的发展促进压电薄膜制作技术的发展，利用溅射技术，已成功地制作了基频为几个GHz的氧化锌薄膜．另一方面，利用有机压电薄膜偏聚二氟乙烯(即PVDF)作了9GHz的实验，由于有机材料声衰减大，实验是在低温下进行的．

利用压电薄片来产生和接收高频超声，这是第一个思路，第二个思路是利用泛音模式，频率可以提高几倍，但是泛音模式的机电耦合系数随泛音次数的增加而减小，用到第11次泛音时已经相当小；第三个思路是利用压电的表面激发，这时压电体是块状的．

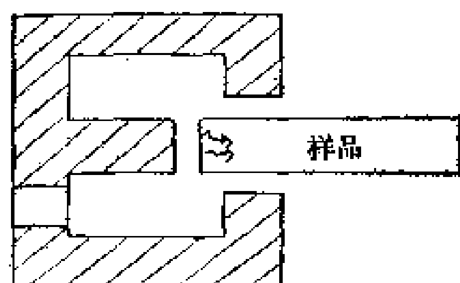


图8.4.1 微波谐振腔压电表面激发

在50年代末，Baranskii，Bömmel和Dransfeld把石英棒插入微波谐振腔里，产生了10 GHz的高频超声，实验装置如图8.4.1所示．直径为D的x切石英棒，一端插入微波谐振腔里，此时棒中的应力为

$$T_1 = c_{11}\frac{\partial \xi}{\partial x} - e_{11}E_1(t), \tag{8.4.1}$$

其中ξ为沿x方向质点的位移，棒中的电场可以表示为$E_1(t) = E_0 e^{i\omega t}$，并假定在棒内部电场是均匀的．取一维的运动方程为

$$\rho\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial T_1}{\partial x}, \tag{8.4.2}$$

把式(8.4.1)代入式(8.4.2)得

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = d_{11}\frac{\partial E_1}{\partial x}. \tag{8.4.3}$$

其中$d_{11} = e_{11}/c_{11}$，在棒体内$\partial E_1/\partial x = 0$，因此在表面上的电场梯

度可视为一个源，棒端面为自由面、在 $x=x_0$ 处，

$$\frac{\partial\xi}{\partial x}=d_{11}E_1(t),\tag{8.4.4}$$

于是式(8.4.3)的解为

$$\xi=i(d_{11}E_0/k)e^{i\omega t}e^{-ik(x-x_0)},$$

即在 $x=x_0$ 处压电应力存在不连续性从而产生声波，并传入棒内．严格地说，棒内的电场 E_1 是不均匀的，但只要 E_1 的变化在一个波长内还是很小，$\partial E_1/\partial x=0$ 的假定仍成立．对于石英，在微波频段，$\lambda\approx10^3$ Å，仅在 $x=x_0$ 处存在一个很陡的 E_1 不连续性．

贮存在微波谐振腔的电能为

$$P_{in}Q/\omega=\frac{1}{2}[\varepsilon_0E_g^2V_g+\kappa\varepsilon_0E_r^2V_r],\tag{8.4.5}$$

其中 P_{in} 为输入的微波功率，Q 是腔的品质因子，E_g 为腔隙里电场的平均值，V_g 为腔隙的体积、E_r 为在棒内有效体积 V_r 中的平均电场，κ 是棒材的介电常数． 在 $x=x_0$ 边界上，电位移连续，即 $\varepsilon_0E_g=\kappa\varepsilon_0E_r$，故

$$P_{in}Q/\omega=\frac{1}{2}\kappa\varepsilon_0E_r^2[\kappa V_g+V_r].\tag{8.4.6}$$

通过横截面为 A 的声能流为

$$S=\bar{E}cA,\tag{8.4.7}$$

其中 c 是声速、$\bar{E}=\frac{1}{2}c_{11}(d\xi/\partial x)^2$ 为声能密度，利用式(8.4.5)最后可得

$$S=P_{in}[c_{11}d_{11}^2cAQ/\omega\kappa\varepsilon_0(\kappa V_g+V_r)].\tag{8.4.8}$$

对于石英中 10GHz 的纵波，$S/P_{in}\approx10^{-3}$． 利用这个方法已获得 114GHz 的高频超声． 如果要获得横波，可利用 AC 切或 BC 切的石英．

利用微波谐振腔压电表面激发微波超声，至今还是一种常用的方法，在这项技术中，棒端面要有良好的平整度． 另外，由于电

声转换效率特别是表面层附近电场不均匀等的限制，更高频率的超声的产生还有一定的困难．作为压电法的第四个思路是利用远红外激光压电表面激发 THz 级声子．

1974 年 Weis 与 Grill 利用聚焦的远红外激光直接打在 x 切的石英表面，产生 0.891THz 的高频声子，其原理如图 8.4.2 所示．经过斩波的 HCN 激光聚焦在 x 切石英表面，除了有透射和反射的电磁波外，在入射处的石英晶体中引起一个介电场 **D**，从而产生压电应力 **h·D**，其中 **h** 为石英的有效压电应变常数，这个压电应力源就是特超声源．石英具有 D_3 点群对称性，x 方向为纯模轴，可存在一个纯纵波、一个快速纯横波和一个慢速纯横波，相速度和群速度传播方向相同．引用连续介质声学理论研究入射角变化时所产生的特超声规律，计算时不考虑色散关系，可采用的材料常数是低频下测得的数值．实验装置如图 8.4.3 所示．所用 HCN 激光器峰值功率为 10 W，

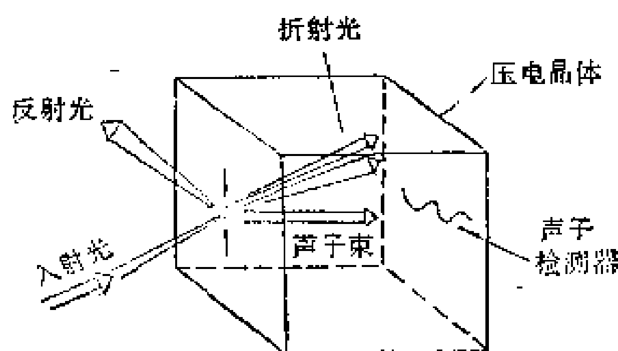


图 8.4.2　激光压电表面激发特超声

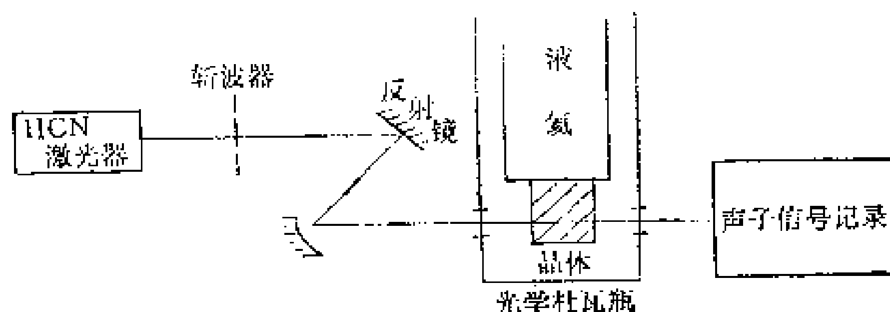


图 8.4.3　远红外激光压电表面激发 THz 级声子

频率为 0.891THz，即 0.337mm 波长，石英样品尺寸为 10mm 边长的立方体，x 面十分平整完好．这个系统的能量转换效率约为 10^{-6}．利用超导锡的热辐射接收器检测声子，超导转变温度为 3.72 K，这样的低温也有利于声子的飞行．Boxcar 积分器收到的讯号如图8.4.4 所示，其中 T_1 和 T_2 为二个横声子的讯号，与理

论预期的一样．以后又观察到 2.5THz 的两个横声子信号和3.4 THz的纵声子信号，后者的样品是 Y 切的石英晶体，石英块厚度为12mm．根据测得的声子飞行时间，可以估算声子的寿命大于 0.4 μs．激光激发法的激光源，除 HCN 外，还可采用选频的 CO_2 脉冲

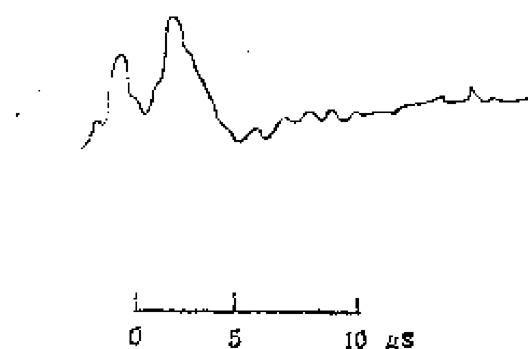


图 8.4.4 THz 级的声子讯号

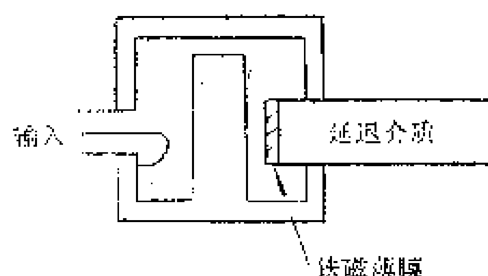


图8.4.5 产生微波超声的磁致伸缩法

激光作为光泵的远红外激光器；在波长为 50μm 至 2mm 的宽广频带里，有上百条谱线可供选择，具有更多的机动性．远红外激光压电表面激励声子的实验中，曾观察到它有良好的准直性（约为 10^{-5} 弧度），单色性好，是相干声子．但对上述实验结果，后来也有人提出疑问．

8.4.2 磁致伸缩法

磁致伸缩法产生和接收低频超声亦是一种熟知的技术．1960年 Bömmel 和 Dransfeld 利用磁致伸缩换能器产生微波超声，其实验装置如图 8.4.5 所示，在延迟棒的端面上沉积一层铁磁薄膜，微波场使铁磁薄膜产生应变，这种方法常用于产生切变波．类似于压电法，可求得该系统的效率

$$\frac{S}{P}=K_m^2\frac{Av_tQ}{\omega V},\tag{8.4.9}$$

其中 S 是输出声功率，P 是输入电磁功率，A 为铁磁膜的面积，V 是谐振腔体积，ω 为频率、Q 为谐振腔的品质因子，K_m 为磁机耦合系数，$v_t=(c_{44}/\rho)^{1/2}$．铁磁膜的材料常采用镍、因为它有最大的

磁致伸缩常数 $\lambda_{100}=-50.8\times10^{-6}$，$\lambda_{111}=-22.6\times10^{-6}$.

8.4.3 热脉冲法

利用热脉冲可以产生声子，典型的装置如图 8.4.6 所示．热声子产生器是由康铜膜制成的，其厚度约为 0.05μm、电阻约 50Ω，

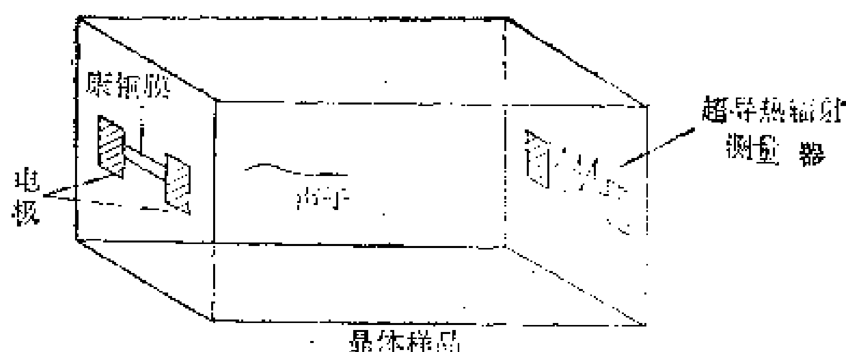


图 8.4.6 热声子实验

易与脉冲发生器匹配，当脉冲发生器把电压输送到康铜膜上，康铜发热发射声子．传播介质取低声损耗的蓝宝石，厚为 10mm、在产生器的对面蒸镀一个铟膜，膜厚约为 10^3 Å、作热辐射接收器用，利用铟的超导特性，超导转变温度为 3.4K．如辐射面上的热功率为 10W/mm²、每个脉冲使康铜升高 10K，最高的辐射频率为800 GHz.

8.4.4 超导结法

利用超导隧道结可以产生和接收声子．在两块金属中间夹入一层绝缘体，当绝缘体很薄时，如 10 — 20 Å，在两端金属块上加一电压，则电子会从一块金属穿过绝缘层到达另一块金属，即电子有越过势垒的相当大的几率，就种现象称为隧道效应.

1960 年 Giaever 发现，把金属换成超导体也有上述现象，在 1958 年江崎发现半导体中间夹入一层薄的绝缘层亦有隧道效应，1962 年 Josephson 理论预言，电子对组成的超导隧导电流可穿过两个超导体之间的绝缘层，后被实验证实.

1969 年 Eisenmenger 利用两种超导体间电子的隧道效应在

低温下产生和检测声子．在超导体内束缚电子的能级与正常电子的能级之间有一个 2Δ 的能隙，其大小约为 10^{-4} — 10^{-3}eV．如果有大于 2Δ 的能量输入到超导体，比如可加一定的偏压，则超导体中的 Cooper 电子对可能被破坏而形成准粒子，原系统的平衡状态变成不稳定，于是发生如下现象：系统将通过碰撞重新分配能量，这个弛豫过程将产生连续谱声子；系统亦可通过复合过程，重新组成 Cooper 对而伴随发射单色声子．其能态及跃迁过程如图 8.4.7 所示．超导隧道结用于检测声子的原理亦类同，当声子的

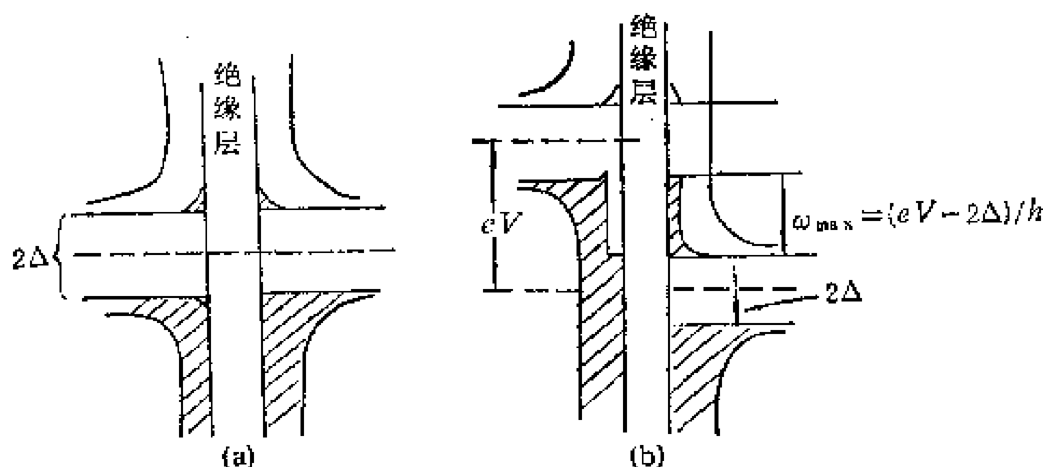


图 8.4.7 超导隧道结的能态和声子激励
(a)未加偏压时，(b)加偏压V后，辐射声子

能量大于 2Δ 时，Cooper 对被破坏成不稳定态，穿过结形成电流．

超导隧道结的结构和制作过程可用图 8.4.8 表示，取一块用玻璃或蓝宝石材料制成的基片，在四个边上蒸上银电极，然后在

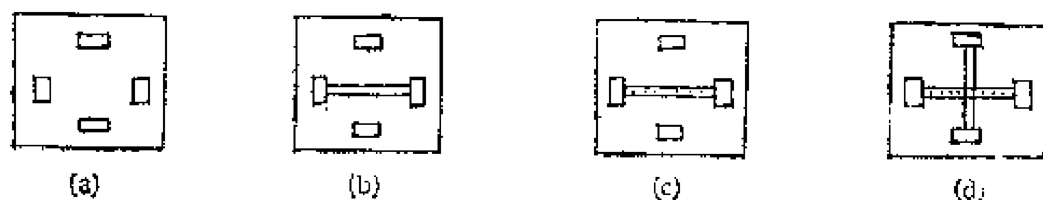


图 8.4.8 $Al/Al_2O_3/Sn$ 超导隧道结制作过程
(a)制备电极；(b)蒸镀铝膜；(c)氧化；(d)蒸镀锡膜

一对电极间蒸上铝条，宽 1mm、厚 1 — 3 × 10^3 Å，接着进行氧化生成 Al_2O_3，厚约 10 — 20 Å，然后又在另一对电极之间蒸上锡，宽

1mm、厚 10^3 Å，这样便制成一个 $Al/Al_2O_3/Sn$ 超导隧道结.

利用超导隧道结产生和检测声子的实验装置如图 8.4.9 所示. 由于隧道结的内阻小，在装置中用了两个匹配变压器. 蓝宝

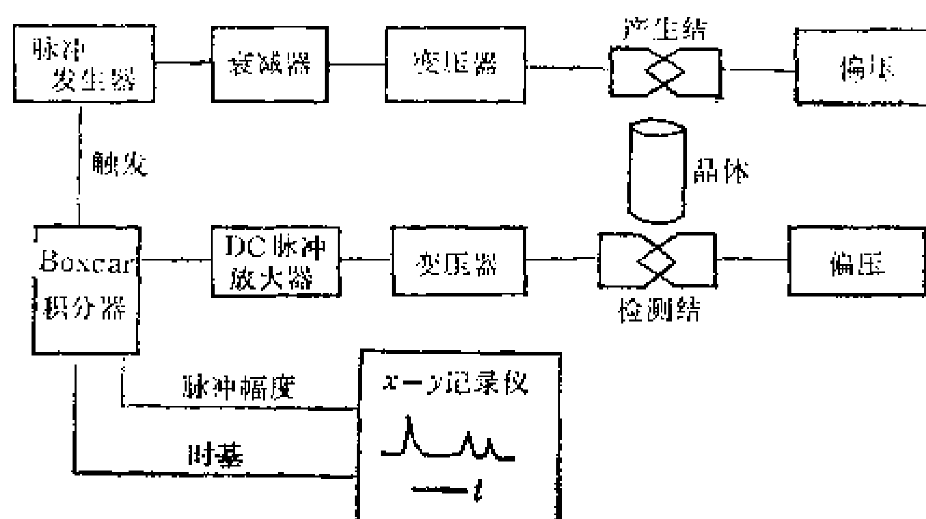


图 8.4.9 利用超导隧道结的声子实验装置

石的两个端面需良好的平行与抛光，工作时把样品放在低温杜瓦瓶里. 信号的采集可用采样示波器，亦可用 x–y 记录仪.

8.4.5 其他方法

产生和检测高频超声还有许多方法，如光学法、顺磁共振法、半导体法.

超声在介质中传播，引起折射率的变化，起了衍射光栅的作用，利用光衍射法可检测高频超声. 这个方法中，样品侧面需有良好的抛光，样品亦需有良好的透光性能. 光和点阵振动的相互作用，固体对光的 Brillouin 散射，有可能不但引起光频的变化，同时发射声子，这是用光学法产生高频超声的一种办法.

利用声顺磁共振可以检测高频超声，所用设备是电子顺磁共振谱仪，共振吸收的频率正是被检测的超声频率. 实验亦是在低温下进行的，如 4K 或 10K，因为在低温下，自旋点阵弛豫时间比超声脉冲长度长得多，便于观测. 用这种方法曾检测 9.5GHz 的高频超声. 还有其他的顺磁共振法.

利用半导体法产生和检测超声亦有多种方案，如利用半导体雪崩检测器，已检测到9.5GHz的高频超声. 在60年代，曾用阻挡层换能器，常用的结构有耗尽层换能器和扩散层换能器，这些换能器约可工作到1GHz.

8.4.6 薄膜压电换能器

薄膜压电换能器属于压电法、这里最后单独列出，一方面，它是高频超声低频段常用的办法，另一方面有关内容可从换能器的角度加以介绍. 薄膜压电换能器的结构如图8.4.10所示.其中z处为压电薄膜，可用硫化镉、硫化锌、氧化锌、氮化铝、铌酸锂等材料. 一般的制作方法是蒸镀或溅射，既可用于纵波亦可用于横波.

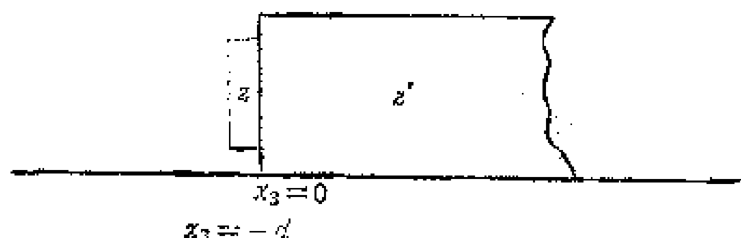


图8.4.10 薄膜压电换能器

设压电薄膜的声阻抗为z，与它接触的声延迟介质的声阻抗为z'，薄膜的面积为A，厚度为d，超声波沿x_3方向传播.

用电激励压电薄膜，将产生超声波

$$\left.\begin{aligned} u &= U_0\exp[i(\omega t - kx_3)] \\ v &= V_0\exp[i(\omega t + kx_3)] \end{aligned}\right\} x_3 < 0,$$

$$w = W_0\exp[i(\omega t - k' x_3)]\, x_3 > 0, \tag{8.4.10}$$

其中k为换能器中的波数，k'为延迟介质中的波数. 在薄膜的自由表面端，应力为零. 如果外加电场为$E = E_0\exp(i\omega t)$，则

$$c_{33}\left(\frac{\partial u}{\partial x_3}\right) + c_{33}\left(\frac{\partial v}{\partial x_3}\right) + e_{33}E = 0,\text{在}x_3 = -d, \tag{8.4.11}$$

这里的压电薄膜是以硫化镉为例，c_{33}为弹性劲度常数. 在薄膜与介质的边界，位移和应力连续、即有

$$u + v = w \tag{8.4.12}$$

$$c_{33}\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right) + c_{33}\left(\frac{\partial v}{\partial x_2}\right) + e_{33}E = c'_{33}\left(\frac{\partial w}{\partial x_2}\right) \quad \text{在} x_2 = 0, \tag{8.4.13}$$

其中 c'_{33} 是延迟介质的弹性劲度常数. 对于正弦波,上列各式变为

$$(u_0 + v_0)k\sin kd - i(u_0 - v_0)k\cos kd + \frac{e_{33}}{c_{33}}E_0 = 0,$$

$$u_0 + v_0 = w_0,$$

$$ik(u_0 - v_0) - \frac{e_{33}}{c_{33}}E_0 = i\frac{c'_{33}}{c_{33}}k' w_0. \tag{8.4.14}$$

从这组方程消去 u_0 和 v_0,可得介质中的声波幅度为

$$w_0 = -\frac{e_{33}E_0[1 - \cos kd]}{kc_{33}[\sin kd - i(z'/z)\cos kd]}, \tag{8.4.15}$$

其中有 $z'/z = c'_{33}k'/c_{33}k$, 延迟介质中的应变幅度为 $ik'w_0$. 从薄膜压电换能器流入延迟介质的超声功率 S 为

$$S = \frac{1}{2}\left(\frac{z'}{z}\right)^2 \frac{Av'_l e_{33}^2 E_0^2[1 - \cos kd]^2}{c'_{33}[\sin^2 kd + (z'/z)^2\cos^2 kd]}, \tag{8.4.16}$$

其中 v'_l 为介质中的纵波声速. S 也可以表示为

$$S = \frac{1}{2}\left(\frac{z'}{z}\right)\frac{Av_l \varepsilon k E_0^2[1 - \cos kd]^2}{\sin^2 kd + (z'/z)^2\cos^2 kd}, \tag{8.4.17}$$

其中 v_l 为薄膜中纵波声速,ε 为换能器材料的电容率,κ 为压电耦合因子.

当 $kd = (2n+1)\pi$ 时, n 是正整数,换能器发生共振,超声功率流极大. 当 $kd = -1$,则 S 为

$$S = 4(z/z')Av_l k^2\left(\frac{1}{2}\varepsilon E_0^2\right), \tag{8.4.18}$$

与非共振式换能器相比,其功率增大 $4z/z'$ 倍.

为提高压电薄膜换能器的效率,可采用多层结构,即在换能器与延迟介质之间增设声匹配层,或利用同相的多层换能器.

§ 8.5 高频超声与物质微观结构的相互作用

8.5.1 高频超声与点阵振动的相互作用

高频弹性波在固体中传播时，常出现过量的吸收，这是因为它把部分能量转移给了点阵振动.

对于高频超声，固体介质不能视为连续的介质，需考虑离散体系的效应. 在最简单的情况下，视固体为相同原子组成的线链，线链的频率ω与波数 q 存在关系

$$\omega=(4\beta/m)^{1/2}|\sin(qa/2)|, \tag{8.5.1}$$

其中 a 是原子间距、m 为原子质量、β 是原子间的力常数，其色散曲线如图 8.3.2 所示. 当波长比原子间距大得多，可视链为连续介质，此时 $\omega=c_0q$，相速度 c_0 与频率无关，即声波是非色散的；当波长很短，晶格的离散本性将引起色散. 三维的晶体中，任一方向存在三个偏振波，各自的色散曲线不同.

如前所述，高频弹性波可描述为准粒子，称为声子，其能量为 $\hbar\omega$，动量为 $\hbar q$. 假定波矢为 $\mathbf{q}$ 的声子与波矢为 $\mathbf{k}$ 的体系复合，将得到波矢为 $\mathbf{q}'$ 的声子. 根据动量守恒定律，存在

$$\mathbf{q}+\mathbf{k}=\mathbf{q}'+\mathbf{G}, \tag{8.5.2}$$

其中 $\hbar\mathbf{G}$ 为给予整个晶体的动量. 式 (8.5.2) 描述的过程称为三声子过程，并称 $\mathbf{G}=0$ 的为正常过程，当 $\mathbf{G}\neq0$，称为 Umklapp 过程，意思是过触发. 式(8.5.2)中的 $\mathbf{G}$ 为晶体的倒格子矢.

为了解高频超声波与点阵热振动的相互作用，不仅要知道色散曲线，而且要知道振动态密度对频率的函数关系，即 Debye 近似问题.

设晶体中每单位体积含有 $N/3$ 个原子，每一个原子有三个自由度，则正态模数为 N. 又设在频率为 ω 至 $\omega+d\omega$ 区间，每单位体积的模数为 $D(\omega)d\omega$，则 Debye 近似以下式定义：

$$\int_0^{\omega_D} D(\omega)d\omega=N, \tag{8.5.3}$$

其中 ω_D 为截止频率. 对于连续固体,态密度 $D(\omega)$ 可示为

$$D(\omega)=\frac{\omega^2}{2\pi^2}\left(\frac{1}{c_l^3}+\frac{2}{c_t^3}\right), \tag{8.5.4}$$

其中 c_l 与 c_t 分别为纵波和横波的相速度. 于是

$$\omega_D=\left[6\pi^2N\left(\frac{1}{c_l^3}+\frac{2}{c_t^3}\right)^{-1}\right]^{1/3}, \tag{8.5.5}$$

而 Debye 温度为

$$\Theta_D\equiv\frac{\hbar\omega_D}{k_B}=\left[\frac{6\pi^2\hbar^3N}{k_B^3}\left(\frac{1}{c_l^3}+\frac{2}{c_t^3}\right)^{-1}\right]^{1/3}, \tag{8.5.6}$$

其中 k_B 为 Boltzmann 常数. 对于各向异性的晶体,常对所有的可能的传播方向,对 c_l 和 c_t 进行适当的平均,定义一个有效声速 c_0:

$$3/c_0^3=1/c_l^3+2/c_t^3, \tag{8.5.7}$$

于是

$$\Theta_D=\frac{\hbar c_0}{k_B}[2\pi^2N]^{1/3}. \tag{8.5.8}$$

在 Debye 近似中,热激发声子数 n 为

$$n=\int_0^{\omega_D}D(\omega)n(\omega)d\omega, \tag{8.5.9}$$

其中 $n(\omega)=(e^{\hbar\omega/K_BT}-1)^{-1}$,为 Bose-Einstein 分布函数,即声子在频率为 ω 的态的几率. 于是

$$n=\frac{K_B^3T^3}{2\pi^2\hbar^3c_0^3}\int_0^{x_D}\frac{x^2}{e^x-1}dx, \tag{8.5.10}$$

其中 $x_D=\hbar\omega_D/K_BT=\Theta_D/T$. 当 $T\ll\Theta_D$,可得

$$n=3N\left(\frac{T}{\Theta_D}\right)^3\int_0^{\infty}\frac{x^2}{e^x-1}dx. \tag{8.5.11}$$

同样还可求得在 Debye 近似中的总热能为

$$U=\int_0^{\omega_D}\hbar\omega D(\omega)n(\omega)dw$$

$$= 3NK_BT\left(\frac{T}{\Theta_D}\right)^3\int_0^{\Theta_D/T}\frac{x^3}{e^x-1}dx. \quad (8.5.12)$$

在真实的固体中，传播着小振幅的声波，亦常出现非线性特性，因为弹性波常发生相互作用，即声子与声子的相互作用．这就要求我们研究非线性点阵波问题，关于这方面，引入 Grüneisen 常数．

对一个特定的点阵振动模式，可以用它的波矢 $\mathbf{q}$ 和偏振 p 来描述．晶阵的非谐性可以用声速对应变的变化来表达，或者说以模 $\mathbf{q}$、p 的频率 $\omega(\mathbf{q},p)$ 对应变的变化来表达．为描述应变 S_{jk} 对频率的效应，定义一个 Grüneisen 数

$$\gamma_{jk}(\mathbf{q},p) = -\frac{1}{\omega_0(\mathbf{q},p)}\frac{\partial\omega(\mathbf{q},p)}{\partial S_{jk}}, \quad (8.5.13)$$

其中 $\omega_0(\mathbf{q},p)$ 为零应变下的模频率．如果其应变为纯膨胀，则上式变成

$$\gamma(\mathbf{q},p) = -\frac{v}{\omega_0(\mathbf{q},p)}\frac{\partial\omega(\mathbf{q},p)}{\partial v} = \frac{d\ln\omega(\mathbf{q},p)}{d\ln v}. \quad (8.5.14)$$

假定所有的模式具有相同的 γ，利用 Debye 近似上式变成

$$\gamma = \frac{d\ln\omega}{d\ln v} = \frac{d\ln\Theta_D}{d\ln v}. \quad (8.5.15)$$

称 γ 这个量为 Grüneisen 常数，用这个单参数来描述晶体的非谐性．可以推得

$$\gamma = 3\beta/K_TC_v = 3\beta B/c_v, \quad (8.5.16a)$$

其中 β 为线热膨胀系数，K_T 为绝热压缩系数，B 为体模量，C_v 为定容下每单位体积的热容．对于实际情况，可定义一个平均的 Grüneisen 常数．

$$\gamma = \frac{\Sigma\gamma(\mathbf{q},p)c(\mathbf{q},p)}{\Sigma c(\mathbf{q},p)}, \quad (8.5.16b)$$

其中权重因子是模 $(\mathbf{q},p)$ 的热容．

在线性弹性理论中、其弹性常数是二阶的；对于非线性理论，需考虑应变的效应，此时的弹性常数为高阶的．可定义第 n 阶（n

$\geqslant 2$)的弹性常数为

$$c^{n}_{ijkl\cdots}=\rho_0\left(\frac{\partial^n u}{\partial S_{ij}\partial S_{kl}\cdots}\right), \tag{8.5.17}$$

其中 u 是内能. 对于各向同性介质,有两个独立的二阶弹性常数和三个独立的三阶弹性常数,对于立方晶体,有三个独立的二阶弹性常数和六个独立的三阶弹性常数等等.

固体的三阶弹性常数可以用超声技术进行测量,即把样品置于静水压或单向应力下,然后测量样品中声速的变化.

固体中声子间的非谐性相互作用,将引起超声的衰减,这就是热声子对超声的吸收. 设热声子的平均寿命为 τ_{th},超声频率为 ω,则当 $\omega\tau_{th}\ll 1$ 时,将产生热弹损失,其吸收系数为

$$\alpha=\frac{\gamma^2 c_v \Theta}{2\rho c^3}\frac{\omega^2\tau_{th}}{1+\omega^2\tau_{th}^2}, \tag{8.5.18}$$

其中 $c=(c^{\sigma}_{11}/\rho)^{1/2}$, c_v 为定容比热. 上式是对各向同性介质中在 x 方向的纵波而言. 热弹损失来源于纵波中从压缩区到稀疏区的不可逆热传导. 在 $\omega\tau_{th}\ll 1$ 的情况下,还出现 Akhiezer 损失,或称为声子粘滞. 在有限的温度下,固体中存在着热声子的平衡分布,当相干声波通过时,干扰了声子平衡,结果造成吸收或阻尼. 当 $\omega\tau_{th}>1$,将产生 Landau-Rumer 损失,损失的原因是声子间的碰撞.

8.5.2 高频超声与位错的相互作用

当超声在含有位错的固体中传播时,声能被加剧地吸收. 一般地说,对于小振幅的超声,声衰减与频率有关,但与固体的应变幅度无关,对于大振幅的超声,则声衰减与频率无关,仅与振幅有关.

位错是晶体中的一种线缺陷,包括刃型位错和螺旋位错,两者均可用 Burgers 矢量来描述. 假定位错是由无规分布的点缺陷所钉扎,图 8.5.1 表达了被钉扎在 $y=0$ 和 $y=l$ 之间的位错环,它在 z 方向有一个位移 ξ. 设声波垂直于滑移面(即沿 x 方向)传播,

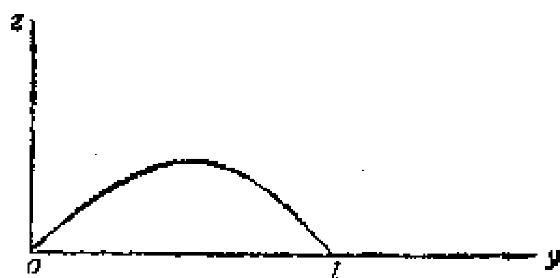


图 8.5.1　钉扎在$y=0, l$间可运动的位错环

并在 z 方向偏振，其应力为 T_{13}. 应变为 S_{13}. 为方便起见，下面的推导中不写出下标.

在滑移面上施加的切应力 T 产生的应变为 $S=S_{el}+S_{dis}$，即应变由弹性应变 T/μ(其中 μ 为切变模量）和由位错运动引起的范性应变组成，位错应变可示为

$$S_{dis}=N_0bl\bar{\xi},\qquad(8.5.19)$$

其中 b 为 Burgers 矢量，N_0 为每单位体积位错环数，$\bar{\xi}=(1/l)\times\int_0^l\xi dy$ 为平均位移. 运动方程为

$$\partial^2T/\partial x^2-\rho\partial^2S/\partial t^2=0,\qquad(8.5.20)$$

或为

$$\frac{\partial^2T}{\partial x^2}-\frac{\rho}{\mu}\frac{\partial^2T}{\partial t^2}=N_0b\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_0^l\xi dy,\qquad(8.5.21)$$

其中 ρ 为材料密度. 图 8.5.1 所示的位错环可视为一根被声波策动的阻尼弦. 对于弦振动，其线性阻尼方程为

$$A\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}+B\frac{\partial\xi}{\partial t}-c\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}=bT,\qquad(8.5.22)$$

其中 $A=\pi\rho b^2$ 为每单位长度的质量，$c=2\mu b^2/\pi(1-\sigma)$ 为每单位长度的恢复力，它起因于位错环变曲所产生的张力，σ 为 Poisson 比，bT 为外加应力所引起的单位长度的力，B 为阻尼系数.

设外加应力为

$$T=T_0e^{-\alpha x}e^{i\omega(t-x/v)},\qquad(8.5.23)$$

代入式(8.5.21)和式(8.5.22)得

$$\xi=\frac{4bT_0}{A}e^{-\alpha x}e^{-i\omega x/v}$$

$$\times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin \frac{(2n+1)\pi y}{l} \frac{e^{i(\omega t-\delta_n)}}{[(\omega_n^2-\omega^2)^2+(\omega d)^2]^{1/2}}, \quad (8.5.24)$$

其中 $d = B/A$, $\omega_n = (2n+1)(\pi/l)(c/A)^{1/2}$, $\delta_n = \tan^{-1}[\omega d/(\omega_n^2 - \omega^2)]$，吸收系数为

$$\alpha = \frac{4N_0 l\mu}{\pi^2 \rho c} \omega^2 d \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \frac{1}{[(\omega_n^2-\omega^2)^2+(\omega d)^2]}, \quad (8.5.25)$$

声速为

$$c = c_0 \left[1 - \frac{4N_0 l\mu}{\pi^2 \rho} \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{\pi} \frac{1}{(2n+1)^2} \frac{\omega_n^2-\omega^2}{[(\omega_n^2-\omega^2)^2+(\omega d)^2]^2} \right], \quad (8.5.26)$$

其中 $c_0 = (\mu/\rho)^{1/2}$.

由于更多的位错环对声波不是成简单的取向关系，因此上两式必须乘以取向因子 Ω. 一般而言，对于吸收系数式(8.5.25)取其级数的第一项已足够精确，故衰减变为

$$\alpha = \frac{4N_0 l\mu\Omega}{\pi^2 \rho c \omega_0} \frac{\omega^2 d/\omega_0^3}{[1-(\omega/\omega_0)^2]^2+[\omega d/\omega_0^2]^2}, \quad (8.5.27)$$

其中 $\omega_0 = (\pi/l)(c/A)^{1/2}$，若 $c_0 \approx 10^5 \mathrm{cm/s}$, $l \approx 10^{-4}\mathrm{cm}$, 则 $\omega_0 \approx 10^9 \mathrm{Hz}$. 对于小阻尼情况，即 $d \ll \omega_0$. α 在 $\omega = \omega_0$ 时为极大.

位错的钉扎可起因于点缺陷，也可来自位错网络，位错网络可视为由若干个点缺陷钉扎环组成. 一般而言，位错网络是强钉扎，但点缺陷形成弱钉扎，随着声应力的增加，点缺陷钉扎的位错环可以消失.

8.5.3 固体中声子与自旋的相互作用

今考虑一个强耦合的自旋系统，如铁磁材料. 自旋间的强耦合与晶体的热振动相反，后者使自旋取向无规化，当超过居里点，自发磁化消失，材料变成顺磁性.

在饱和铁磁体的基态，所有的自旋是平行排列着的，在低能激

发态，每一个自旋偏离饱和方向以一个小角度转动，一个自旋的角位移将感生它邻近自旋的转动，同时存在一个强的恢复矩，从而产生一个自旋波，自旋对磁场方向进动，相继地以常相角传开. 自旋波以磁子来定量描述，它具有能量 $E=n\hbar\omega$、这里 n 是整数，ω 是自旋波的频率.

自旋波传播的基本特性可以通过一维晶格的色散关系来描述. 在第 p 晶格位，原子磁矩矢量的变化率为

$$d\boldsymbol{\mu}_p/dt=r\boldsymbol{\mu}_p\times(\mathbf{H}_i+\mathbf{H}_p) \tag{8.5.28}$$

其中 $\mathbf{H}_i$ 为在第 p 晶格位 z 方向的外加磁场值，$\mathbf{H}_p$ 为在 p 位由于邻近自旋引起的场，$r=-g\mu_B/\hbar$，为回磁比. 式(8.5.28)意味着每一个场产生一个力矩企图使 $\boldsymbol{\mu}_p$ 与场平行. 若 $\mathbf{H}_p$ 仅由二个最邻近自旋决定，则

$$\mathbf{H}_p=\frac{2J}{(r\hbar)^2}(\boldsymbol{\mu}_{p-1}+\boldsymbol{\mu}_{p+1}), \tag{8.5.29}$$

其中 J 为交换积分，它关系到邻近原子波函数的重迭部份. 式(8.5.28)变成

$$\frac{d\boldsymbol{\mu}_p}{\partial t}=\gamma\boldsymbol{\mu}_p\times\mathbf{H}_i+\frac{2J}{\gamma\hbar^2}(\boldsymbol{\mu}_p\times\boldsymbol{\mu}_{p-1}+\boldsymbol{\mu}_p\times\mu_{p+1}). \tag{8.5.30}$$

假如磁矩仅轻微地相对于 z 方向发生倾斜，我们可以认为 $\boldsymbol{\mu}$ 的 z 分量很接近于 $|\boldsymbol{\mu}|$，可以保留在 x 和 y 分量的一阶项使式(8.5.30)线性化，于是式(8.5.30)的三个分量方程为

$$\left.\begin{aligned}
\dot{\mu}_{p,x}&=\gamma\mu_{p,y}H_i+\frac{2J}{\gamma\hbar^2}|\boldsymbol{\mu}|(2\mu_{p,y}-\mu_{p-1,y}-\mu_{p+1,y}),\\
\dot{\mu}_{p,y}&=-\gamma\mu_{p,x}H_i-\frac{2J}{\gamma\hbar^2}|\boldsymbol{\mu}|(2\mu_{p,x}-\mu_{p-1,x}-\mu_{p+1,x}),\\
\dot{\mu}_{p,z}&=0.
\end{aligned}\right\} \tag{8.5.31}$$

设简谐解为如下形式

$$\left.\begin{aligned}
\mu_{p,x}&=ue^{i(pka-\omega t)},\\
\mu_{p,y}&=ve^{i(pka-\omega t)},
\end{aligned}\right\} \tag{8.5.32}$$

其中 a 为晶格间距，则式(8.5.31)变成

$$\left.\begin{aligned}-i\omega u&=\gamma H_i v+\frac{4J}{\gamma\hbar^2}|\mu|(1-\cos ka)v,\\-i\omega v&=-\gamma H_i u-\frac{\Delta J}{\gamma\hbar^2}|\mu|(1-\cos ka)u.\end{aligned}\right\}\tag{8.5.33}$$

令系数行列式为零，我们得到

$$\omega=\gamma H_i+\frac{4J}{\gamma\hbar^2}|\mu|(1-\cos ka).\tag{8.5.34}$$

假如 $ka\ll1$，即波长比点阵间距大，上式变成

$$\omega=\gamma H_i+\frac{4J}{\gamma\hbar^2}|\mu|a^2k^2.\tag{8.5.35}$$

可知，在长波极限下，对于自旋波，$\omega\propto k^2$，对于声波，$\omega\propto k$.

在铁磁体中，邻近自旋的相互作用受到固体内弹性应变的影响. 反之，作用在原子上的磁力亦影响固体的弹性性质，即弹性波与自旋波发生耦合，若两者的频率和波长相近，将发生强耦合. 这里不作推演.

8.5.4 固体中声子与电子的相互作用

当超声在金属中传播时，声波与电导电子将发生耦合而耗散声能. 声波在固体中传播，首先是引起随时间变化的应变，这个变化破坏电子的空间分布，电子企图要达到局部的平衡分布产生弛豫过程，这个过程要耗散声能. 或者说金属中声波引起的应变使其 Fermi 面发生形变，当 Fermi 面通过弛豫过程达到新的平衡形状时要耗散声能，若知道瞬时的和弛豫的弹性模量，则可以求其吸收系数. 对于小的压缩应变，可求得吸收系数为

$$\alpha=\frac{4}{15}\left(\frac{nE_f}{\rho c^3}\right)\omega^2\tau,\tag{8.5.36}$$

其中 n 为单位体积中的电子数，E_f 为 Fermi 能，ρ 为密度，c 为纵波声速，ω 为频率，τ 为弛豫时间. 要注意的是，式(8.5.36)是从简单的弛豫理论推导出来的. 对于低频的声波，与实验结果较符合；对于高频超声，如 10GHz 级，必须用量子力学的方法，研究电

子和声子的碰撞问题．用微扰理论可求得吸收系数为

$$\alpha=\frac{\pi}{12}\frac{nmv_f}{\rho c^2}\omega, \tag{8.5.37}$$

其中 m 为电子质量，v_f 为在 Fermi 面电子的速度，ω 为声子的频率．

正常态下金属中的电子对声子有相互作用，超导态下金属中亦存在相互作用．1954 年间 Bömmel 等人曾发现，当温度越过临界温度以下，超导体中的超声衰减迅速地减少．根据 BCS 理论，低于临界温度，超导电子增加，正常电子减少，而后者与超声衰减有关，并可求得在超导态和正常态下纵波的衰减比值为

$$\frac{\alpha_s}{\alpha_n}=\frac{2}{e^{\Delta(T)/K_BT}+1}, \tag{8.5.38}$$

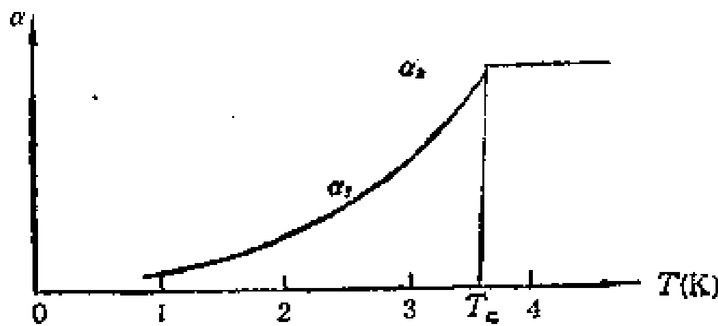


图 8.5.2　超导态下超声衰减的减少

其中 α_s 为超导态下的声衰减，α_n 为正常态下的声衰减，而 $2\Delta(T)$ 为能隙．一个典型事例如图 8.5.2 所示，实验材料是锡，超声频率为 33.5 MHz．

在研究超声在金属中传播时，若金属是处于外磁场下，声波与轨道电子相互作用，产生声的共振吸收现象，即存在磁声效应．

超声在压电半导体中传播时，声波与载流子产生强耦合，载流子可以是电子也可以是运动的空穴．若同时在声波的传播方向加上一个直流电场，在不同条件下，声波可以被衰减，也可以被放大，即出现压电半导体中的声电效应．

8.5.5　声子与光子的相互作用

最典型的声和光的相互作用是声波对光波的衍射．点阵振动

与光波的耦合产生光弹效应．透明材料的折射率不仅与外加电场有关，而且与外加应力有关．作用于晶体上的应力首先引起应变，晶体中的应变又使极化状态发生变化，于是折射率发生变化．

对于高频的超声，光和声的相互作用可以用光子和声子的碰撞机理来描述，如图 8.5.3 所示．设入射光子的波矢为 $\mathbf{k}_i$，声子的波矢为 $\mathbf{q}$，衍射光子的波矢为 $\mathbf{k}_s$．根据准动量守恒定律可得

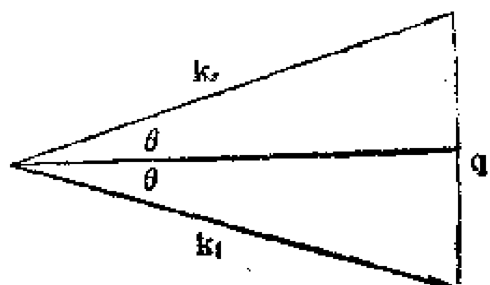


图 8.5.3 声子与光子的相互作用

$$\mathbf{k}_i + \mathbf{q} = \mathbf{k}_s, \tag{8.5.39}$$

如果光子波矢的幅度变化可以忽略不计，即存在 $|\mathbf{k}_i| \approx |\mathbf{k}_s| = k$，则可得

$$2k\sin\theta = q. \tag{8.5.40}$$

改用波长表示，则得

$$2\Lambda\sin\theta = \lambda, \tag{8.5.41}$$

其中 Λ 为声子的波长，λ 为光子的波长．(2.8.4) 式就是 Bragg 衍射定律．

固体的热振动对光子将产生散射，并且改变入射光的频率，称这种散射为 Brillouin 散射．固体中的不完整性对入射光亦产生散射，但不改变频率，称这种散射为 Rayleigh 散射．晶体点阵热振动的 Brillouin 散射是发生在所有的方向上的．实验上可以用高分辨光栅光谱仪，也可以用 Fabry-Perot 干涉仪来研究 Brillouin 散射．利用 Brillouin 散射可研究固体的声学模．固体中的 Brillouin 散射是一种非弹性散射，入射光子的频率与散射光子的频率不同，并且伴随着声子的产生与湮灭．若入射光子的频率为 ω，则因吸收或发射频率为 Ω 的声子而出现 $\omega-\Omega$ 频率的光子和频率为 $\omega+\Omega$ 的光子，前一散射光子称 Stokes 线，后者称反 Stokes 线．如果入射光是一束强光，将出现非线性效应，伴随着强的 Stokes 光子出现强的声子，称这种效应为受激 Brillouin 散

射，这就是说利用受激的 Brillouin 散射可以产生微波超声。

8.5.6 声子与声子的相互作用

对于大振幅声波，传播时出现非线性畸变，对此问题需研究声波与声波的相互作用；在研究高频超声与点阵振动的相互作用时也涉及声子与热声子的相互作用。在 8.5.1 节中，我们曾提到三声子过程等等。

对于无色散的各向同性介质中，其三声子过程可有如下选择定则：

$$
\left.\begin{array}{l}
\omega_l(\mathbf{q}_1)\to\omega_t(\mathbf{q}_2)+\omega_t(\mathbf{q}_3)\\
\omega_l(\mathbf{q}_1)\to\omega_t(\mathbf{q}_2)+\omega_l(\mathbf{q}_3)\\
\omega_l(\mathbf{q}_1)\to\omega_l(\mathbf{q}_2)+\omega_t(\mathbf{q}_3)\\
\omega_l(\mathbf{q}_1)+\omega_t(\mathbf{q}_2)\to\omega_l(\mathbf{q}_3)\\
\omega_t(\mathbf{q}_1)+\omega_l(\mathbf{q}_2)\to\omega_l(\mathbf{q}_3)\\
\omega_t(\mathbf{q}_1)+\omega_t(\mathbf{q}_2)\to\omega_l(\mathbf{q}_3)
\end{array}\right\}\tag{8.5.42}
$$

其中 ω 为频率，$\mathbf{q}_i$ 为波矢，l 示纵声子，t 示横声子。

除了三声子的相互作用外，还存在四声子相互作用，对于无色散的各向同性介质，一个纵波声子可以产生如下过程

$$
\left.\begin{array}{l}
\omega_l(\mathbf{q}_1)+\omega_2(\mathbf{q}_2)\to\omega_l(\mathbf{q}_3)+\omega_l(\mathbf{q}_4)\\
\omega_l(\mathbf{q}_1)+\omega_2(\mathbf{q}_2)\to\omega_t(\mathbf{q}_3)+\omega_l(\mathbf{q}_4)\\
\omega_l(\mathbf{q}_1)+\omega_t(\mathbf{q}_2)\to\omega_t(\mathbf{q}_3)+\omega_t(\mathbf{q}_4)\\
\omega_l(\mathbf{q}_1)+\omega_t(\mathbf{q}_2)\to\omega_l(\mathbf{q}_3)+\omega_l(\mathbf{q}_4)\\
\omega_l(\mathbf{q}_1)+\omega_t(\mathbf{q}_2)\to\omega_t(\mathbf{q}_3)+\omega_l(\mathbf{q}_4)\\
\omega_l(\mathbf{q}_1)+\omega_t(\mathbf{q}_2)\to\omega_t(\mathbf{q}_3)+\omega_t(\mathbf{q}_4)\\
\omega_l(\mathbf{q}_1)+\omega_t(\mathbf{q}_2)+\omega_t(\mathbf{q}_3)\to\omega_l(\mathbf{q}_4)\\
\omega_l(\mathbf{q}_1)+\omega_t(\mathbf{q}_2)+\omega_l(\mathbf{q}_3)\to\omega_l(\mathbf{q}_4)
\end{array}\right\}\tag{8.5.43}
$$

当然还有更多的情况。四声子过程是考虑到高次项的影响，其弛豫时间比三声子过程长。

§8.6 高频超声的应用

8.6.1 高频超声体波器件

本章自始至终侧重体波．下面介绍高频超声的应用，我们也将例举高频超声体波器件，并侧重高频压电换能器这种较典型工具的基本内容．高频压电换能器作为高频体波器件本身，主要应用于电子学和光学，如振荡器、滤波器、延迟线和各种声光器件；作为换能器则还用于物理学和其它科学技术领域．高频超声体波器件工作频率已做到10^{10}Hz 级，而高频压电换能器已工作到10^{12}Hz 级．

高频体波器件，特别是高频压电换能器，其特点是工作频率高，于是要考虑和它相接触的物件，诸如电极、背衬、传输介质等，厚度的物理效应(侧向尺寸一般比波长大得多)．具体地说是机械阻抗的失配问题，即在高频问题中，各相连接的实体层都是有限长的传输线．分析这种问题，采用等效电路是十分方便的．

高频压电换能器是利用压电体的厚度伸缩振动和厚度切变振动，而电场方向和声场方向之间关系分二种类型：一为共线场型，即两者方向重合；二为交叉场型，即两者方向互相垂直．在实际应

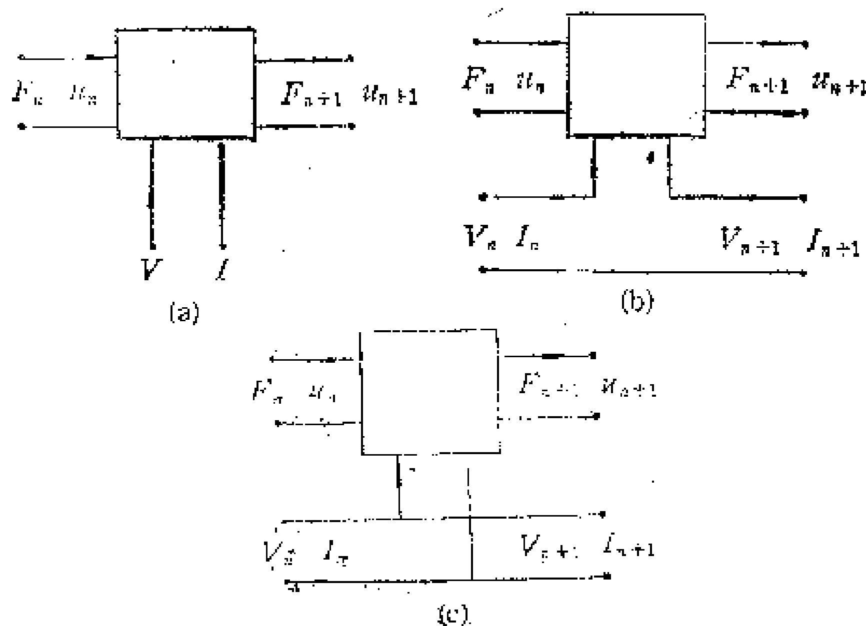


图 8.6.1 第 n 节压电层的等效网络

用中，常采用多层压电体，它们之间有公共电极，可以是串联也可以是并联，组成一个压电堆.

今考虑一个堆中的第 n 节压电层. 首先可以用一个三端网络来描述它，第一个端对是电端对，工作于电压 V_n 和电流 I_n 下，另两个端对是弹性端对，一个是压电片的前负载，另一个是后负载，作用力分别为 F_n 和 F_{n+1}，速度分别为 U_n 和 U_{n+1}. 为便于分析，把三端网络扩展为四端网络，如图 8.6.1 所示. 其中 a 为三端等效网络，b 为串联四端等效网络，c 为并联四端等效网络. 对于四端网络，可用下面电路方程表示：

$$\begin{pmatrix} F_n \\ U_n \\ V_n \\ I_n \end{pmatrix} = (T)_n \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ U_{n+1} \\ V_{n+1} \\ I_{n+1} \end{pmatrix}, \tag{8.6.1}$$

其中 $(T)_n$ 为 4×4 矩阵. 对于由 N 节组成的压电堆，串接时的转移矩阵 (T) 为

$$(T) = \prod_{n=1}^{N} (T)_n. \tag{8.6.2}$$

若表示为两端对网络，则转移矩阵为 2×2 矩阵. 设力学后端对具有阻抗 Z_b、电学前端对具有阻抗 Z_e、按图 8.6.1，可得

$$V_{n+1} = Z_e I_{n+1}, F_n = -Z_b U_n. \tag{8.6.3}$$

从式(8.6.1)消去 I_{n+1} 和 U_n、可得

$$\begin{pmatrix} V_n \\ I_n \end{pmatrix} = (A) \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ U_{n+1} \end{pmatrix}. \tag{8.6.4}$$

2×2 的矩阵 (A) 的元为

$$\begin{aligned} A_{11} &= T_{31} - D_3 D_1 / DN, \\ A_{12} &= T_{32} - D_3 D_2 / DN, \\ A_{21} &= T_{41} - D_4 D_1 / DN, \\ A_{22} &= T_{42} - D_4 D_2 / DN, \end{aligned} \tag{8.6.5}$$

其中

$$D_1 = T_{11} + Z_b T_{21},$$
$$D_2 = T_{12} + Z_b T_{22},$$
$$D_3 = T_{33} Z_e + T_{34}, \tag{8.6.6}$$
$$D_4 = T_{43} Z_e + T_{44},$$
$$DN = T_{13} Z_e + T_{14} + Z_b (T_{23} Z_e + T_{24}).$$

如果网络是互易的，则

$$\det(A) = A_{11} - A_{22} - A_{12} A_{21} = 1. \tag{8.6.7}$$

若网络是耗散的，则 A_{11} 和 A_{22} 为实数，A_{12} 和 A_{21} 是虚数.

对于式(8.6.4)可以用图8.6.2来描述，其中(a)图表示正向传

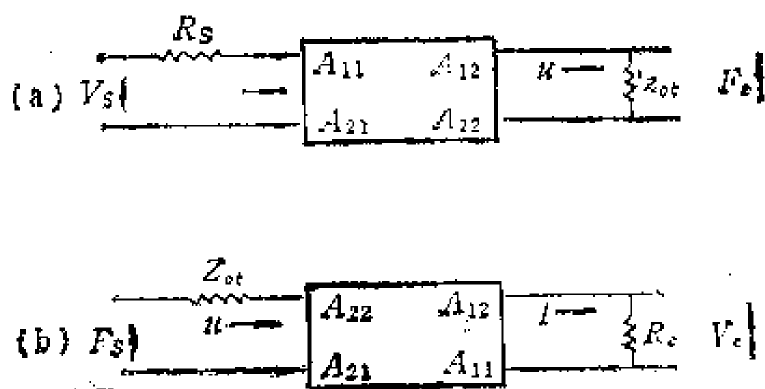


图 8.6.2 压电换能器的二端网络表示法

输，(b)图表示反向传输. Z_{ot}为换能器力学面的阻抗假定为实数，而在电学端也出现电输入阻抗 Z_t，其关系为

$$Z_{ot} = F/U, Z_t = V/I. \tag{8.6.8}$$

解式(8.6.4)，可得

$$Z_t = a/b, \tag{8.6.9}$$

其中

$$a = A_{11} Z_{ot} + A_{12};\ b = A_{21} Z_{ot} + A_{22}. \tag{8.6.10}$$

同理，我们可以求得电压转移比

$$F_1/V = Z_{ot}/a, \tag{8.6.11}$$

并可求得反射因子

$$P_r/P_t = |(Z_t - R_s)/(Z_t + R_s)|^2 = |(a - R_{sb})/(a + R_{sb})|^2, \tag{8.6.12}$$

其中 P_t 为投入换能器的功率，P_r 为阻抗失配的反射功率，R_s 为策

动源的电阻．常用分贝数表示反射损失

$$RL = -10\log(P_r/P_i). \tag{8.6.13}$$

传入换能器的功率比为

$$P_t/P_i = 1 - P_r/P_i, \tag{8.6.14}$$

其中 P_t 为透入到换能器的功率，并用分贝数定义匹配损失

$$ML = -10\log(P_t/P_i). \tag{8.6.15}$$

对于无内耗的换能器，传递给负载 Z_m 的功率 P_1 等于 P_t．若存在损失，$P_1/P_t<1$，则可定义

$$DL = -10\log(P_1/P_t) \tag{8.6.16}$$

为耗散损失．并称

$$TL = ML + DL = -10\log(P_1/P_i) \tag{8.6.17}$$

为换能器损失．假定 Z_{ot} 为实数，

$$P_1/P_i = Z_{ot}/R_e(a^*b), \tag{8.6.18}$$

其中 * 号示复共轭．又可得

$$P_1/P_i = 4R_sZ_{ot}/|a + R_sb|^2. \tag{8.6.19}$$

对于反传输问题可以获得类似的关系式．在高频下工作时，电极和粘结层的影响可归入 2 × 2 转移矩阵中．利用梅森等效电路可以具体地分析高频换能器的特性．本书前面章节中对此已有所论述．对于利用淀积技术制作的压电薄膜换能器，可不计粘结层的影响．一般而言，电极和粘结层的影响是出现复传输阻抗，对通带特性，相位畸变作出反响．高频换能器的引线的作用相当于一串联电感，如 10mm 长，2.5mm 直径的引线在 100MHz 时等效于 3nH 电感或 2Ω 阻抗．

关于具体的高频超声体波器件，各有其设计原理、制作工艺和使用性能，这里只能少许介绍．试论高频谐振器．设计上常采用能阱模式，制作上可用溅射技术或离子刻蚀的方法，其性能可举国内山东大学用离子刻蚀在石英上获得的 100MHz 的晶体谐振器为例，具体指标是

共振频率 f_r　　99.514MHz

带　　宽 Δf　　136kHz

动生电阻 R_1	114Ω
动生电容 C_1	3.5×10^{-3}pF
动生电感 L_1	0.72mH
静态电容 C_0	1.30pF
品质因子 Q	3947
电极直径 ϕ	0.5mm
电极厚度 t	700 Å

利用这种谐振器可制作晶体滤波器，其中心频率为 99.420MHz，相对带宽为 0.2%，通带波动为 0.668dB、带内衰减为 0.5dB.

高频晶体滤波器广泛应用于雷达、通讯、导航、精密测量和频谱分析. 要用好高频晶体滤波器，除压电换能器的精心制作外，在实际结构中要注意许多事项，如电路分布参数，线圈的漏磁、杂散电磁波的干扰、接地是否充分、布线是否合理、屏蔽是否严格等等. 比如晶体滤波器的屏蔽盒大都是长方形的，并尽可能长一些以减少分布参数的影响. 要选择导磁系数大的介质作为制作材料，如铁镍合金板，以减少和消除电磁干扰，外表镀银以利于接地和锡封，接地线用焊接等等. 性能的测试亦是一项专门技术，使用频谱分析仪，频率综合器和选频电平表等等.

8.6.2 声子回波

在传统的声学概念中，回波来自界面的反射. 在七十年代初期，发现无界面的回波，叫声子回波 (phonon echos)，它是体系本身的非线性特性所造成的，当发射一个声子脉冲后，便会出现一连串按一定时间间隔排列的脉冲声子，其现象犹如已知的光子回波.

1971 年苏联约飞研究所在研究 SbS 粉末的核自旋回波中发现这个异常的现象，1972 年美国 IBM 实验室有意地做超声自旋回波实验，随后法国、西德纷纷开展此项研究工作. 到目前为止，已发现许多材料均有声子回波现象，这些材料是压电半导体 CdS 等，压电绝缘体 $LiNbO_3$ 等、金属 Mg 等、磁性材料 MgO 等和非晶态掺钨的玻璃等等.

图 8.6.3 给出声子回波和传统反射回波的对照. 图中的上半部分代表声子回波. 实验样品为粉末状,实验中两个频率相同、具

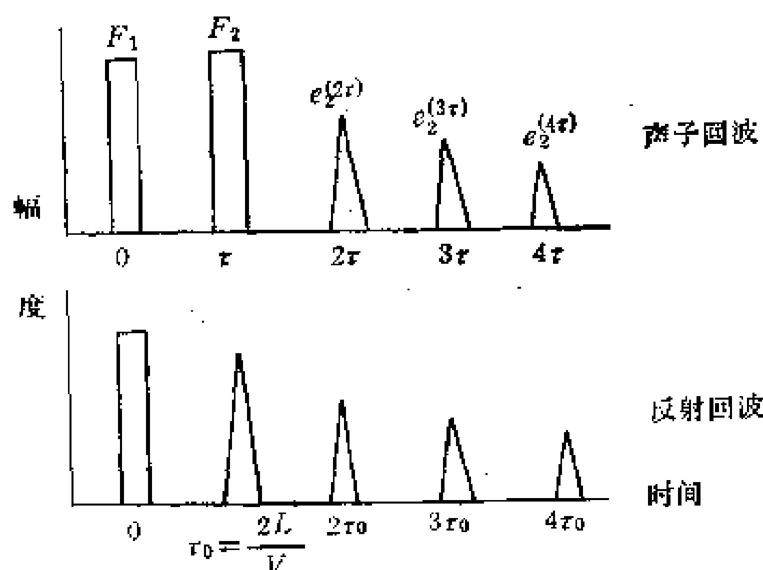


图 8.6.3 声子回波与经典反射回波

有一定幅度、并以时间间隔为 τ 的脉冲加于粉末上,则能观察到接踵而来的一连串回波讯号 $e_2^{(m\tau)}$,它们发生在时间 $t=m\tau$ 上,其中 $m=2,3,4,\cdots$. 停掉F_2后回波信号消失. 图中的下半部分表示经典的反射回波,在时间 $t=0$ 时加一个一定幅度的脉冲,则在 $t=n\tau_0, n=1,2,3,\cdots$.出现一系列反射回波,只要有 F_1 便有一连串回波.

对于声子回波的解释,宏观上,可用唯象的热力学理论,但这时要考虑到非线性项;微观上,可用声子的相互作用,即合作过程和离解过程来解释.

典型的声子回波实验装置如图 8.6.4 所示. 设实验用的粉末样品的直径为 ϕ,振荡器发射的波长为 λ,当 $\phi\approx\lambda/2$,回波最强. 常用的声子回波实验频率为 10^7—10^{12}Hz,实验也常常在低温下进行.

根据回波的原理和时间的长短,可分为静力回波和动力回波. 静力回波与粉末粒子的静力学行为有关,由粉末的静力机械旋转所引起. 如压电粉末粒子的压电轴与外电场之间有一定角度,则

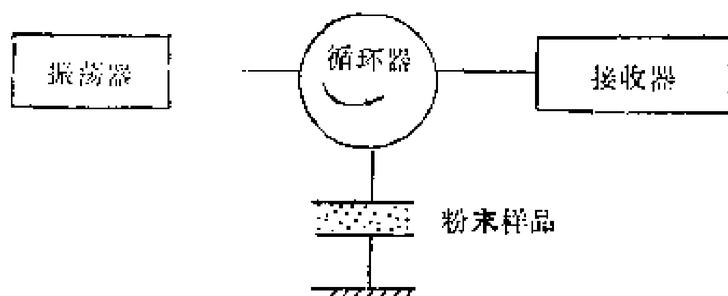


图 8.6.4 声子回波实验

压电粒子受到转矩

$$\mathbf{G}(t)=\mathbf{P}(t)\times\mathbf{E}(t) \tag{8.6.20}$$

作用而旋转，其中 $\mathbf{P}(t)$ 为电极矩、$\mathbf{E}(t)$ 为外场．旋转运动含有的交流成分将形成回波．动力回波与粉末粒子的动力学行为有关，是由于粉末粒子受到压电力而形变所引起的，其高阶弹性系数所形成的非线性项将产生动力回波．实验发现，有些情况下回波现象延续很长时间，甚至是几天后，这便提示人们可以利用此现象来开发新的存贮器件．

利用声子回波可以研究固体的微观结构．在含有顺磁离子的材料中，同时研究声子回波与自旋回波，可以较完整地描述顺磁弛豫过程，测量自旋声子耦合系数；观测非晶态玻璃中的声子回波，说明玻璃中存在本征态，确认其双能级模型，直接测量其形变势；压电半导中的声子回波是由于隧道几率的非线性特性形成的；压电粉末中的声子回波是由于粉末粒子振动的非线性特性形成的，因此声子回波又是研究材料的非线性特性的有力工具．

8.6.3 旋声性

物质的旋光性早在一百多年前就被发现了，但是物质的旋声性，还是近十几年前发现的新的物理现象．旋声性（acoustical activity）是指弹性的线偏振横波的偏振面随着波的传播而转动的现象，其物理机制是体系的本构参数依赖于波长而引起的，即存在空间色散．旋声性存在的必要条件是顺度矩阵的不对称性．

利用声子对中子的非弹性散射可研究物质的旋声性．中子打

入固体后，将与声子发生非弹性碰撞而产生非弹性散射，确定被散射中子能量的增损对散射方向的关系，便能求知旋声性. 根据能量和动量守恒定律，存在波矢选择定则

$$\mathbf{k}+\mathbf{G}=\mathbf{k}'\pm\mathbf{K}, \tag{8.6.21}$$

其中 $\mathbf{k}$ 为入射中子的波矢，$\mathbf{k}'$ 为散射中子的波矢，$\mathbf{G}$ 为晶体的倒格子矢，$\mathbf{K}$ 为被产生或吸收的声子波矢.

进行上述实验时可使用中子反应堆和三轴晶体谱仪，其装置如图 8.6.5 所示.

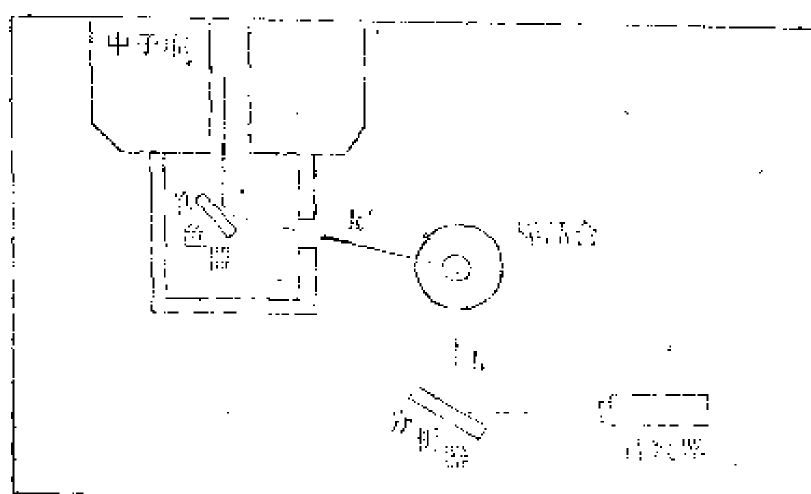


图 8.6.5　中子非弹性散射实验装置

直至1980 年，国外仅报道过在 α-SiO_2 的[001]方向和 $NaClO_3$ 的[100]方向发现旋声性. 近些年，中国科学院物理研究所等单位发现了 $Bi_{12}GeO_{20}$ 和 $Bi_{12}SiO_{20}$ 两种晶体在 [111] 方向的旋声性. 研究物质旋声性的时间还很短，其旋声性的微观机制还未弄明白，这项研究将促进对物质微观结构的了解. 至于将来是否可以开发为某种器件，也不是不可能的.

8.6.4　微波超声在研究固体物理中的应用

本小节的题目与 §8.5 以及与 §8.6 其它小节的内容是难以分开的，当然 §8.6 中的各部分与 §8.5 各部分的划分亦仅是为了强调某些专题. 本小节的标题是顾及到传统的叫法，其目的是更广

泛地指出高频超声在研究固体物理中的地位与作用.

本世纪50年代末60年代初，微波超声问世，60年代中期低频段声表面波技术开始迅速发展，随后获得有成效的应用. 但在高频段，微波超声与物质微观结构的相互作用更引起固体物理界的重视，并获得一系列重大的应用. 利用微波超声可以测量金属的费米面的形状；测量超导体的能隙，可以构成声电子自旋共振技术；构成声核磁共振技术；可以测量晶体的相变；可以了解非晶态物质原子群的动态性质；研究晶体塑性流；揭示超导中的位借效应、超导体塑性流等等. 近些年来国际上召开了多次有关声子物理的会议，大量地报道了这方面的研究. 下面略举几个例子说明.

一个例子是微波超声在研究非晶态固体中的应用. 测量微波超声在熔石英里的声衰减，获得如图8.6.6所示结果. 其中曲线a是930MHz的实验结果，b是507MHz的实验结果，c是石英单晶在1GHz下的实验结果，使用的都是纵声波，虚线为理论近似. 首先看到，晶态和非晶态的吸收特性之间差别很大，关于石英单晶，其吸收机理是明了的，它可以认为是超声声子与热声子相互作用的结果，但是用同样的机理不能解释非晶态的反常吸收特性，因为晶态和非晶态石英的密度、声速和Grüneisen常数都很相近，因此必须考虑新的吸收机理. 改变其他成分的玻璃亦得到类似的结果，吸收峰出现在50K附近. 这意味存在着位垒，可以用双势井来描述，如图8.6.7所示. 通过位垒存在一个隧道，这个隧道系统是一个双能级系统. 进一步又测量了在低温下不同声强时的吸收，获得如图8.6.8所示的结果，其中a的声强是$0.23\times10^{-6}W/cm^2$，b的声强是$300\times10^{-6}W/cm^2$，实

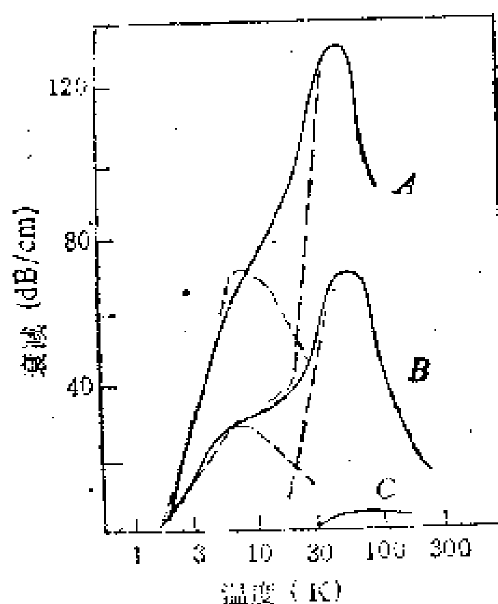


图8.6.6 微波超声在熔石英里的声衰减

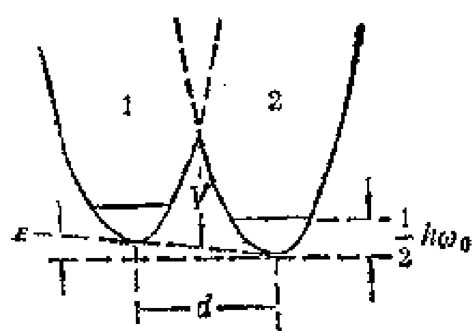


图 8.6.7　多晶石英的双势井

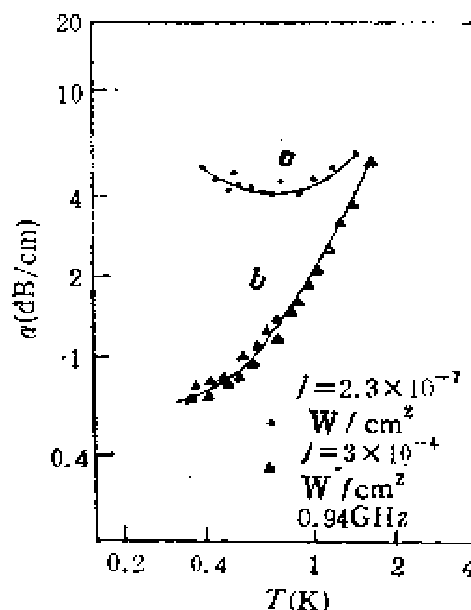


图 8.6.8　在低温下不同声强的吸收特性

验的频率为 0.94GHz．对于不同组分的玻璃，用不同的声强也可得到类似的结果，这些结果更进一步说明了玻璃的双能级体系及其共振吸收过程．

下面举一个例子说明微波超声如何用于研究单晶固体材料．钆镓石榴石单晶($Gd_3Ga_5O_{12}$)，又称 GGG 单晶，是一种新型单晶，用于磁泡技术、磁光技术和磁致冷技术．近些年来双掺 Nd、Cr 的 GGG 又用于激光工作物质，而某些掺质 GGG 则广泛应用于磁光调制、激光陀螺磁光印刷术、磁致冷技术等等．掺质 GGG 又是一种优质装饰宝石，其折射率、色散、硬度均较理想．掺质 GGG 的研究中，首先引起注意的是阳离子的置换．由于 Gd 位于氧十二面体中心，实验证明，许多稀土元素，只要离子半径适中，就可部分

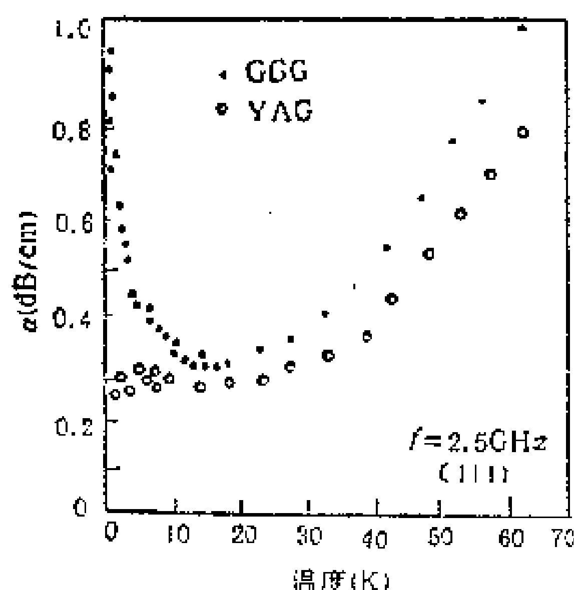


图 8.6.9　GGG 在低温下异常的过量吸收

或全部置换 Gd^{3+}.

测试 GGG 的微波超声声衰减时，发现在低温下，存在异常的过量吸收，如图 8.6.9 所示. 图中给出 YAG 的对照结果，可见在 30°K 以下，非磁石榴石的声衰减与温度无关，即存在所谓剩余衰减，而 GGG 中超声衰减则反常地迅速增加. 对此现象，理论上提出的模型认为是微波声子与磁性离子 Gd^{3+} 的相互作用，经计算可求得沿晶体[111]和[100]方向的声衰减比值为

$$\frac{\alpha_{[111]}}{\alpha_{[100]}}=2.67. \tag{8.6.22}$$

而实验结果其比值为 2 (实验曲线如图 8.6.10 所示)；两者符合得

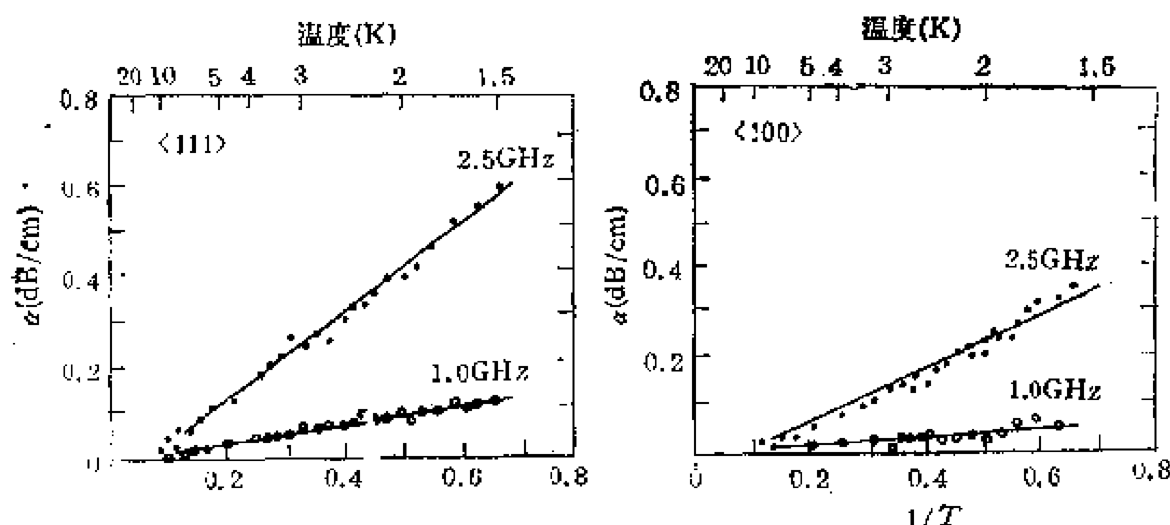


图 8.6.10 沿 GGG 不同方向的声衰减

较好. 实验中采用脉冲回波技术，压电换能器是溅射的 ZnO 薄膜换能器，实验温度为 20 K 以下. 通过微波声学的研究，亦指出 Gd^{3+} 离子在 GGG 的作用与地位，这样可以相辅相成地加深对GGG 微观结构的了解，以便创造更优质的磁单晶.

下面来看看微波超声在金属固体研究中的应用. 金属中由于存在传导电子，超声衰减增大，其机制可认为是点阵中非简谐力的作用. 由于金属中的声衰减大，实验样品要尽可能短小，用一般的脉冲回波法不太适宜. 常采用如图 8.6.11 的装置，在二个微波谐振腔中，各插入一根石英棒，一作发射微波超声，另一个作接收微

波超声，当中夹入一薄片金属待测样品．研究金属中的超声衰减，常考虑磁场的影响，故装置中可以加入磁场，在研究Fermi面的形状时，就需要这种装置条件．由于磁场的存在，金属中传导电子受到Lorentz力而改变波矢．当磁场垂直于声传播方向，一旦电子轨道的尺寸与超声波长匹配，将发生几何共振．事实上，若电子轨道的直径是半波长的偶数倍，衰减取极大值．若电子轨道的直径是半波长的奇数倍，衰减呈极小值，几何共振给出Fermi面极值尺寸的信息．图8.6.12给出一个观测实例，实验金属样品为铋，实验频率是9.3GHz的纵波，从这些实验，可以估计电子的迟豫时间．

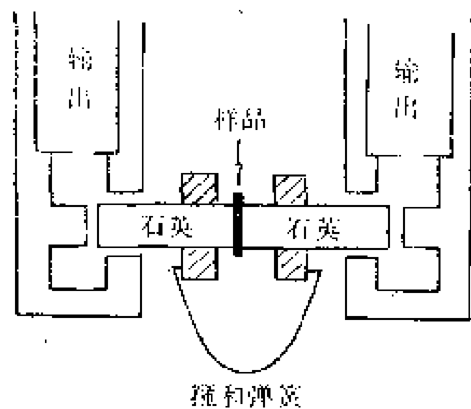


图 8.6.11　研究金属中微波超声衰减的装置

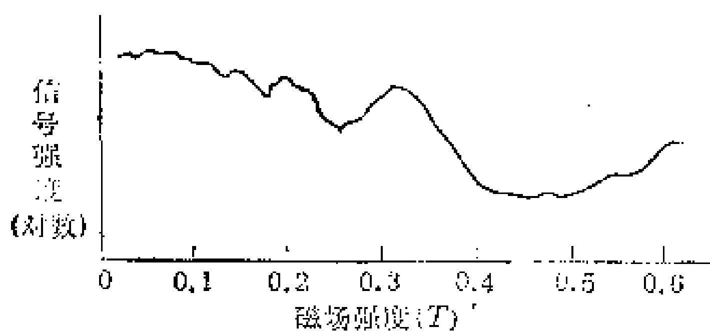


图 8.6.12　金属中声衰减的几何共振现象

下面再看看微波超声于研究超导体中的应用．曾使用8.8GHz的微波超声脉冲(功率有两种，两者差20dB)，观测超导铝在超导转变温度附近的声衰减，获得如图8.6.13所示的结果．图中声衰减以归一化表达，图中亦同时给出Bobetic的理论曲线．图8.6.13说明超导体的声衰减与声功率有关．考虑到超导能隙的各向异性特性、理论与实验可以比拟，但是又提出新问题，即低于超导转变温度时，声衰减与声功率的关系是什么？

下面介绍用于研究压电半导体的微波超声实验．实验材料是GaAs：Mn，沿[111]方向测试声衰减，方法是纵波的脉冲回波法．首先测得声衰减随温度的关系，结果如图8.6.14所示，其中曲线

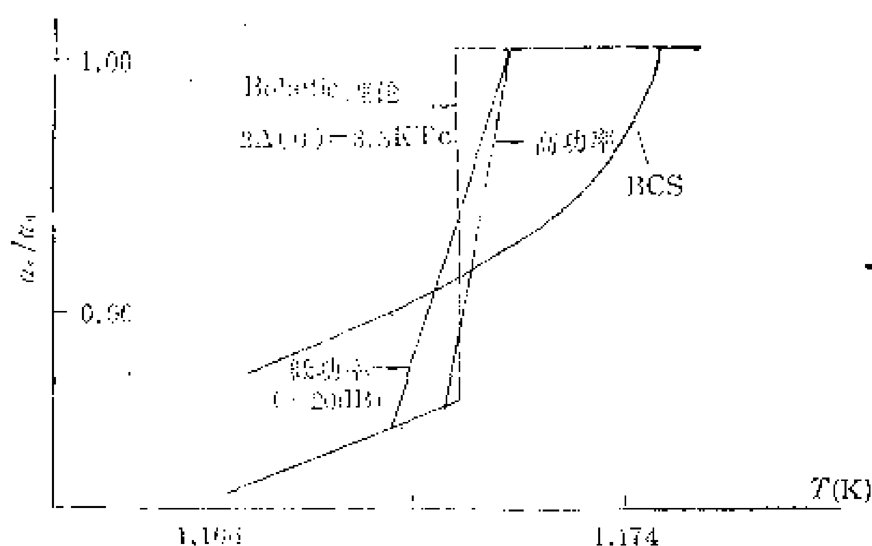
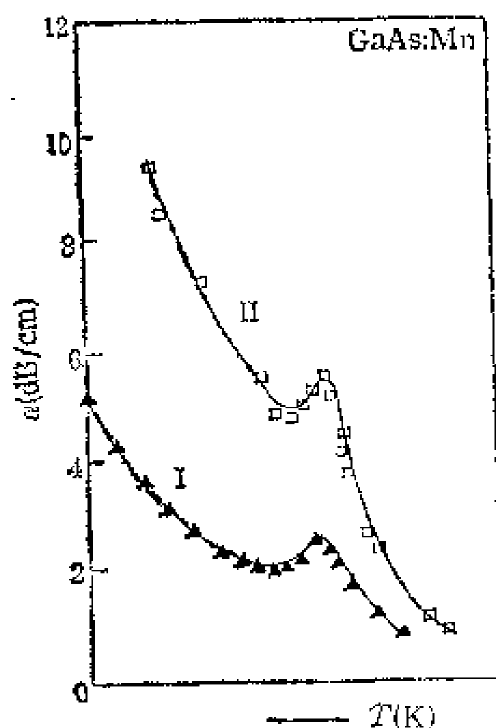


图 8.6.13 超导体的声衰减与声功率的关系

I 对应于Mn的浓度为$1.8\times10^{18}(cm)^{-3}$、位错密度为$5\times10^{5}(cm)^{-2}$，工作频率为 390MHz；曲线 II 对应于Mn浓度为$3.8\times10^{18}(cm)^{-3}$，位错密度为$5\times10^{3}(cm)^{-2}$，工作频率为400MHz．可知声衰减随温



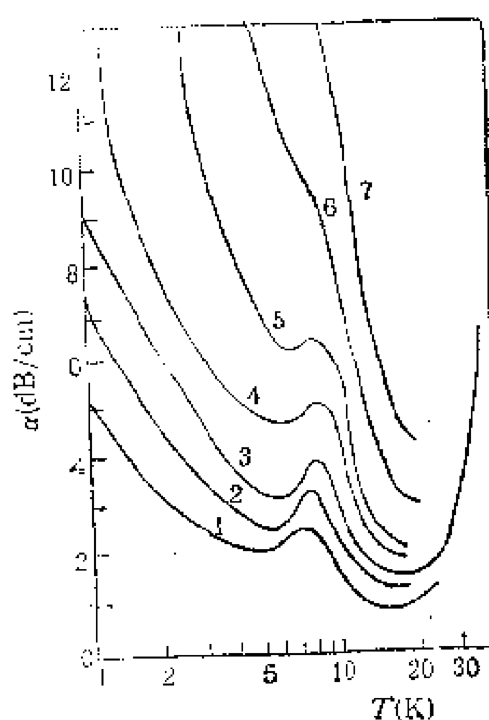


图 8.6.14 压电半导体的声衰减　　图 8.6.15 压电半导体中不同频率的声衰减

度下降而变大，并在接近于 7 K 时出现峰值，它和受主浓度有关．

在更多的超声频率下， .15 所示的结果，其中曲线 1 对应于 390MHz，曲线 2 3 对应于 650 MHz，曲线 4 对应于 800MHz， 1000MHz，曲线 6 对应于 1400MHz，曲线 7 对应于 2000MHz. 实验样品采用第 I 种晶体. 从图中可见，温度超过 20K，声衰减增大. 经研究知道，它是压电耦合到热激发载流子的原因；随着超声频率的增加，吸收峰向高温移动. 在这项研究中再加入磁场，又可获得一系列结果，如图 8.6.16 给出不同取向磁场下的声衰减. 设磁场与晶体[111]夹角为 θ，图中曲线 1 对应磁场 $H=0$； 曲线 2 为 $H=0.71\mathrm{T}$，$\theta=0°$；曲线 3 为 $H=0.71\mathrm{T}$，$\theta=55°$；曲线 4 为 $H=0.71\mathrm{T}$，$\theta=90°$. 从图 8.6.16 可知，不论磁场的取向如何，吸收峰的位置不变；对于 $\theta=0°$ 者，由于存在一定的磁场，声衰减增大. 这些利用微波超声获得的新现象加深了对压电半导体的认识，同时也提出了问题.

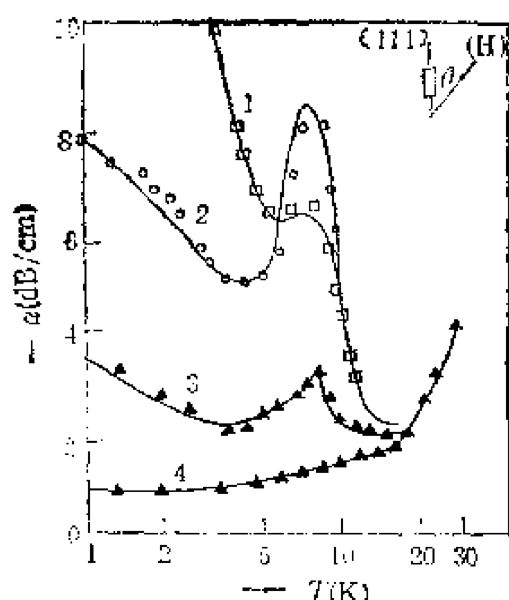


图 8.6.16 压电半导体中声衰减的磁场效应

参 考 书 目

[1] R. T. Beyer and S. V. Letcher, Physical Ultrasonics, Academic Press, New York (1969).

[2] M. J. P. Musgrave, Crystal Acoustics, Holden-Day, San Francisco (1970).

[3] J. W. Tucker and V. W. Rampton, Microwave Ultrasonics in Solid State Physics, North-Holland Publishing Company, Amsterdam (1972).

[4] J. A. Reissland, The Physics of Phonons, John Wiley and Sons LTD, London (1973).

[5] Microwave Acoustics, edited by E. R. Dobbs and J. K. Wigmore, Satellite Symposium of the 8th International Congress on Acoustics (1974).